産学共同プロジェクト「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」

数学Ⅱ　指導案（略案）

昭和第一学園高等学校　三島　直人

実験授業の目的

円の接線に関する問題における角の大きさに着目した解法について，学生のつまずきを明らかにする。

授業のねらい

円の接線に関する問題において，関数電卓の逆三角関数機能を用いて角の大きさに着目した解決ができる。

本時の展開

<table>
<tr><th></th><th>学習活動</th><th>指導の手立て</th><th>留意点</th></tr>
<tr><td rowspan="2">導入</td><td colspan="3">問題 1-A
円$x^2+y^2=9$と直線 $3x+4y-k=0$ が接するとき，定数kの値を求めよ。</td></tr>
<tr><td>・「問題 1-A」に取り組む。その際，想定される回答は次の 2 つである。
①2 次方程式の判別式を用いた回答
②点と直線の距離の式を用いた回答</td><td>・学生の回答を全体に共有する。</td><td>・学生の回答を共有する際，①，②のいずれかの回答しか共有できなかった場合，指導者がもう一方の回答を紹介する。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">展開</td><td colspan="3">問題 1-B
円$x^2+y^2=9$と直線 $x+\sqrt{3}y-k=0$ が接するとき，接点の座標を求め，定数kの値を求めよ。ただし，直線と x 軸の正の向きのなす角に着目して解決せよ。</td></tr>
<tr><td>・「問題 1-B」に取り組む。</td><td>・必要であれば，次のことを全体で共有する。
①直線と x 軸の正の向きのなす角の大きさは正接を用いると求められること。
②原点と接点を結ぶ直線と x 軸の正の向きのなす角に着目すると良いこと。</td><td></td></tr>
</table>

		・学生の回答のうち，正答であるものを取り上げ全体で共有する。 T：なぜこのような解法を「問題 1-A」では用いなかったのですか？ S：思いつかなかった。 S：習ったことがなかった。 T：確かに教科書等でもこのような解法を見たことはないですね。なぜでしょうか。	
		S：特殊な条件でしか使えないからではないか。 T：特殊な条件とはどのような条件とはどのような条件でしょうか。 S：なす角が 30°とかの有名角になるような条件です。 T：それでは，なす角が任意の角でも，直線の傾きからその角の大きさを求めることができればいいですね。関数電卓には逆三角関数機能があり，この機能を用いると，任意の角の大きさを求めることができます。	・ある特殊の条件下でしか使えないことを確認する。
		・関数電卓の逆三角関数機能を用いると，直線の傾きから，直線と x 軸の正の向きのなす角を求めることができることを説明する。	・逆三角関数について詳しく説明せず，関数電卓の逆三角関数機能を用いると角の大きさを求めることができる程度にとどめる。

関数電卓操作練習問題

(1)　$3x + 4y - k = 0$ と x 軸の正の向きのなす角を求めよ。

(2)　$3x - 9y - k = 0$ と x 軸の正の向きのなす角を求めよ。

(3)　$ax + by - k = 0$ と x 軸の正の向きのなす角を求めよ。

　　また，$a = 3$，$b = 4$ のとき，(1)の角の大きさと一致することを確かめよ。

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>・関数電卓操作練習問題に取り組む。</td><td>・関数電卓の逆三角関数機能とカルク機能の操作方法を示す。</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">問題 2
円$x^2+y^2=\ r^2$ と直線 $ax+by-k=0$ (b≠0)が接するとき，関数電卓の逆三角関数機能を用いて定数 k の値を求めたい。次の問いに答えよ。
(1) 直線 $ax+by-k=0$と x 軸のなす角を θ とするとき，円$x^2+y^2=\ r^2$と直線 $ax+by-k=0$の接点の座標を θ，r を用いて表せ。
(2) k を a，b，r，θ を用いて表せ。
(3) θ を a，b を用いて表せ。また，k を a，b，r を用いて表せ。
(4) $a=3$，$b=4$，$r=3$ のとき，定数 k の値を求めよ。</td></tr>
<tr><td>・問題 2 に取り組む。</td><td>・正答例を解説する。</td><td>・(4)で求めた値が，問題 1-A で求めた値と一致するか確かめさせる。</td></tr>
<tr><td rowspan="6">まとめ</td><td>・本時を振り返る。</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">関数電卓の逆三角関数機能を用いると，角の大きさに着目した解決ができる。</td></tr>
<tr><td></td><td>・事後の課題として発展問題を課す。</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">発展問題
楕円$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ と直線 $cx+dy-k=0$ が接するときの定数 k の値を関数電卓の逆三角関数機能を用いて求めよ。</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>・発展問題には, 数学Ⅲの学習内容が含まれるため，取り扱う場合は，数学Ⅲの単元「平面上の曲線と複素数平面」の学習後が望ましい。</td></tr>
</table>

問題 1-B の正答例

円の接線の内，傾きが一定である直線は 2 つある。そのため接点も 2 つあり，その内の 1 つを T（s, t）とおく。直線 $x+\sqrt{3}y-k=0$ と x 軸の正の向きのなす角は，直線の傾きが$-\frac{1}{\sqrt{3}}$であるので，$-30°$である。そして，OT と x 軸とのなす角は 60°である。したがって，$\binom{s}{t}=\binom{3\cos 60°}{3\sin 60°}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$である。接点 T は，直線 $x+\sqrt{3}y-k=0$ 上の点であるので，定数 k の値は，

$k=\frac{3}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=6$ である。

次に，もう一つの接線について示す。その接点を T′（s', t'）とおく。T′は，T を原点に関して，180°回転させた点であるので，$\binom{s'}{t'}=\binom{3\cos 240°}{3\sin 240°}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$となる。接点 T′は，直線 $x+\sqrt{3}y-k=0$ 上の点であるので，定数 k の値は，　$k=-\frac{3}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=-6$ である。

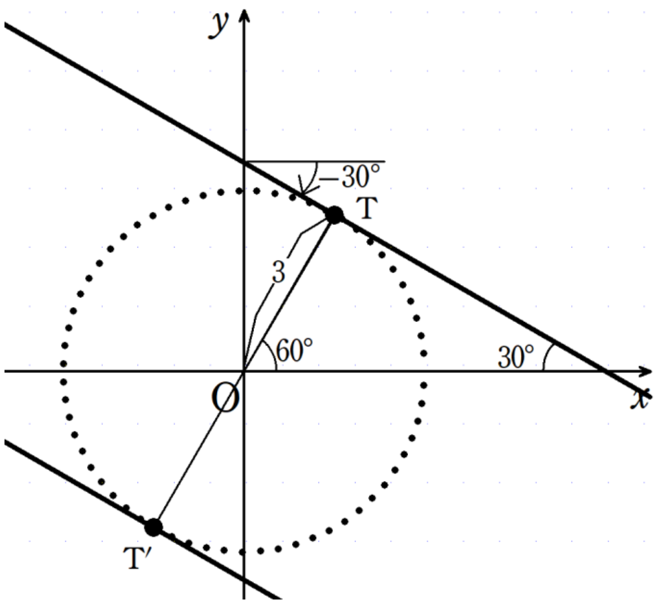

図 1　問題 1-B における円と接線

問題 2 の正答例

（1）円の接線の内，傾きが一定である直線は 2 つある。そのため接点も 2 つあり，その内の 1 つを T（s, t）とおく。直線 $ax+by-k=0$ と x 軸の正の向きのなす角は θ（$-90°≦\theta≦90°$）であるため，OT と x 軸とのなす角は（θ + 90°）である。したがって，$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+90°) \\ r\sin(\theta+90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$…①である。次に，もう一つの接線について示す。その接点を T′（$s′, t′$）とおく。T′は，T を原点に関して，180°回転させた点であるので，$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta+180°) \\ r\cos(\theta+180°) \end{pmatrix}$…①′となる。

（2）接点 T は，直線 $ax+by-k=0$ 上の点であるので，定数 k の値は，$k=as+bt$ で求められる。したがって，①より，$k=-ar\sin\theta+br\cos\theta$…②となる。接点 T′に関しても同様に，①′より，$k=-ar\sin(\theta+180°)+br\cos(\theta+180°)$…②′となる。

（3）直線 $ax+by-k=0$ の傾きは$-\frac{a}{b}$であるので，$\theta=\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$となる。よって，式②，②′にそれぞれ代入すると，$k=-ar\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)\right)+br\cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)\right)$…③，$k=-ar\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)+180°\right)+br\cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)+180°\right)$…③′となる。

（4）関数電卓の「基本計算」モードに，③，③′の式を入力する。次に，カルク機能を用いて，$a=3$，$r=3$，$b=4$ と入力すると，15（または−15）と表示される。

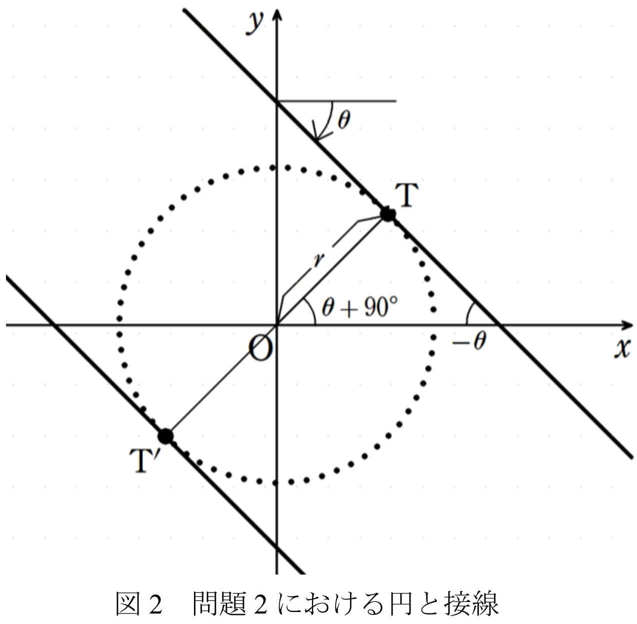

図 2　問題 2 における円と接線

発展問題の正答例　（2 つの接線のうち，1 つの接線について示す。）

楕円$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の接線が $cx+dy=k$ であるときの接点を P(s, t)とする。このとき，

$k=\binom{s}{t}\cdot\binom{c}{d}$…①となる。楕円$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=1$ を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍した図形である。楕円周上の点(s, t)に対する円周上の点を P′(S, T)とすると

$\binom{s}{t}=\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}\binom{S}{T}$…②となる。よって，$\binom{s}{t}=\binom{aS}{bT}$…③となる。ここで，直線 $cx+dy=k$ は点 P(s, t)を通るため $cs+dt=k$ である。よって，③より，$caS+dbT=k$ となるため，

$T=-\frac{ac}{bd}S+\frac{k}{bd}$となる。したがって，円周上の点 P′$(S, T)$における円 $x^2+y^2=1$ の接線は

$y=-\frac{ac}{bd}x+\frac{k}{bd}$となる。直線 $y=-\frac{ac}{bd}x+\frac{k}{bd}$と x 軸の正の方向とのなす角を α とすると，$\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}(-\frac{ac}{bd})$である。直線 OP′と x 軸の正の方向とのなす角は$(\alpha+90°)$である。したがって，点 P′の座標は

$\binom{S}{T}=\binom{\cos(\alpha+90°)}{\sin(\alpha+90°)}=\binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$であるので，$\binom{S}{T}=\begin{pmatrix}-\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{ac}{bd}\right)\right)\\ \cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{ac}{bd}\right)\right)\end{pmatrix}$となる。これを②に代入すると$\binom{s}{t}=\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{ac}{bd}\right)\right)\\ \cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{ac}{bd}\right)\right)\end{pmatrix}$が得られ，これを①に代入すると

$k=\left(\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{ac}{bd}\right)\right)\\ \cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{ac}{bd}\right)\right)\end{pmatrix}\right)\cdot\binom{c}{d}$となる。この式を展開すると

$k=-ac\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{ac}{bd}\right)\right)+bd\cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{ac}{bd}\right)\right)$となる。

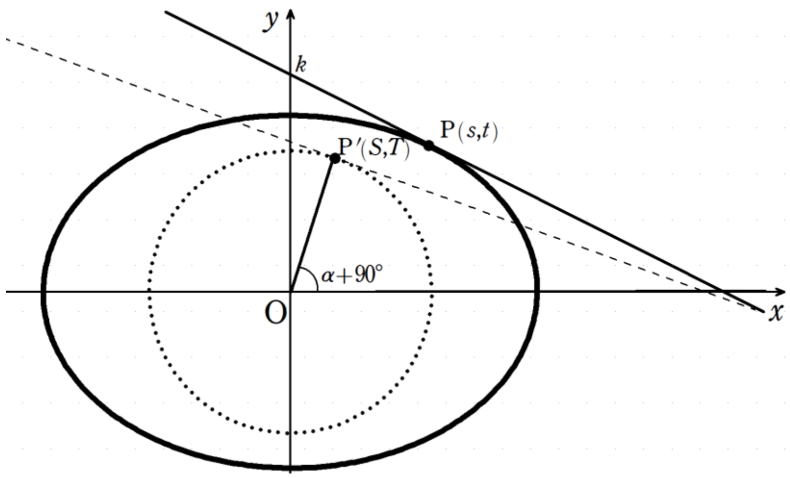

図 3　発展問題における楕円と接線