埼玉県内公立高校での実践報告

埼玉県立日高高等学校　波形　政輝

１．埼玉県内公立高校での授業実践の概要

ここでは，埼玉県内公立高校での授業実践に向けた指導案立案，埼玉県内公立高校での授業実践の流れについて述べる。

1.1. 指導案立案

本授業実践は，波形作成「数学Ⅱ　指導案（略案）」をもとに実践している。本授業実践では，以下の問題に取り組んだ。

問 1. $3x^3-4x^2-17x+6=0$ の実数解の個数は□個である
問 2. $x^3-3x+2=0$の実数解の個数は□個である
問 3. $x^3-3x+3=0$の実数解の個数は□個である

この問題を，関数電卓を使用して解決すると，カルク機能を用いて解を具体的に求めることができ，実数解の個数を求めることができる。この問題について，関数電卓を使用しない解決を示す。

問 1 の関数電卓を使用しない解決は，次の 2 つの解決がある。1 つ目は，方程式の実数解の個数を，関数$f(x)=3x^3-4x^2-17x+6$のグラフと x 軸との共有点の個数に帰着させる解決である。具体的には，$f(x)=3x^3-4x^2-17x+6$の増減表を作成し，グラフを描く（図 1，グラフは動的数学ソフトウェア GeoGebra で作成）。

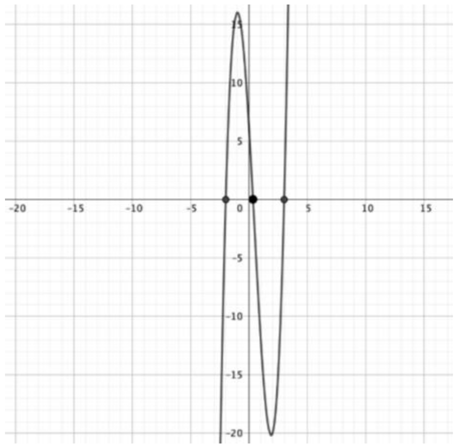

図 1　$f(x)=3x^3-4x^2-17x+6$のグラフの概形

このグラフと x 軸は 3 つの共有点を持つので，この方程式の実数解の個数は 3 つである。2 つ目は，$f(a)=0$となる a を求め，因数定理を用いて因数分解し，その因数である 2 次式に着目し因数分解を用いて解を求める解決である。

問 2 の関数電卓を使用しない解決は，問 1 の解決と同様に，次の 2 つの解決がある。1 つ目は，方程式の実数解の個数を，関数$f(x)=x^3-3x+2$のグラフと x 軸との共有点の個数に帰着させる解決である。$f(x)=x^3-3x+2$の増減表を作成し，グラフを描く（図 2）。

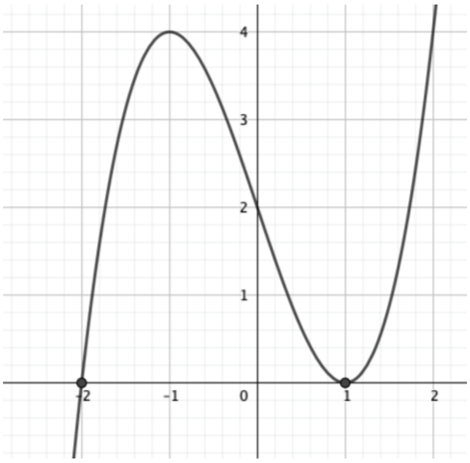

図2　$f(x)=x^3-3x+2$のグラフの概形

このグラフと x 軸は 2 つの共有点を持つので，この方程式の実数解の個数は 2 つである。2 つ目は，$f(a)=0$となる a を求め，因数定理を用いて因数分解し，その因数である 2 次式に着目し因数分解を用いて解を求める解決である。

問 3 の関数電卓を使用しない解決は，問 1 の解決と同様に方程式の実数解の個数を，関数$f(x)=x^3-3x+3$のグラフと x 軸との共有点の個数に帰着させる。$f(x)=x^3-3x+3$の増減表を作成し，グラフを描く（図 3)。

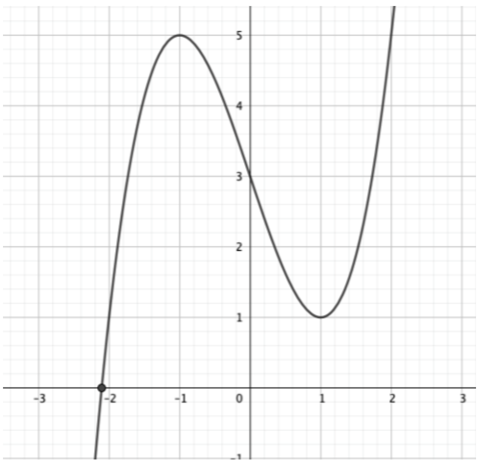

図3　$f(x)=x^3-3x+3$のグラフの概形

このグラフと x 軸は 1 つの共有点を持つので，この方程式の実数解の個数は 1 つである。この問題を因数定理で解決することは容易でない。今回の授業実践では，これらの問題を関数電卓のカルク機能（基本計算モード）の使用に限定し，高次方程式の解を探究する活動をおこなったときに，どのような議論・解答・表現が出るのかを調査することを目的としている。

1.2. 埼玉県内公立高校での授業実践の流れ

まず，関数電卓の操作のうち，授業実践に必要な，x ，x^2，x^3，＋，−，整数，小数，分数の入力方法，カーソルの操作方法，カルク機能の使い方，入力内容の訂正方法を指導し，自由にいくつかの式の値を求める練習をする。その後、次の例題に取り組む。

例題
$x^2-2x-3=0$ の解を求めよ

関数電卓を用いて，左辺のx^2-2x-3に$x=-1$，3を入力すると，式の値 0 が表示されることを確認する。この例題では，関数電卓の操作方法を確認するとともに，式の値が 0 と表示されるような x の値を探究すればよいことを確認する。

次に，上記の方程式を発展させ，関数電卓のカルク機能の使用に限定し， 本時の問題に取り組む。

問 1. $3x^3-4x^2-17x+6=0$ の実数解の個数は□個である
問 2. $x^3-3x+2=0$の実数解の個数は□個である
問 3. $x^3-3x+3=0$の実数解の個数は□個である

問 1 では，まず，$3x^3-4x^2-17x+6$を入力する。カルク機能を用いて，$x=-2$，3を入力すると，式の値が 0 と表示される（図 4)。

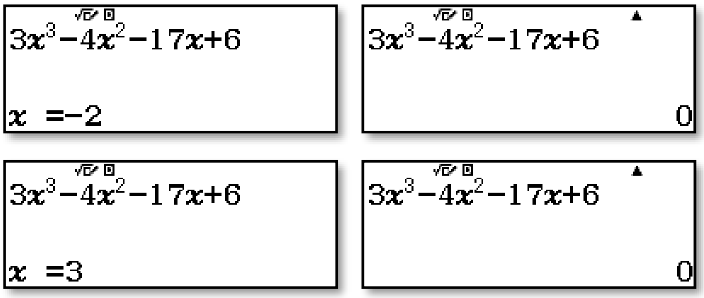

図 4　カルク機能を用いて$3x^3-4x^2-17x+6$に$x=-2$，3を入力したときの式の値

また，$x=0$を入力すると式の値が 6，$x=1$を入力すると式の値が−12 と表示されることに着目する（図 5)。

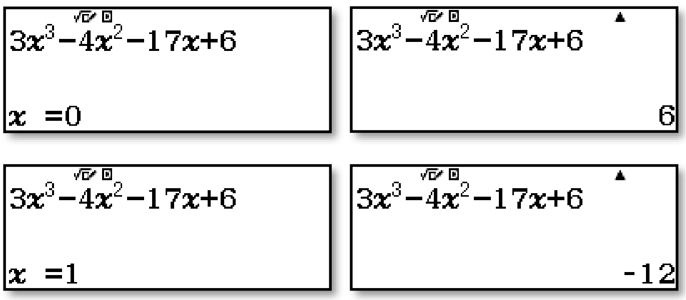

図 5　カルク機能を用いて$3x^3-4x^2-17x+6$に$x=0$，1を入力したときの式の値

式の値が正の値から負の値に変化しており，$0 \leqq x \leqq 1$にもう 1 つの実数解があることが予想することができる。さらに$x = 0.1$，0.2，…と入力すると，解の範囲を狭めることができる。よって，$3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = 0$の実数解の個数は 3 個と予想することができる。

問 2 では，まず，関数電卓に$x^3 - 3x + 2$を入力する。カルク機能を用いて，$x = -2$，1を入力すると，式の値が 0 と表示される（図 6）。

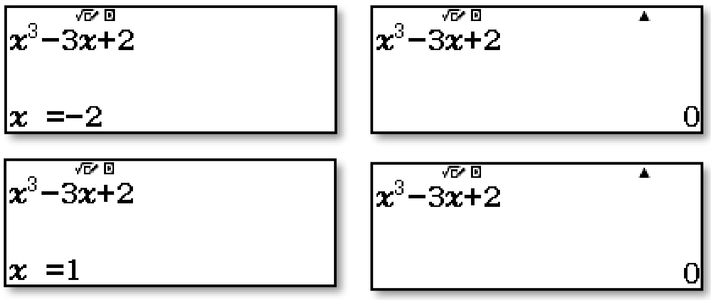

図 6　カルク機能を用いて$x^3 - 3x + 2$に$x = -2$，1を入力したときの式の値

また$x = 0.9$，1.1を入力したとき，ともに式の値が正の値をとる（図 7）。

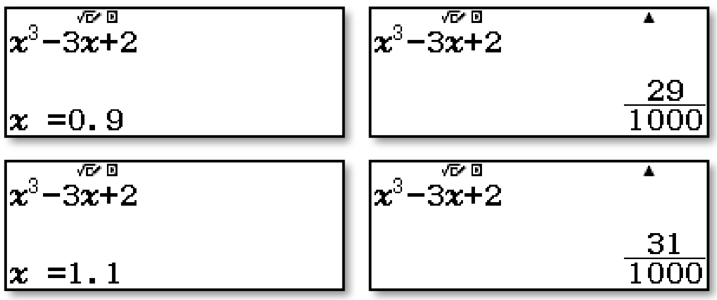

図 7　カルク機能を用いて$x^3 - 3x + 2$に$x = 0.9$，1.1を入力したときの式の値

このことから，$x = 1$が重解となることが予想できる。よって，$x^3 - 3x + 2 = 0$の実数解の個数は 2 個と予想することができる。

問 3 では，まず，関数電卓に$x^3 - 3x + 3$を入力する。カルク機能を用いて，$x = -3$を入力すると式の値が -15，$x = -2$を入力すると式の値が 1 と表示されることに着目する（図 8）。

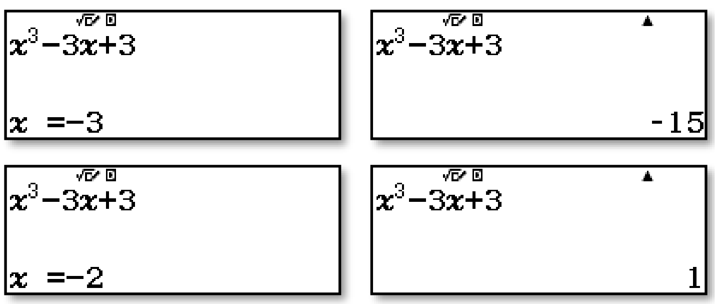

図 8　カルク機能を用いて$x^3 - 3x + 3$に$x = -3$，-2を入力したときの式の値

式の値が，負の値から正の値に変化していることから，-3 と-2 の間に 1 つの実数解があることが予想することができる。さらに$x=-2.1$や-2.2を入力すると解の範囲を狭めることができる。また，式の値は，$x \leqq -1$の範囲で増加し，$-1 \leqq x \leqq 1$の範囲で減少し，$1 \leqq x$の範囲で増加しているが，上記の実数解以外の実数解はないと予想できる。よって，$x^3-3x+3=0$の実数解の個数は 1 個と予想することができる。

２．埼玉県内公立高校での授業実践の実際

ここでは，埼玉県内公立高校での授業実践の報告をおこなう。実施日は，2021（令和 3）年 5 月 13 日であり，時間は 100 分（50 分×2 時），対象は埼玉県内公立高等学校の「数学Ⅲ」履修者 5 名である。第 1 時は，関数電卓の操作方法と例題に取り組んだ。第 2 時は，問 1～問 3 に取り組んだ。

2.1. 授業の実際（第 1 時）

ここでは，授業の実際を示す。第一時は，関数電卓の操作方法を全体で確認した。次に，因数分解を用いて例題を解き，方程式の解とは，等式を満たす x の値であることを確認した。その後，生徒 A は関数電卓を用いて，左辺のx^2-2x-3の x の値に様々な数を入力した。$x=-1$，3を入力すると，式の値 0 が表示されることを確認した（図 9）。

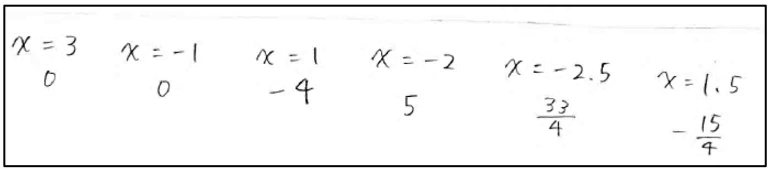

図 9　例題における生徒 A の記述

2.2. 授業の実際（第 2 時）

第二時は，問 1～問 3 に取り組んだ。まず，問 1 に関して示す。生徒 A は$x=-5$から$x=6$までの式の値を表にまとめた。その後，$0<x<1$のときの式の値に着目し，式の値が$x=0.1$，0.2，0.3のとき正，$x=0.4$のとき負であることを記述している。つまり，$x=0$，0.1，0.2，0.3，0.4，1の式の値の変化の様子を捉え，$0.3<x<0.4$ に解が存在することを予想していた（図 10）。

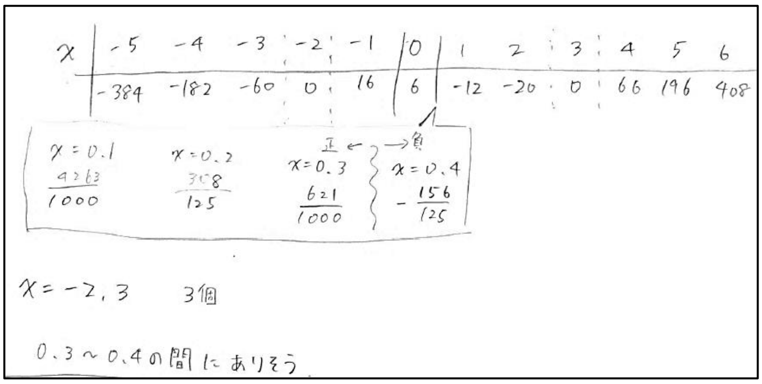

図 10　問 1 における生徒 A の記述

生徒 B は，x の値に様々な数を入力した。その後，式の値が 0 になる x の値に着目して，実数解の個数を 2 個と予想している（図 11）。

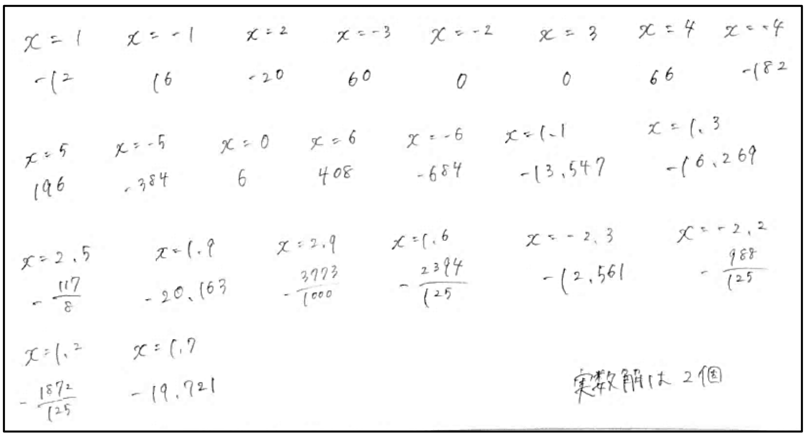

図 11　問 1 における生徒 B の記述

自力解決の後に，生徒 A の記述を全体共有した。次に，問 2 に関して示す。生徒 A は$x=-3$から$x=3$までの式の値を表にまとめた。$x^3-3x+2=0$の解である$x=-2$，1を求めたのち，式の値の増減に着目している。特に，問 1 を解いた経験から，解の 1 つである$x=1$の前後で式の値の符号が変わると予測し，解を探求している（図 12）。

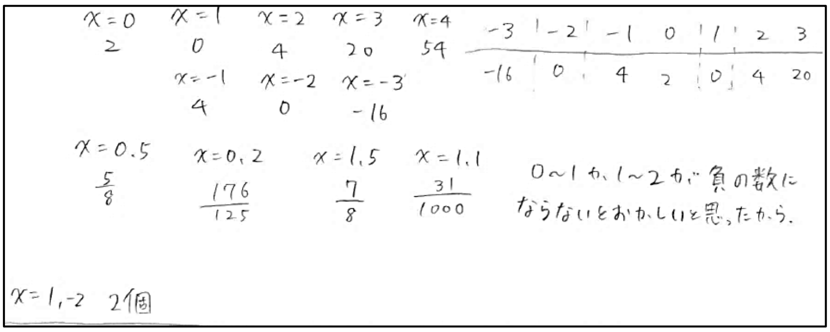

図 12　問 2 における生徒 A の記述

生徒 C は，x の値に様々な数を規則的に入力した。その後，式の値が 0 になる x の値に着目したが，$x=1$の前後で式の値が変わらないことに気付く様子はなかった（図 13）。

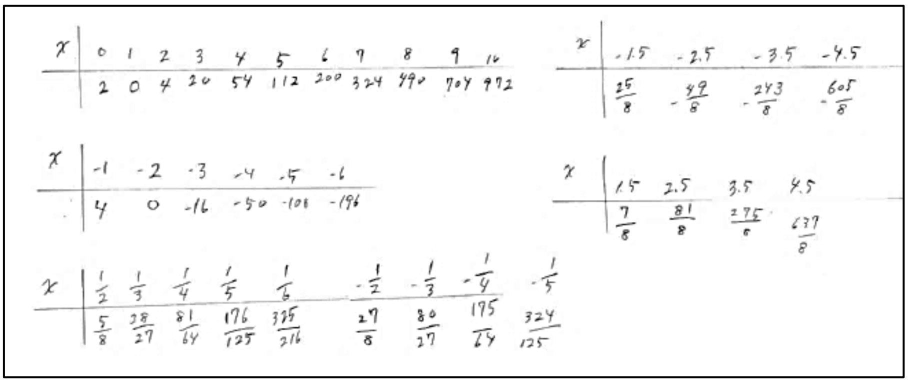

図 13　問 2 における生徒 C の記述

最後に，問 3 に関して示す。生徒 A は，複数の x の値を代入し，式の値の増減を観察している。$-3 < x < -2$の範囲で式の値が，負の値から正の値に変化していることに着目している。また, $0 < x < 1$の範囲で式の値が減少していることを確認し, $1 < x < 2$の範囲に式の値が 0 となる x の値が存在し，実数解は 2 個あると予想している（図 14)。

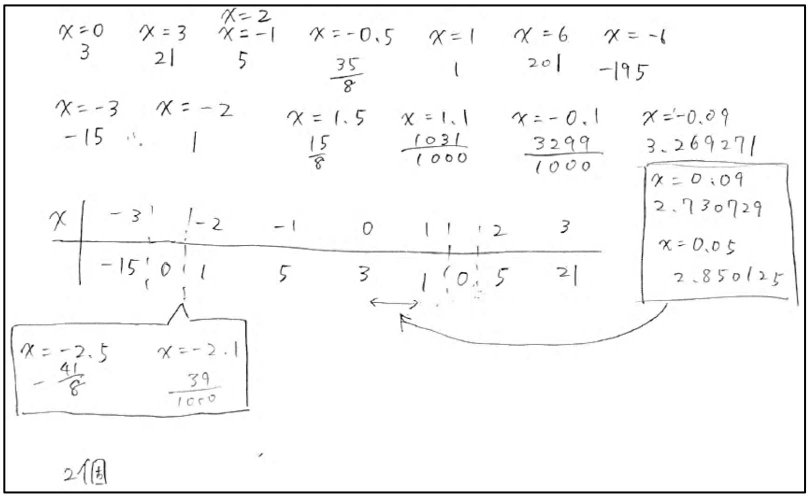

図 14　問 3 における生徒 A の記述

生徒 B は，これまでの活動を経て，x の値を小さい方から順に並べ考察していた（図 15)。

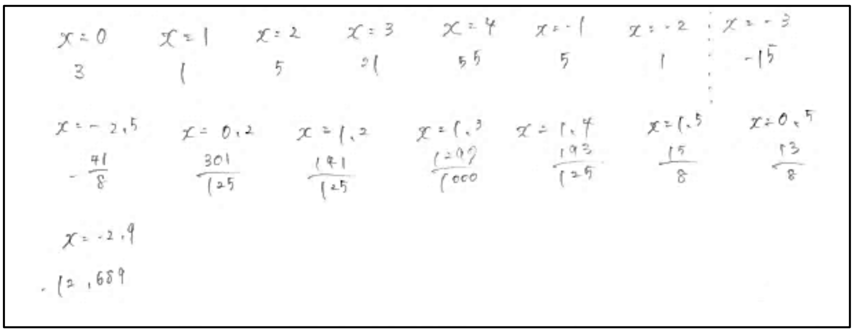

図 15　問 3 における生徒 B の記述

生徒 D は，複数の x の値を代入し，式の値の増減を観察している。$-3 < x < -2$の範囲と, $0 < x < 1$の範囲に式の値が 0 となる x の値が存在し，実数解は 2 個あると予想している（図 16)。

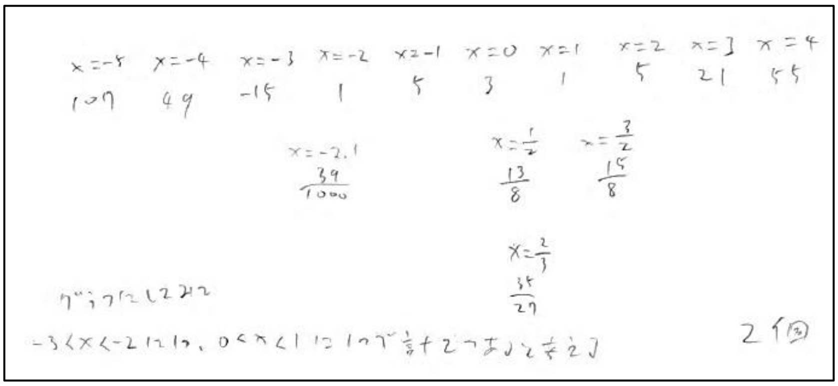

図 16　問 3 における生徒 D の記述

３．埼玉県内公立高校での授業実践を実践してみて

本授業実践では，関数電卓のカルク機能を用いて，方程式の解の個数を探求する活動をおこなった。生徒 B は，問 1 で x の値をランダムに入力し，式の値が 0 になる個数を数えている。問 2 に入る前に，生徒 A の解答を全体で共有したところ，問 3 を考察する際には，入力した x の値を小さいもの順に並べる活動が見受けられた。一方，生徒 A は問 1 の解決から式の値の符号に着目していた。これは，瞬時に式の値を求めることができる関数電卓を使用したから実現できた方法ではないだろうか。その後，問 2・3 では，式の値の増減を観察し，解の探求をおこなっていた。今後は数表作成機能等を用いた解決との比較していくことも必要となる。