産学協同プロジェクト「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」

「通し矢」の矢の軌道に着目した数学ワークショップ指導案（略案）

佐藤　陽平

実験授業の目的

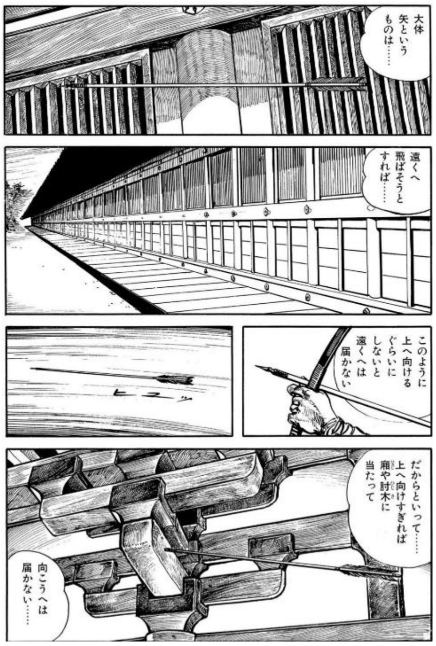
関数電卓使用を前提とした授業の中で，問題解決をおこなう際に，関数電卓によって得られた結果を意味づけ，活用している様子をワークシートから明らかにすることである。

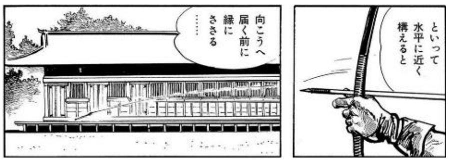
授業のねらい

漫画『弓道士魂』の場面を数理的に捉え，数学的に表現し，関数電卓を用いて問題を解決し，解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察することができる。

本時の展開（表中の　　は手計算での活動を示している。）

	学習活動	指導の手立て	留意点
導入	○「通し矢」について知る。 ・「通し矢」の由来，歴史を知る。 →「通し矢」は，平安時代末期から江戸時代にかけて三十三間堂で行われていた。「通し矢」では，約 120 m 先の的に，24 時間でどれだけ多くの矢を的にあてることができるかを競っていた。  三十三間堂の看板 ・漫画『弓道士魂』の場面を確認する。	・【資料 1】の配布 ・「通し矢」を題材とした漫画『弓道士魂』の紹介をする。	・「通し矢」に興味を持ってもらう。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

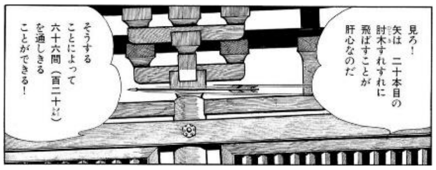
漫画『弓道士魂』の場面①


漫画『弓道士魂』の場面②

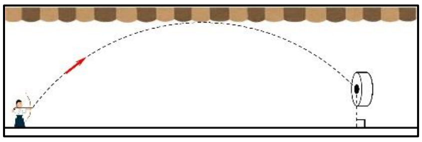
『三十三間堂通し矢図』
円山応挙（1733～1795）</td>
<td>・遠くに飛ばすためには，矢を上に向ける必要があることに触れる。

・上へ向けすぎると，肘木にあたってしまい，遠くに飛ばないことを確認する。

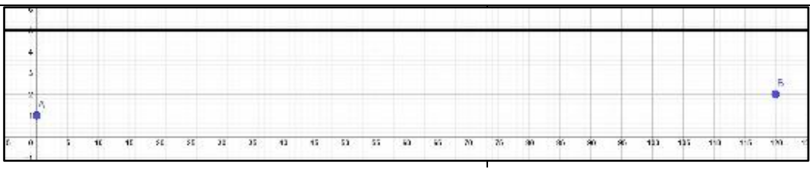
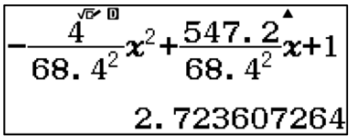
・120 m の距離を直線に近い軌道で飛ばすと届かないことを確認する。</td>
<td>・三十三間堂には，三十四本の肘木があり，肘木を目印として通し矢をおこなっていることを確認する。
・肘木があることによって，矢をどのように飛ばさなくてはならないか注意する。

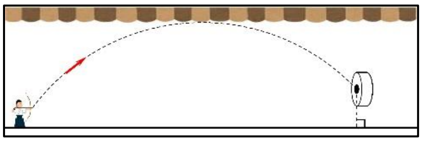
・水平近くに矢を構えると的まで届かないことは，後の問の解決をおこなう際の判断材料の1つとなるので，必ず触れる。
・的があること，縁側に座って弓を引いていることを伝える。</td>
</tr>
<tr>
<td>展開</td>
<td>〇問題となる一場面を確認する。
・二十本目の肘木すれすれに飛ばすと，120 m 通しきることを確認する。


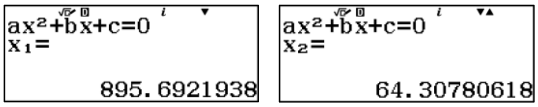
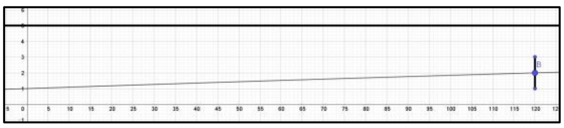
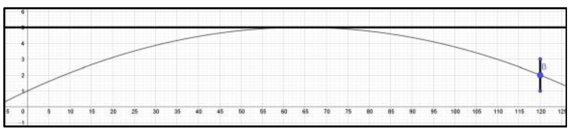
漫画『弓道士魂』の一場面</td>
<td>T：漫画には二十本目の肘木すれすれに飛ばすことが肝心って書いてあるけど本当かな？
S：本当だと思うよ
S：本当じゃないと思うけどな…</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>○問題を確認する。</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">［問 1］矢を二十本目の肘木すれすれに飛ばすとき，矢は的にあたるか確認してみましょう。</td></tr>
<tr><td></td><td>○問 1 を解決するための条件設定をおこなう。</td><td>・【ワークシート 1】の配布。</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">問題を解決する際に，必要なことは何ですか？</td></tr>
<tr><td></td><td>・問題となる漫画の一場面のモデルを確認し，矢の軌道を放物線と仮定する。

漫画の一場面のモデル

・問題解決をおこなう上で必要となる仮定，条件設定をおこなう。</td><td>T：問題を解決するためには，どんな条件が必要かな？
S：二十本目の肘木までの距離は？
S：的の大きさってどのくらい？</td><td>・授業者が問題となる漫画の一場面のモデルを提示する。
・授業者が問題場面の数学化をおこなう。</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">[仮定]
①矢の軌道は放物線とする。
②矢の発射地点を縁側から高さ 1 m の地点とする。
③肘木すれすれの高さは 5 m とする。
④肘木の間隔は 3.6 m とする。
⑤矢の発射地点から二十本目の肘木までの水平距離は 68.4 m とする。
⑥的の直径を 2 m とし，縁側から高さ 2 m の地点に的の中心がくるように設置する。</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">[条件]
1.「通し矢」の場面は横から見る。
2. 矢の発射地点から的までの距離は 120 m とする。
3. 矢の最高到達点は 5 m。
4. 射手が縁側に座っている地点を原点 O とする。
5. 矢の先端を点 P（x, y）とおく。
6. 矢の発射地点を点 A（0, 1）とする。
7. 的の中心を点 B（120, 2）とする。
8. 的を線分で表す。</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	 条件を基に数学化した「通し矢」の場面		・条件をもとに数学化した「通し矢」の場面を確認する。
	○設定した仮定と条件を用いて解決に移る。		
	・二十本目の肘木すれすれが放物線の頂点となることを確認する。	T：放物線の頂点はどこになりそうかな？	
	・仮定⑤と条件 3．より，放物線の頂点の座標を点 V（68.4, 5）と表す。	T：頂点の他に通る点はあるかな？	
	・頂点が（68.4, 5）で点 A（0, 1）を通る 2 次関数の式を求める。 $y=-\frac{4}{68.4^2}(x-68.4)^2+5$ …㋐		・㋐式を求めるまでは，授業者が先導する。
	・原点 O から 120 m 地点での，縁側から飛んでいる矢までの鉛直距離を求めるため，条件 2．より，㋐式に x＝120 を代入し，y の値を求める。 →求めた y の値から，的にあたるか確認する。	・関数電卓のカルク機能を使用する。  関数電卓のカルク機能を用いた画面	
	・仮定⑥より，矢の発射地点から 120 m の地点で，縁側から 1～3 m の間を矢が飛んでいればよいことを確認する。		・x＝120 のときの y の値が何を表しているか確認する。
	・カルク機能を用いた計算結果と仮定⑥から，二十本目の肘木を狙うと矢は的にあたることを確認する。	・的にあてるためには，二十本目の肘木すれすれを狙うことは正しいことを確認してもらう。	
	・二十本目の肘木を狙うと的の中心にはあたらないことを確認し，普通は的の中心にあてることを確認する。	T：的に矢を当てるなら，みんなら的のどこを狙う？ S：的の中心	・漫画では的の中心にあてることには触れていないことを確認する。

	○問題を確認する。	T：二十本目の肘木を狙っても的の中心にはあたらないことがわかったね。的の中心にあてるとしたら，肘木何本目に飛ばせばいいのかな？	・弓道の競技の中でも，的にあたればいい競技と，的の中心を狙う競技があることを知らせる。 ・的の中心を狙うことが出てこない場合は，ダーツやアーチェリーを例に出す。
	［問 2］矢が的の中心にあたるとき，何本目の肘木すれすれに飛ばせばよいか求めてみましょう。		
	○問題解決に向け，問題場面の数学化をおこなう。 	・【ワークシート 2】の配布。	・問題となる場面のモデルを提示する。
	・解決をおこなうために，必要な情報を整理する。 →矢の軌道が放物線で表されていること，放物線の頂点となる場所を確認する。 ○矢の発射地点と的の中心を通る 2 次関数の式を求める。 ・的の中心を点 B（120, 2）と表したときの，点 A（0, 1）と点 B（120, 2）を通る 2 次関数の式を求める。 ・2 点を定めただけでは，式は一意に定まらないことを確認する。	T：ここは通るとわかっている点ってどこがあるかな？ S：的の中心と矢の発射地点 T：2 点の座標だけで 2 次関数の式って決まる？ S：決まらない T：初期条件の中で使えるものはないかな？	・初期条件を逐一確認する。 ・まずは，2 点のみを与えた状態で進めてもらう。2 点のみでは定まらないことを確認し次第，条件の確認に移る。

	・肘木すれすれの高さが 5 m より，放物線の頂点の y 座標が 5 となることを確認する。 ・放物線の頂点を V（F, 5）とし，矢が的の中心である点 B（120, 2）を通るときの F の値を求める。 $\mathrm{F}^2 - 960\mathrm{F} + 4 \times 120^2 = 0$ …㋑ ・㋑式の計算をすると，頂点の x 座標が 895.69 と 64.31 の 2 つが出現する。 ○頂点の x 座標について，解の吟味をおこなう。	 関数電卓の高次方程式機能を用いた画面 ・関数電卓の高次方程式機能を使用する。	
	どちらの数値が問題に合致しているでしょうか。理由も含めて記述してください。		
	・【資料 1】の漫画の場面を再確認し，漫画の内容に合致するのはどちらのグラフか理由も含めて記述する。 ・頂点の x 座標が 895.69 の場合と 64.31 の場合の 2 つの数値がどういうことを表しているのか，考察する。  頂点の x 座標が 895.69 のグラフ  頂点の x 座標が 64.31 のグラフ	T：解が 2 つ出てきたけど，2 つとも答えでいいかな？ S：よくない？	・グラフ描画ソフトウエアを用いて，2 種類のグラフを提示する。
	・実際に 120 m の距離を飛ばすときに直線に近い軌道で飛ばすことができるかを踏まえて考察する。 ・頂点の x 座標は 64.31 が漫画の内容に合致することを確認する。	T：120 m の距離を人力でものを飛ばすときって軌道はどうなるべきかな？	・120 m の距離を飛ばすという点，人力という点を考慮する。 ・矢の発射地点から

<table>
<tr>
<td></td>
<td>○矢を的にあてるためには，二十本目の肘木でなくてもよいことを確認する。
・仮定④より，矢の発射地点から 64.31 m は二十本目の肘木ではないことを確認する。
・的にあてるためには二十本目の肘木でなくてもよいことを確認する。

○問題を確認する。</td>
<td>T：的にあてるためには絶対二十本目の肘木じゃないとダメなのかな？
S：そんなことなさそう。
T：的にあてるためには他に何本目の肘木すれすれに飛ばせばよいか求めてみよう。</td>
<td>64.31m は，十八本目と十九本目の肘木の間である。</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="3">［問 3］矢が的にあたるとき，二十本目の肘木以外では，何本目の肘木すれすれに飛ばせばよいか求めてみましょう。</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>○問題解決に向け，問題場面の数学化をおこなう。
・肘木すれすれを通るところが放物線の頂点になることを確認する。
・放物線の頂点を点 V とし，点 V の x 座標を F とする。原点 O から 120 m 地点での，縁側から飛んでいる矢までの鉛直距離を求めるため，$x=120$ のときの y 座標の値を求める。
・仮定⑥より，$x=120$ のときの y の値が $1 \leqq y \leqq 3$ を満たすような F の値を求める。

○問題解決に移る。
・2 点 V（F, 5），点 A（0, 1）を通る 2 次関数の式を求め，$x=120$ を代入する。
$y=-\frac{4}{\mathrm{F}^2}\times 120^2+\frac{8\times 120}{\mathrm{F}}+1$ …㋒</td>
<td>・【ワークシート 3】の配布。

・何本目の肘木かを求めるために，放物線の頂点の x 座標の値を変化させればよいことに気づいてもらう。</td>
<td>・問題となる場面のモデルを提示する。

・関数電卓では A，B，C，D，E，F，x，y しか入力できないため，F を用いる。</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>・㋒式の F に値を入力する。その際，二十一本目の肘木までの距離，十九本目の肘木までの距離，…，のように入力する。
→二十一本目…72.0 m
十九本目…64.8 m
十八本目…61.2 m
十七本目…57.6 m

$-\frac{4}{F^2}\times 120^2+\frac{8\times 120}{F}+1$
3.222222222
二十一本目の計算結果

$-\frac{4}{F^2}\times 120^2+\frac{8\times 120}{F}+1$
2.09739369
十九本目の計算結果

$-\frac{4}{F^2}\times 120^2+\frac{8\times 120}{F}+1$
1.30757401
十八本目の計算結果

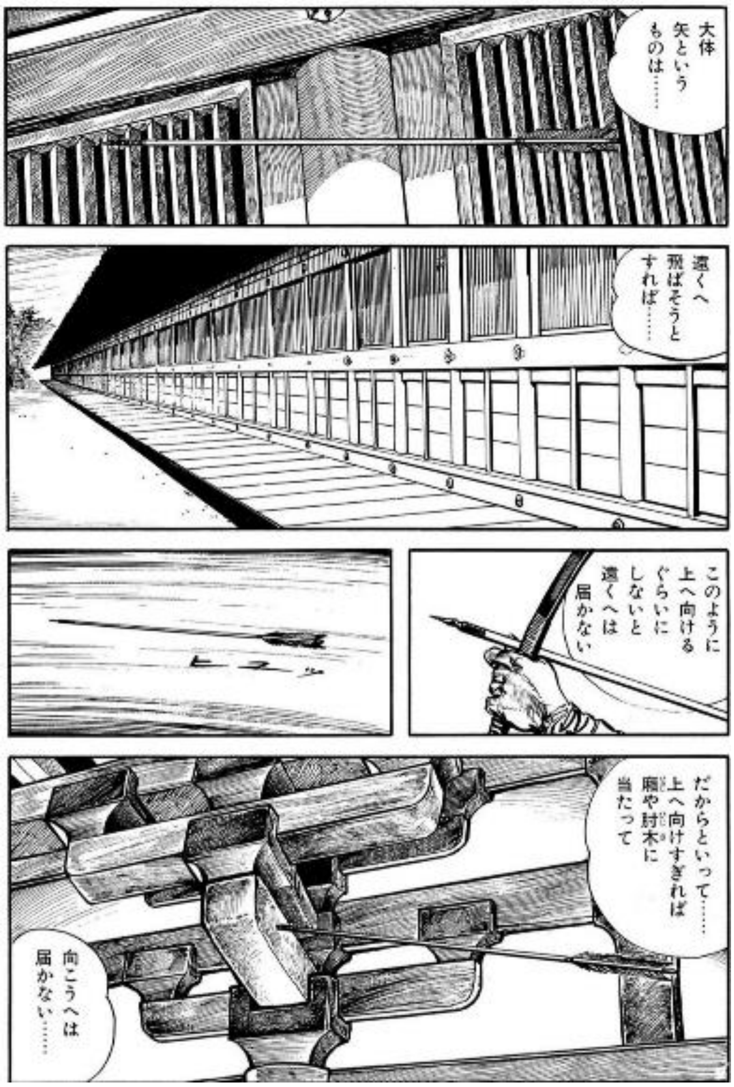
$-\frac{4}{F^2}\times 120^2+\frac{8\times 120}{F}+1$
0.3055555556
十七本目の計算結果

・二十一本目の計算結果と十七本目の計算結果は$1 \leqq y \leqq 3$を満たしていないことを確認する。</td>
<td>・関数電卓のカルク機能を使用する。

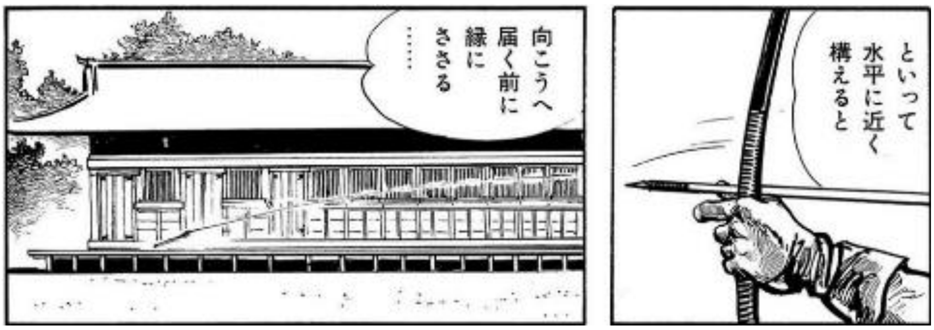
T：二十一本目までの肘木の距離っていくつになるかな？
T：初期条件を用いて求められないかな？</td>
<td>・適当に数字を入力するのではなく，仮定④と⑤を確認し，値を決める。
・二十本目までの肘木の距離をもとに二十一本目までの肘木の距離を求めることで，生徒が十九本目，十八本目，・・・を求める手助けをする。
・$1 \leqq y \leqq 3$をみたさないということは，的にあたらないということを再確認してもらう。</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">まとめ</td>
<td>○本時の振り返りをおこなう。</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">今回，「通し矢」を題材とした問題を解決するにあたり，様々な仮定・条件を設定しました。今回設定した仮定・条件をもう一度自身で見直してみて，関数電卓を用いて改めて問題を解決してみてください。その際，どんな仮定・条件を設定したかを書いてください。また，今回使用した仮定・条件を使用したり，変更した際は，□の中にチェックを入れてください。</td>
</tr>
<tr>
<td>・今回設定した仮定・条件をもう一度見直してもらう。
・問 1 のみもう一度解決してもらう。
・仮定・条件は自由に設定してもらう。</td>
<td>・【ワークシート 4】の配布</td>
<td>・特に変更する条件がない場合は，授業内で設定した仮定・条件で問題解決をおこなってもらう。</td>
</tr>
</table>

【資料 1】

『三十三間堂通し矢図』
円山応挙（1733〜1795）



漫画『弓道士魂』の場面



漫画『弓道士魂』の場面②

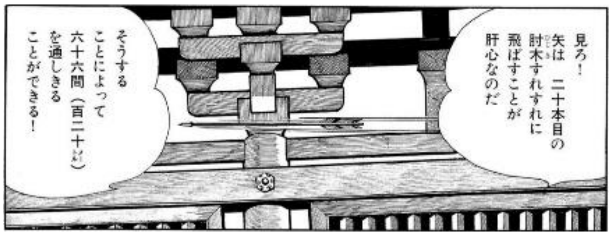
引用・参考文献

平田弘史（2006）『完全版弓道士魂－京都三十三間堂通し矢物語－』松文館

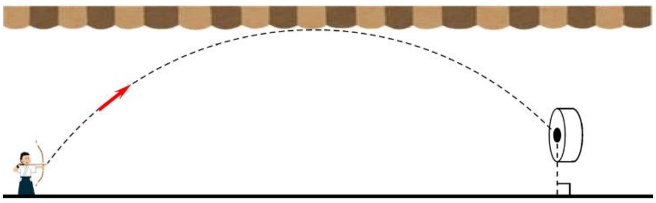
円山応挙（1733~1795）『三十三間堂通し矢図』文化遺産オンライン
https://bunka.nii.ac.jp/heritages/detail/379127（2021. 8. 31 最終確認）

【ワークシート 1】

［問 1］矢を二十本目の肘木すれすれに飛ばすとき，矢は的にあたるか確認してみましょう。



問題解決をする際に，必要なことは何ですか？



関数電卓を用いて［問 1］を解いてみて，わかったことや気づいたことは何ですか？

【ワークシート 2】

[問 2] 矢が的の中心にあたるとき，何本目の肘木すれすれに飛ばせばよいか求めてみましょう。

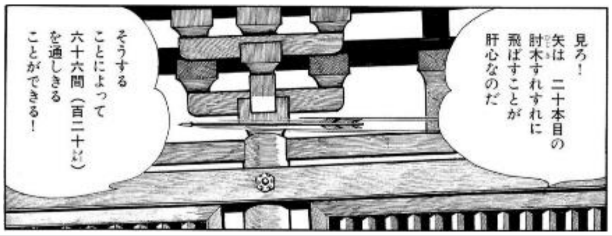
【ワークシート3】

［問3］矢が的にあたるとき，二十本目の肘木以外では，何本目の肘木すれすれに飛ばせばよいか求めてみましょう。

【ワークシート4】

今回，「通し矢」を題材とした問題を解決するにあたり，様々な仮定・条件を設定しました。今回設定した仮定・条件をもう一度自身で見直してみて，関数電卓を用いて改めて問題を解決してみてください。その際，どんな仮定・条件を設定したかを書いてください。また，今回使用した仮定・条件を使用したり，変更した際は，☐ の中にチェックを入れてください。

［問 1］矢を二十本目の肘木すれすれに飛ばすとき，矢は的にあたるか確認してみましょう。



- ☐「通し矢」の場面を横から見ている。
- ☐ 矢の発射地点から的までの距離は 120 ｍとする。
- ☐ 矢の最高到達点は 5 ｍ。
- ☐ 射手が縁側に座っている地点を原点 O とする。
- ☐ 矢の先端を点 P（x，y）とおく。
- ☐ 矢の発射地点を点 A（0，1）とする。
- ☐ 的の中心を点 B（120，2）とする。
- ☐ 的を線分で表す。
- ☐ 矢の軌道を放物線とする。
- ☐ 矢の発射地点を縁側から高さ 1 ｍの地点とする。
- ☐ 肘木すれすれの高さは 5 ｍとする。
- ☐ 肘木の間隔は 3.6 ｍとする。
- ☐ 矢の発射地点から二十本目の肘木までの水平距離は 68.4 ｍとする。
- ☐ 的の直径を 2m とし，縁側から高さ 2m の地点に的の中心がくるように設置する。

自身で設定した仮定・条件があれば書いてください。個数に限りはありません。

- ☐
- ☐
- ☐