産学協同プロジェクト「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」

対数目盛を用いた線形変換に関する数学ワークショップ指導案（略案）

棚澤　日菜子

実験授業の目的

米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題 SAT math test Question 4 of 28 をもとに，関数電卓を用いて，次の 2 点について明らかにすることである：学生らが，自身が点をプロットした片対数グラフと，関数電卓（カシオ計算株式会社 fx-JP900-N）の「統計計算」モードによる回帰計算の結果をもとに，*y* 軸を対数目盛に変更したことで，曲線で表されていたグラフの変化をどのように予想したのか，学生らはどのような根拠をもとに線形であるとみなしたのか。

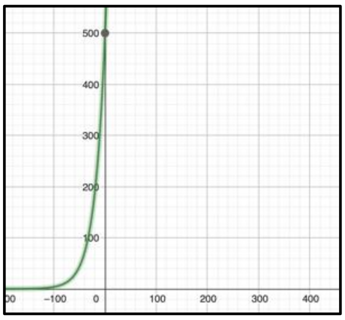
授業のねらい

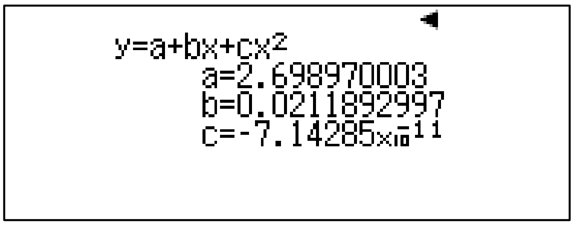
学生らが，自身が点をプロットした片対数グラフと，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算の結果をもとに，*y* 軸を対数目盛に変更したことで，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想することができる。また，線形であるとみなすために必要な根拠は何かについて考察することができる。

本時の展開

第 1 時

<table>
<tr><th></th><th>学習活動</th><th>指導の手立て</th><th>留意点</th></tr>
<tr><td rowspan="2">導入</td><td>・米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題である SAT math test Question 4 of 28 の内容を把握する。</td><td></td><td>・プレゼンテーションソフトを用いて，問題の内容を説明する。</td></tr>
<tr><td colspan="3">SAT math test Question 4 of 28
Alison deposits $500 into a new savings account that earns 5 percent interest compounded annually. If Alison makes no additional deposits or withdrawals, how many years will it take for the amount in the account to double?
選択肢　A：14　B：15　C：19　D：20　E：21
問題：
アリソンは 500 ドルを，年 5%の複利で利息がつく新しい普通預金口座に預けました。もし，アリソンが預金を追加したり引き出したりしない場合，口座の残高が 2 倍になるには何年かかるでしょうか？</td></tr>
</table>

	・口座の残高が 2 倍になるということは，口座の残高が 1000 ドルになるということを確認する。 ・選択肢 A〜E のうち，どれが正解かを予想する。	T：口座残高が 1000 ドルになるのに，何年くらいかかると思いますか？選択肢 A〜E のうち，正解だと思うものに手をあげてみてください。	
展開	・年数を x，口座の残高を y とすると，口座の残高を求める式は $y = 500\times(1.05)^x$ ・$y = 500\times(1.05)^x$（x：0 以上の整数）で表される口座の残高の指数関数のグラフを確認する。 ・指数関数のグラフでは，x が 1 増加することに伴う y の増加量が大きいため，グラフが見づらいことを確認する。 ・口座の残高である y の値の常用対数をとる。 ・「指数関数のグラフでは，x が 1 増加することに伴う y の増加量が大きい」という問題を解決するために，口座の残高額である y の値の常用対数をとる。	・現在〜3 年後の口座の残高の求め方を確認し，$y = 500\times(1.05)^x$（x：0 以上の整数）になっていることを学生と一緒に確認する。 ・実際に，グラフを表示する。  ・学生が，口座の残高額である y の値の常用対数をとる時間を確保する。 ・y の値の常用対数をとる際には，関数電卓の「基本計算」モードを使用するよう指示する。 ・最低でも 8 年分の y の値の常用対数をとるよう指示する。	・プレゼンテーションソフトを用いて，グラフを表示する。

	○x と y の値の常用対数をもとに，片対数グラフに点をプロットする。 ○x の値と y の値をもとに，点をプロットした片対数グラフをもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想する。 ・予想したこと，気付いたことをワークシート（【資料1】）に記述する。 ○関数電卓の「統計計算」モードによる2変数（x , y）2次回帰計算 ($y = a + bx + cx^2$) の結果もとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想する。 ・予想したこと，気付いたことをワークシート（【資料2】）に記述する。	・片対数グラフとワークシート（【資料1】）を配布する。 ・ワークシート (【資料2】) を配布する。  回帰計算結果が一覧表示されたときの関数電卓画面	

第2時

	学習活動	指導の手立て	留意点
導入	○前時の振り返りをおこなう。 ・x の値と y の値をもとに，点をプロットした片対数グラフをもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのか。	T：x の値と y の値をもとに，点をプロットした片対数グラフをもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化したと予想しましたか。 S1：直線 S2：直線っぽいグラフ	

	・関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）の結果もとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのか。	S3：ほぼ直線 T：関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）の結果をもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化したと予想しましたか。 S1：直線っぽいグラフ S2：ほぼ直線にみえる放物線 S3：直線に近い曲線？	
展開	○y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフが線形であるとみなせるというためには，どのようなことを根拠にすればよいか，点をプロットした片対数グラフやデータの並び，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）の結果，ワークシートの記述内容をもとに，線形であるとみなすための根拠について考察する。 ・片対数グラフに点をプロットすると，線形になっているように見えることを根拠として線形とみなす。 ・x の値と，$\log_{10}y$ の値に着目すると，$\log_{10}y$ の値の増加量がほぼ一定である。このことから，変化の割合もほ	T：y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフが線形であるとみなせるというためには，どのようなことを根拠にすればよいでしょうか。点をプロットした片対数グラフやデータの並び，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）の結果，ワークシートの記述内容をもとに，線形であるとみなすための根拠について考察してみましょう。 ・ワークシート（【資料 3】）を配布する。	・近くの席の学生同士で考えを共有して良いことを伝える。

ぼ一定となるため，x の値と，$\log_{10}y$ の値の変化の割合が一定であることを根拠として線形とみなす。

・関数電卓の「統計計算」モードを用いて，2 変数（x , y）2 次回帰計算をおこない，出力結果をもとに，x^2 の係数（c の値）に着目すると，-7.14285×10^{-11} であり，限りなく 0 に近い値となっている。

出力結果をもとに，2 次関数で表すと，以下のような式になる。

$$\log_{10}y = -7.14285\times10^{-11}x^2 + 0.0211892997x + 2.698970003$$

このことから x^2 の係数（c の値）が，-7.14285×10^{-11} であり，限りなく 0 に近い値であることを根拠として線形とみなす。

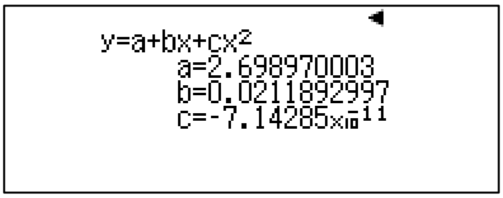
・曲線で表されていたグラフが線形であるとみなすための根拠について，考えたことを発表し，全体に共有する。

○y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフが線形とみなせることを確認する。

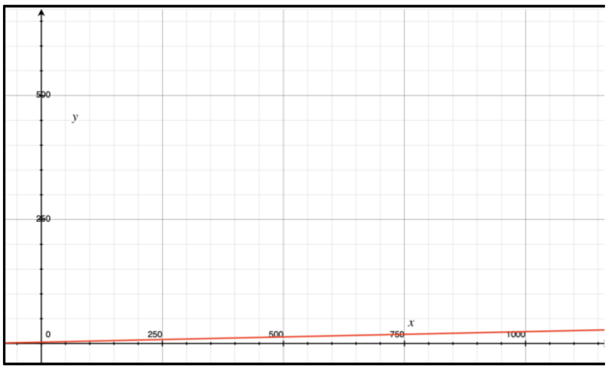
○線形で表された口座の残高を求める式で求めた解答と，指数関数で求めた解

x の値，$\log_{10}y$ の値，$\log_{10}y$ の値の増加量をまとめた表

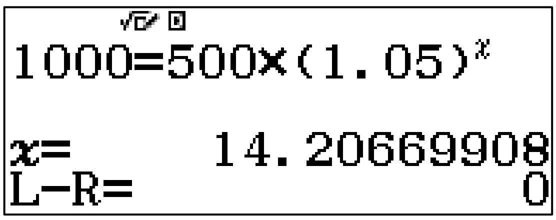
x	$\log_{10}y$ の値	$\log_{10}y$ の値の増加量
1	2.720159303	—
		0.021189299
2	2.741348602	
		0.021189300
3	2.762537902	
		0.021189299
4	2.783727201	
		0.021189299
5	2.8049165	
		…
…	…	



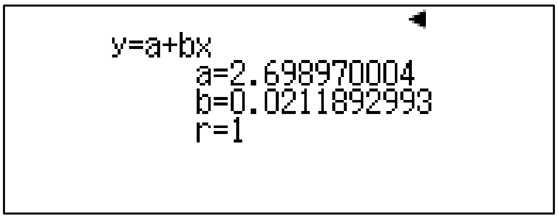
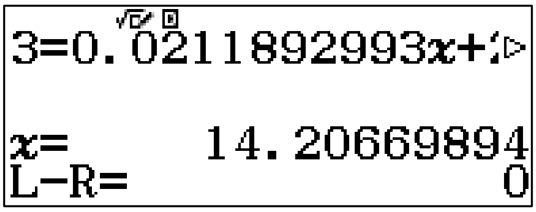
関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x, y）2 次回帰計算の結果



2 次関数 $\log_{10}y = -7.14285\times10^{-11}x^2 + 0.0211892997x + 2.698970003$ のグラフ



指数関数 $y = 500\times(1.05)^x$ で求めた解答

	答が同じになっているかを確認する。 ・関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）2 次回帰計算の結果より，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフが線形変換され，線形とみなすことができる。これより，2 変数（x , y）1 次回帰計算をおこない，線形変換された口座残高を求める関数を式で表す。 $\log_{10}y = 0.0211892993x$ $+2.698970004$…（＊） ・口座の残高が 2 倍になる年数を求めるため，関数電卓の「基本計算」モードのソルブ機能を用いて，式（＊）の y に 1000 を代入する。 →$x = 14.20669894$ と表示されるため，口座の残高が 2 倍になるのは 15 年後である。よって正しい選択肢は B となる。	 関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）1 次回帰計算の結果  式（＊）の y に 1000 を代入し，$x = 14.20669894$ と表示された後の関数電卓画面	
まとめ	○［課題］を確認する。 ［課題］ 直線であるとみなすための根拠のうち，最も必要であると考える根拠を 1 つ選び，その理由を記述しなさい。	・課題シート（【資料 4】）	

【資料 1】

x の値と，y の値をもとに，片対数グラフに点をプロットしなさい。また，プロットした点をもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想し，その内容を記述しなさい。

【資料 2】

関数電卓の「統計計算」モードを用いて，2 変数 2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）をおこない，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想し，その内容を記述しなさい。

【資料 3】

y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフが直線であるとみなせるというためには，どのようなことを根拠にすればよいか。点をプロットした片対数グラフやデータの並び，関数電卓の「統計計算」モードを用いておこなった 2 変数 2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）の結果，ワークシートの記述内容をもとに，直線であるとみなすための根拠について考え，その内容を記述しなさい。

【資料 4】

直線であるとみなすための根拠 3 つのうち，最も必要であると考える根拠を 1 つ選び，その理由を記述しなさい。