**แผนการจัดการเรียนรู้**

# รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

# หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันกำลังสอง

# เรื่อง สมการและกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง เวลา 50 นาที

# 

**ตัวชี้วัด**

ใช้ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันอธิบายสถานการณ์ที่กำหนด

**สาระสำคัญ**

ฟังก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป เมื่อ และ เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันกำลังสองขึ้นอยู่กับ และ โดยเมื่อ เป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบ จะทำให้ได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือคว่ำลง โดยกราฟของฟังก์ชันกำลังสองมีชื่อเรียกว่า พาราโบลา

**วัตถุประสงค์การเรียนรู้**

1. ทบทวนและเสริมความเข้าใจเกี่ยวกับสมการกำลังสองและกราฟของสมการกำลังสองที่ได้ศึกษาไปก่อนหน้า

2. พิจารณาเงื่อนไขที่ใช้ได้กับการโยนลูกบาสเกตบอล คำนวณสมการพาราโบลา และตรวจสอบวิถีโค้งในอุดมคติสำหรับการโยนลูกบาสเกตบอล

**สรุปหัวข้อ**

* พิจารณาพาราโบลาที่ผ่านจุดสองจุดเพื่อให้เข้าใจว่า เราไม่สามารถกำหนดสมการพาราโบลาโดยใช้พิกัดจุดเพียงแค่สองจุดได้
* ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์เพื่อยืนยันว่าสมการพาราโบลาสามารถกำหนดได้โดยใช้จุดสามจุด
* พิจารณาเงื่อนไขที่ใช้ได้กับการโยนลูกบาสเกตบอล และหาเงื่อนไขที่สามารถใช้ได้กับพาราโบลา
* ใช้ตัวอย่างวิถีโค้งของการโยนลูกบาสเกตบอล เพื่อคำนวณสมการตามเงื่อนไขที่กำหนด
* หาจุดยอดหลายจุดที่ตรงตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ และพิจารณาว่าจุดใดเป็นจุดที่เหมาะสม

**สื่อการเรียนรู้**

เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ แอปพลิเคชัน CLASSWIZ และใบกิจกรรม

**กระบวนการจัดการเรียนรู้**

บทนำ

ผู้สอนให้ผู้เรียนลองนึกถึงปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในโลกรอบตัวเราที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันกำลังสองให้ได้มากที่สุด

* การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (วิถีโค้งของลูกบอล, วิถีโค้งของน้ำพุ ฯลฯ)
* ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและระยะทางที่วัตถุตกลงมา (y = gt2)
* เสาอากาศพาราโบลา
* ระยะเบรก (ระยะทางที่เครื่องยนต์เคลื่อนที่ก่อนที่จะหยุดสนิทเมื่อเหยียบเบรก)
* ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานจลน์กับความเร็ว (E = mv2)
* ความสัมพันธ์ระหว่างคาบของลูกตุ้มกับความยาวของลูกตุ้ม

ปัญหา

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของการโยนลูกบาสเกตบอล ดังภาพข้างล่าง

ลูกบอลถูกโยนจากจุดที่สูงจากพื้น 2 เมตร ผ่านเข้าห่วงซึ่งอยู่ห่างออกไป 4 เมตร ที่มีความสูง 3 เมตร

พิจารณาพาราโบลานี้บนระนาบ XY โดยให้ (0, 2) เป็นจุดที่ลูกบาสเกตบอลถูกโยน และ (4, 3) เป็นจุดที่เป็นตำแหน่งของห่วง โดยไม่สนใจขนาดของลูกบาสเกตบอลและห่วง

ผู้สอนให้ผู้เรียนลองคิดเกี่ยวกับสมการพาราโบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการโยนเหล่านี้ และตรวจสอบว่าวิถีการเคลื่อนที่ควรเป็นแบบใด 

**กิจกรรมที่ 1 – การตรวจสอบพาราโบลาที่ผ่านจุดสองจุด**

ผู้สอนให้ผู้เรียนลองคิดเกี่ยวกับพาราโบลาที่ผ่านจุด (0, 2) และจุด (4, 3) ซึ่งเป็นวิถีการโยนที่เป็นไปได้ โดยเริ่มจากให้ผู้เรียนวาดพาราโบลาด้วยมือเปล่าダイアグラム

自動的に生成された説明

* ผู้สอนให้ผู้เรียนแสดงภาพวาดของตนกับผู้เรียนคนอื่นๆ และชี้ให้เห็นว่ามีพาราโบลาหลายแบบที่เป็นไปได้

สำหรับเส้นตรง สมการเส้นตรงสามารถหาได้จากจุดสองจุด ผู้สอนให้ผู้เรียนลองคิดว่าสมการพาราโบลาที่ผ่านจุดสองจุด สามารถหาได้ในทำนองเดียวกันกับสมการเส้นตรงหรือไม่ (ผู้สอนถามคำถามกับผู้เรียน)

* ผู้สอนช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจว่ามีพาราโบลามากมายนับไม่ถ้วนที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนด ไม่ได้มีเพียงพาราโบลาเดียว จากนั้นให้ผู้เรียนคิดต่อว่า จะสามารถกำหนดพาราโบลาโดยใช้จุดสามจุดได้หรือไม่ (ผู้สอนถามคำถามกับผู้เรียน)
* เราสามารถหาสมการพาราโบลาเพียงหนึ่งเดียวได้จากจุดสามจุด โดยจะยืนยันความเข้าใจนี้ในกิจกรรมที่ 2

**กิจกรรมที่ 2 – การสร้างพาราโบลาที่ผ่านจุดสามจุด**

(1) เลือก 2 ตัวแปร (2-Variable) ในโหมดสถิติของเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ และป้อนค่าพิกัด (0, 2), (4, 3) และสุ่มเลือกจุดที่สาม จากนั้น หาสมการสำหรับฟังก์ชันกำลังสองและตรวจสอบรูปร่างทั่วไปของกราฟ

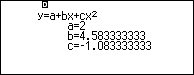
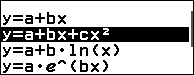
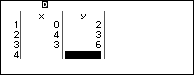
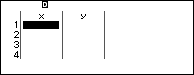
กดปุ่ม w, เลือก [สถิติ (Statistics)], |, เลือก [2 ตัวแปร (2-Variable)], |

ในตาราง ให้ป้อนค่า (0, 2) บนบรรทัดแรก (4, 3) บนบรรทัดที่สอง และสุ่มเลือกจุดที่สามเพื่อป้อนค่าในบรรทัดที่สาม ตัวอย่างเช่น ป้อนค่า (3, 6) เป็นจุดที่สาม

ป้อนค่าพิกัดของทั้งสามจุด, B, เลือก [Reg Results]

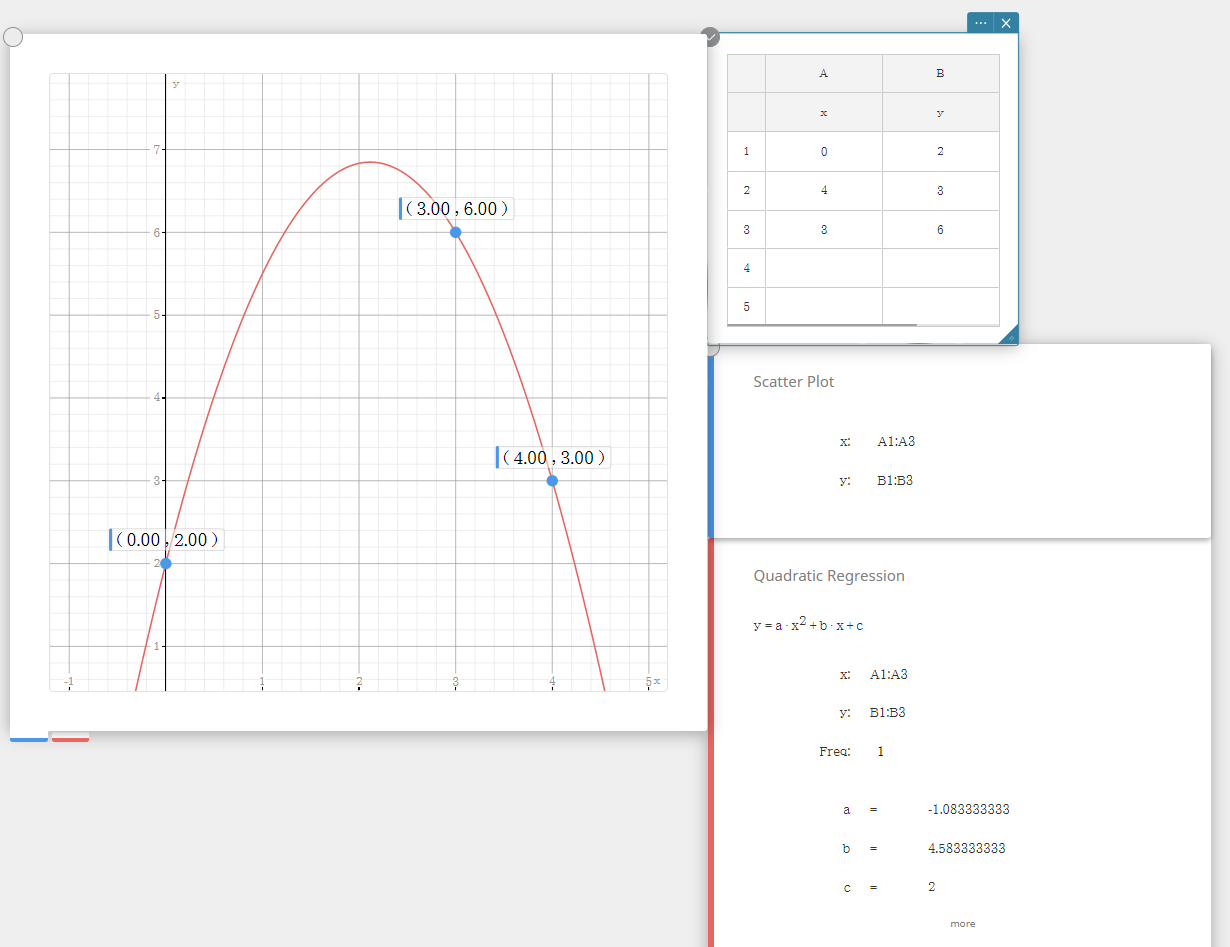
เลือก [y=a+bx+cx2], |, สมการของฟังก์ชันกำลังสองที่ผ่านจุดทั้งสามจะถูกคำนวณ

`, q[, สแกน QR Code เพื่อแสดงรูปกราฟ









(2) หาสมการของฟังก์ชันกำลังสองที่ผ่านจุดที่สามอื่นๆ ที่ไม่ใช่จุดในข้อ (1) จากนั้นให้ยืนยันรูปร่างทั่วไปของกราฟของสมการดังกล่าว

※ การตรวจสอบจุดที่สามจุดใหม่ในข้อ (2) สามารถทำได้ง่ายโดยใช้การป้อนค่าต่อไปนี้บน ClassPad.net เลือกและลบพิกัดเดิมของจุดที่สามที่ถูกป้อนค่าในข้อ (1) จากนั้นให้ป้อนค่าใหม่ลงไป สมการและกราฟใหม่จะถูกสร้างขึ้น





(3) ยืนยันว่ากราฟของพาราโบลาสามารถกำหนดได้โดยใช้จุดสามจุด

* รูปร่างของพาราโบลาสามารถเป็นได้หลายแบบขึ้นอยู่กับจุดที่สาม ผู้เรียนควรเข้าใจว่าเราจำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขที่เหมาะสมต่อวัตถุประสงค์ของเรา 

　　→ เราจะพิจารณาสิ่งนี้ในกิจกรรมที่ 3

ต่อไป ให้ผู้เรียนคิดเกี่ยวกับพิกัดของจุดที่สาม นอกเหนือไปจากจุดเริ่มต้นและจุดเป้าหมาย ที่จะทำให้การโยนลูกบาสเกตบอลได้ดี (ผู้สอนถามคำถามกับผู้เรียน)

* หากรู้พิกัดของจุดยอดของพาราโบลา ผู้เล่นจะสามารถเล็งเป้าไปที่จุดนั้นได้เมื่อโยนลูกบาสเกตบอล

→ ผู้เรียนจะได้ทราบว่า พาราโบลาควรมีจุดยอดแบบใดในกิจกรรมที่ 4 และ 5



**กิจกรรมที่ 3 – การพิจารณาเงื่อนไขสำหรับวิถีการโยนลูกบาสเกตบอล**

เพื่อความสะดวก เราจะพิจารณาจุดยอดของพาราโบลา กำหนดให้ (p, q) เป็นจุดยอดดังกล่าว เราจะใช้สัญลักษณ์นี้ในการพิจารณาเงื่อนไขของสมการพาราโบลาที่เกี่ยวข้องกับจุดยอดนี้

ทบทวนสมการของฟังก์ชันกำลังสอง (พาราโบลา) ที่ผ่านพิกัดของจุดยอด (p, q)

ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนสมการนี้ลงในใบกิจกรรม

* y = a(x-p)2+q

จากที่ได้เห็นในกิจกรรมที่ 2 เราสามารถหาสมการพาราโบลาได้จากจุดสามจุด แต่สมการพาราโบลาบางสมการไม่เหมาะที่จะเป็นวิถีของการโยนลูกบาสเกตบอลลงห่วง ลองให้ผู้เรียนคิดเกี่ยวกับเงื่อนไขที่เหมาะสมของวิถีการเคลื่อนที่ผ่านห่วง

* อันดับแรก ให้ผู้เรียนคิดว่ามีเงื่อนไขอะไรบ้างสำหรับพาราโบลา y = a(x-p)2+q ที่ผ่านจุด (0, 2) และ (4, 3) ที่จะเป็นวิถีการเคลื่อนที่ของลูกบาสเกตบอล (อาจให้ผู้เรียนอภิปรายกันในกลุ่ม)

ทิศทางของพาราโบลา (ค่าของ a)

* พาราโบลาจะต้องมีลักษณะคว่ำลง (ถึงแม้ลูกบาสเกตบอลจะถูกโยนในทิศลง ก็เป็นไปไม่ได้ที่จะมีจุดยอดที่ฐานของพาราโบลา) → **a < 0**
* ถ้า a > 0 จะได้ว่า พาราโบลามีลักษณะหงายขึ้น ซึ่งไม่สอดคล้องกับสิ่งที่เราต้องการ

จุดยอด (p, q) ของพาราโบลา

* ในการโยนลูกบาสเกตบอลผ่านห่วง ลูกบาสเกตบอลจะต้องมาถึงห่วงในระหว่างที่กำลังเคลื่อนที่ลง ไม่ใช่ในระหว่างที่กำลังเคลื่อนที่ขึ้น
* พิกัด y ของจุดยอด: จะต้องสูงกว่า 3 เมตร → **3 < q**
* พิกัด x ของจุดยอด: จะอยู่หน้าห่วง → 0 < p < 4
* ในความเป็นไปได้ต่อไปนี้ ตำแหน่งของจุดยอด (ค่า p) ควรอยู่ที่ใด

1. ใกล้กว่าจุดกึ่งกลางระหว่างจุดที่โยนบอลกับห่วง → 0 < p < 2
2. ที่จุดกึ่งกลางระหว่างจุดที่โยนบอลกับห่วง → p = 2
3. เลยจุดกึ่งกลางระหว่างจุดที่โยนบอลกับห่วง → 2 < p < 4

→ เนื่องจากพาราโบลามีลักษณะสมมาตรซ้ายขวา ดังนั้น ลูกบอลจะไปไม่ถึงห่วงด้วยเงื่อนไข (1) หรือ (2)

นั่นคือ **2 < p < 4**

**กิจกรรมที่ 4 – การพิจารณาตัวอย่างของวิถีการโยนลูกบอล**

เพื่อเป็นการทดสอบ ให้แทนค่า p = 2.5 ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ได้ในกิจกรรมที่ 3 (2 < p < 4) และให้ผู้เรียนคำนวณค่าของ q และ a จากนั้น หาสมการของวิถีการโยนลูกบาสเกตบอลนี้

**คำอธิบายการคำนวณ**

* แทนค่า (0, 2) และ (4, 3) ลงในสมการ y = a(x-p)2+q จะได้ว่า

2 = ap2+q (i)

→ แทนค่า p = 2.5 แล้วสลับข้างของสมการ จะได้ว่า 2.5２a + q = 2 (i’)

3 = a(4-p)2+q (ii)

→ แทนค่า p = 2.5 แล้วสลับข้างของสมการ จะได้ว่า 1.5２a + q = 3 (ii’)

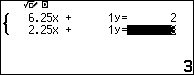
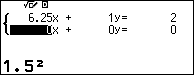
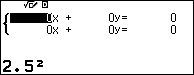
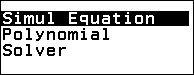
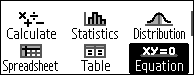


แก้สมการ (I’) และ (ii’) พร้อมกันโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

กดปุ่ม w, เลือก [สมการ (Equation)], |, [Simul Equation], |, เลือก [2 Unknowns], |

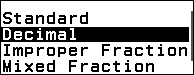
ป้อนค่าสมการทั้งสองโดยใช้ x แทนค่า a และใช้ y แทนค่า q ※สามารถป้อนค่ากำลังสองได้ดังภาพ

2.5dB1B2B1.5dB1B3B　B　B



หากต้องการแสดงค่า y (ค่า q) เป็นทศนิยม ให้เลือก n, เลือก [ทศนิยม (Decimal)], |

nR|



จากผลลัพธ์ที่ได้จากเครื่องคำนวณ:

a = , q = = 3.5625

จากนั้น ให้ยืนยันว่าค่าของ a และ q สอดคล้องกับเงื่อนไข (a < , 3 < q)

จะได้ว่า สมการของวิถีโค้งของการโยนลูกบอล เมื่อ p = 2.5 คือ

y = (x-2.5)2 + 3.5625

* จากผลลัพธ์ข้างต้น เราจะได้ว่า เมื่อ p = 2.5 ลูกบอลจะถูกโยนโดยที่ จุดยอดของพาราโบลาจะเป็น

(2.5, 3.5625)

**กิจกรรมที่ 5 – การหาจุดยอดต่างๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขและพิจารณาจุดที่เหมาะสม**

แทนค่า p อื่นๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข นอกเหนือไปจาก p = 2.5 ในกิจกรรมที่ 4 จากนั้น หาค่าของ q และ a ดังที่ได้ทำไปในกิจกรรมที่ 4 และกรอกค่าที่ได้ลงในตารางด้านล่างนี้ จากนั้น พิจารณาว่าการเปลี่ยนแปลงของค่า p และ q สามารถบอกวิถีที่บอลจะถูกโยนได้อย่างไร

ทำการคำนวณในทำนองเดียวกับที่ได้ทำไปในกิจกรรมที่ 4 จะสามารถกรอกค่าลงในตารางได้ดังนี้

| P | 2.1 | 2.5 | 3 | 3.5 | 3.9 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| q | 7.5125 | 3.5625 | 3.125 | 3.020833333 | 3.000657895 |
| a | -5/4 | -1/4 | -1/8 | -1/12 | -5/76 |

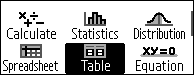
ผู้สอนให้ผู้เรียนคิดเกี่ยวกับวิถีโค้งที่ดีที่สุดของการโยนลูกบาสเกตบอลโดยอิงจากผลลัพธ์ในตารางข้างต้น

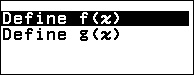
* หากจุดยอดอยู่ใกล้กับจุดที่ลูกบาสเกตบอลถูกโยนออกไป เช่น เมื่อ p = 2.1 จะได้ว่า วิถีการโยนนั้นสูงเกินไป
* หากจุดยอดอยู่ไกลจากจุดที่โยนลูกบาสเกตบอลเกินไป เช่น เมื่อ p = 3.9 จะได้ว่า จุดยอดจะอยู่ต่ำลง แต่มุมที่ลูกบอลเคลื่อนที่เข้าหาห่วงนั้นไม่ดี และไม่น่าเป็นไปได้ที่ลูกบาสเกตบอลจะเข้าห่วง

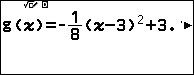
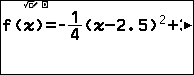
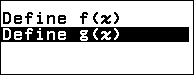
ดังนั้นจึงสันนิษฐานได้ว่า สมการที่อยู่ช่วงตรงกลางจะให้ผลลัพธ์ที่ดี

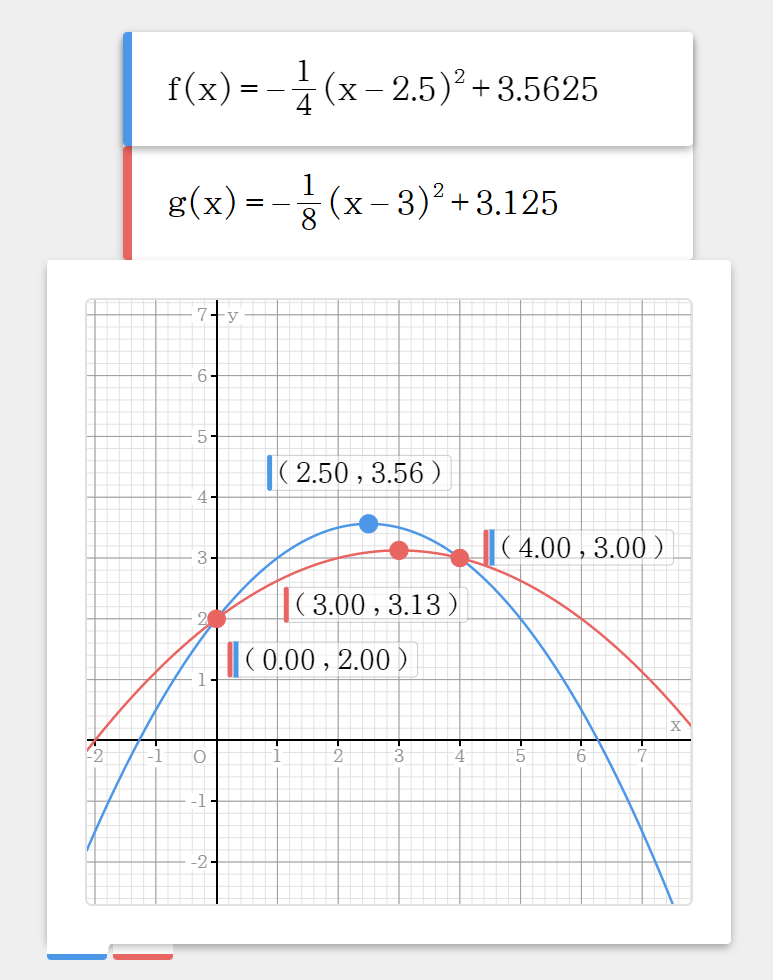
เพื่อเป็นการทดสอบ ให้คำนวณสมการเมื่อ p = 2.5 และเมื่อ p = 3 โดยใช้ฟังก์ชันตารางบนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ จะได้

y = (x-2.5)2 + 3.5625, y = (x-3)2 + 3.125









ผู้สอนให้ผู้เรียนคิดว่า มุมใดเหมาะสมที่สุดที่ลูกบาสเกตบอลจะลงห่วง

มุม 45˚ น่าจะเป็นมุมที่เหมาะสมที่สุด

(แม้จะมีข้อผิดพลาดบ้างเมื่อโยนลูกบาสเกตบอล แต่มุมนี้จะช่วยลดความไม่แม่นยำลงได้)

ดังนั้น จากภาพข้างต้น จะสามารถประมาณค่าได้ว่า p = 2.5 ใกล้เคียงกับจุดที่เหมาะสมที่สุด

(ที่จริงแล้ว มุมในการโยนลูกบาสเกตบอลลงห่วงคือ 45˚ เมื่อ p = 2.4 จะเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด)

→ หากเป็นไปได้ อาจดูวีดีโอการยิงลูกโทษบนยูทูปเพื่อตรวจสอบตำแหน่งของจุดยอด

**สรุปผลการเรียนรู้**

* การศึกษาปัญหานี้สามารถแสดงให้เห็นว่า สมการกำลังสอง (y = a(x-p)2+q) จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้   
  a < 0, 3 < q, 2 < p < 4
* นอกจากนี้ พิกัด x ของจุดยอด p ควรจะถูกกำหนดโดยให้ลูกบาสเกตบอลเข้าห่วงเป็นมุม 45˚ (ในอุดมคติ ผู้เล่นควรพยายามให้ p = 2.4)

**ใบกิจกรรม**

| หน่วย | ฟังก์ชันกำลังสอง | หัวข้อ | สมการและกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง |
| --- | --- | --- | --- |
| ชื่อ |  | ชั้นเรียน |  |

**กิจกรรมที่ 1**

* วาดภาพว่าวิถีโค้งของการโยนลูกบาสเกตบอลควรเป็นอย่างไร 
* ลองคิดว่ารูปร่างของพาราโบลาสามารถกำหนดได้ด้วยจุดสองจุดหรือไม่

รูปร่างที่เป็นไปได้ไม่ได้มีเพียงรูปร่างเดียว แต่มีพาราโบลาเป็นจำนวนนับไม่ถ้วนที่เป็นไปได้

**กิจกรรมที่ 2**

เลือก 2 ตัวแปร (2-Variable) ในโหมดสถิติของเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ ป้อนค่าพิกัด (0, 2), (4, 3) และสุ่มเลือกจุดที่สาม

1. หาสมการของฟังก์ชันกำลังสองที่ผ่านจุด (0, 2), (4, 3) และจุดที่สามที่สุ่มเลือก

ต่อไป ตรวจสอบรูปร่างของกราฟของฟังก์ชันดังกล่าว

ให้จุดที่สามที่สุ่มเลือกคือ ( , )

สมการคือ:

รูปร่างของกราฟคือ:

1. หาสมการของฟังก์ชันกำลังสองที่ผ่านจุด (0, 2), (4, 3) และสุ่มเลือกจุดที่สาม โดยให้แตกต่างจากจุดที่สุ่มในข้อ (1)

ต่อไป ตรวจสอบรูปร่างของกราฟของฟังก์ชันดังกล่าว

ให้จุดที่สามที่สุ่มเลือกคือ ( , )

สมการคือ:

รูปร่างของกราฟคือ:

1. จากผลลัพธ์ในข้อ (1) และ (2) ผู้เรียนคิดว่าต้องใช้กี่จุดในการกำหนดสมการพาราโบลา (สามจุด)

ต่อไป พิจารณาความเฉพาะเจาะจงของพาราโบลาที่ใช้อธิบายการโยนลูกบาสเกตบอล

* มีความจำเป็นที่จะต้องพิจารณาเงื่อนไขที่เหมาะสมสำหรับวิถีการโยนลูกบาสเกตบอล ในการพิจารณาเกี่ยวกับสมการพาราโบลา
* สมการพาราโบลาสามารถกำหนดได้จากจุดสามจุดที่อยู่บนพาราโบลา นอกเหนือไปจากจุดเริ่มต้นและจุดของห่วงแล้ว จุดที่สามที่สะดวกในการพิจารณาคือจุดใด (จุดยอด)

**กิจกรรมที่ 3**

* เขียนสูตรของฟังก์ชันกำลังสอง (พาราโบลา) ในรูปของพิกัดของจุดยอด (y = a(x-p)2+q)
* เงื่อนไขใดบ้างที่ใช้กับพาราโบลา y = a(x-p)2+q ในการพิจารณาวิถีโค้งของบอลที่ผ่านจุด (0, 2) และ (4, 3)

ทิศทางของพาราโบลา (ค่าของ a)

**a < 0**

เหตุผล:

จุดยอด (p, q) ของพาราโบลา

เงื่อนไขสำหรับ q: 3 < q

เหตุผล:

เงื่อนไขสำหรับ p: 2 < p < 4

เหตุผล:

**กิจกรรมที่ 4**

คำนวณหาค่าของ q และ a เมื่อ p = 2.5

**กิจกรรมที่ 5**

แทนค่า p อื่นๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข นอกเหนือไปจาก p = 2.5 ในกิจกรรมที่ 4 จากนั้น หาค่าของ q และ a ดังที่ได้ทำไปในกิจกรรมที่ 4 และกรอกค่าที่ได้ลงในตารางด้านล่าง

| P | 2.1 | 2.5 | 3 | 3.5 | 3.9 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| q | 7.5125 | 3.5625 | 3.125 | 3.020833333 | 3.000657895 |
| a | -5/4 | -1/4 | -1/8 | -1/12 | -5/76 |

ต่อไป อภิปรายว่าค่าของ p และ q สามารถบอกวิถีที่บอลจะถูกโยนได้อย่างไร