

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันกำลังสอง

เรื่อง สมการและกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

เวลา 50 นาที

ตัวชี้วัด

ใช้ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันอธิบายสถานการณ์ที่กำหนด

สาระสำคัญ

ฟังก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันกำลังสองขึ้นอยู่กับ a, b และ c โดยเมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบ จะทำให้ได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือคว่ำลง โดยกราฟของฟังก์ชันกำลังสองมีชื่อเรียกว่า พาราโบลา

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

1. ทบทวนและเสริมความเข้าใจเกี่ยวกับสมการกำลังสองและกราฟของสมการกำลังสองที่ได้ศึกษาไปก่อนหน้านี้
2. พิจารณาเงื่อนไขที่ใช้ได้กับการโยนลูกบาสเกตบอล คำนวณสมการพาราโบลา และตรวจสอบวิถีโค้งในอุดมคติสำหรับการโยนลูกบาสเกตบอล

สรุปหัวข้อ

- พิจารณาพาราโบลาที่ผ่านจุดสองจุดเพื่อให้เข้าใจว่า เราไม่สามารถกำหนดสมการพาราโบลาโดยใช้พิกัดจุดเพียงแค่สองจุดได้
- ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์เพื่อยืนยันว่าสมการพาราโบลาสามารถกำหนดได้โดยใช้จุดสามจุด
- พิจารณาเงื่อนไขที่ใช้ได้กับการโยนลูกบาสเกตบอล และหาเงื่อนไขที่สามารถใช้ได้กับพาราโบลา
- ใช้ตัวอย่างวิถีโค้งของการโยนลูกบาสเกตบอล เพื่อกำหนดสมการตามเงื่อนไขที่กำหนด
- หาจุดยอดหลายจุดที่ตรงตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ และพิจารณาว่าจุดใดเป็นจุดที่เหมาะสม

สื่อการเรียนรู้

เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ แอปพลิเคชัน CLASSWIZ และใบกิจกรรม

กระบวนการจัดการเรียนรู้

บทนำ

ผู้สอนให้ผู้เรียนลองนึกถึงปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในโลกรอบตัวเราที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันกำลังสองให้ได้มากที่สุด

- การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (วิถีโค้งของลูกบอล, วิถีโค้งของน้ำพุ ฯลฯ)
- ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและระยะทางที่วัตถุตกลงมา ($y = \frac{1}{2}gt^2$)
- เสืออากาศพาราโบล่า
- ระยะเบรก (ระยะทางที่เครื่องยนต์เคลื่อนที่ก่อนที่จะหยุดสนิทเมื่อเหยียบเบรก)
- ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานจลน์กับความเร็ว ($E = \frac{1}{2}mv^2$)
- ความสัมพันธ์ระหว่างคาบของลูกตุ้มกับความยาวของลูกตุ้ม

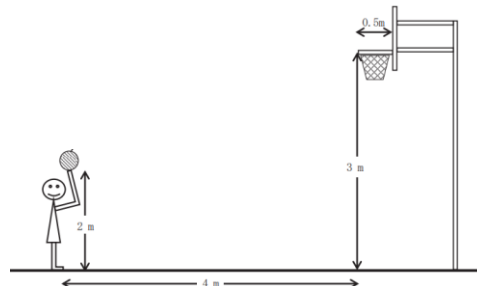
ปัญหา

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของการโยนลูกบาสเกตบอล ดังภาพข้างล่าง

ลูกบอลถูกโยนจากจุดที่สูงจากพื้น 2 เมตร ผ่านเข้าห่วงซึ่งอยู่ห่างออกไป 4 เมตร ที่มีความสูง 3 เมตร

พิจารณาพาราโบลานี้บนระนาบ XY โดยให้ (0, 2) เป็นจุดที่ลูกบาสเกตบอลถูกโยน และ (4, 3) เป็นจุดที่เป็นตำแหน่งของห่วง โดยไม่สนใจขนาดของลูกบาสเกตบอลและห่วง

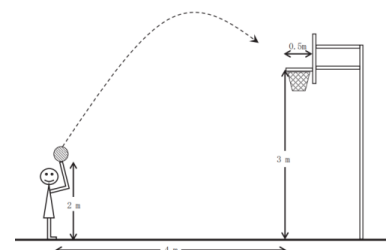
ผู้สอนให้ผู้เรียนลองคิดเกี่ยวกับสมการพาราโบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการโยนเหล่านี้ และตรวจสอบว่าวิธีการเคลื่อนที่ควรเป็นแบบใด



กิจกรรมที่ 1 – การตรวจสอบพาราโบลาที่ผ่านจุดสองจุด

ผู้สอนให้ผู้เรียนลองคิดเกี่ยวกับพาราโบลาที่ผ่านจุด (0, 2) และจุด (4, 3) ซึ่งเป็นวิธีการโยนที่เป็นไปได้ โดยเริ่มจากให้ผู้เรียนวาดพาราโบลาด้วยมือเปล่า

⇒ ผู้สอนให้ผู้เรียนแสดงภาพวาดของตนกับผู้เรียนคนอื่นๆ และชี้ให้เห็นว่ามีพาราโบลาหลายแบบที่เป็นไปได้



สำหรับเส้นตรง สมการเส้นตรงสามารถหาได้จากจุดสองจุด ผู้สอนให้ผู้เรียนลองคิดว่าสมการพาราโบลาที่ผ่านจุดสองจุด สามารถหาได้ในทำนองเดียวกันกับสมการเส้นตรงหรือไม่ (ผู้สอนถามคำถามกับผู้เรียน)

⇒ ผู้สอนช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจว่ามีพาราโบลามากมายนับไม่ถ้วนที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนด ไม่ได้มีเพียงพาราโบลาเดียว จากนั้นให้ผู้เรียนคิดต่อว่า จะสามารถกำหนดพาราโบลาโดยใช้จุดสามจุดได้หรือไม่ (ผู้สอนถามคำถามกับผู้เรียน)

⇒ เราสามารถหาสมการพาราโบลาเพียงหนึ่งเดียวได้จากจุดสามจุด โดยจะยืนยันความเข้าใจนี้ในกิจกรรมที่ 2

กิจกรรมที่ 2 – การสร้างพาราโบลาที่ผ่านจุดสามจุด

(1) เลือก 2 ตัวแปร (2-Variable) ในโหมดสถิติของเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ และป้อนค่าพิกัด (0, 2), (4, 3) และสุ่มเลือกจุดที่สาม จากนั้น หาสมการสำหรับฟังก์ชันกำลังสองและตรวจสอบรูปร่างทั่วไปของกราฟ

กดปุ่ม , เลือก [สถิติ (Statistics)], , เลือก [2 ตัวแปร (2-Variable)], 

ในตาราง ให้ป้อนค่า (0, 2) บนบรรทัดแรก (4, 3) บนบรรทัดที่สอง และสุ่มเลือกจุดที่สามเพื่อป้อนค่าในบรรทัดที่สาม ตัวอย่างเช่น ป้อนค่า (3, 6) เป็นจุดที่สาม

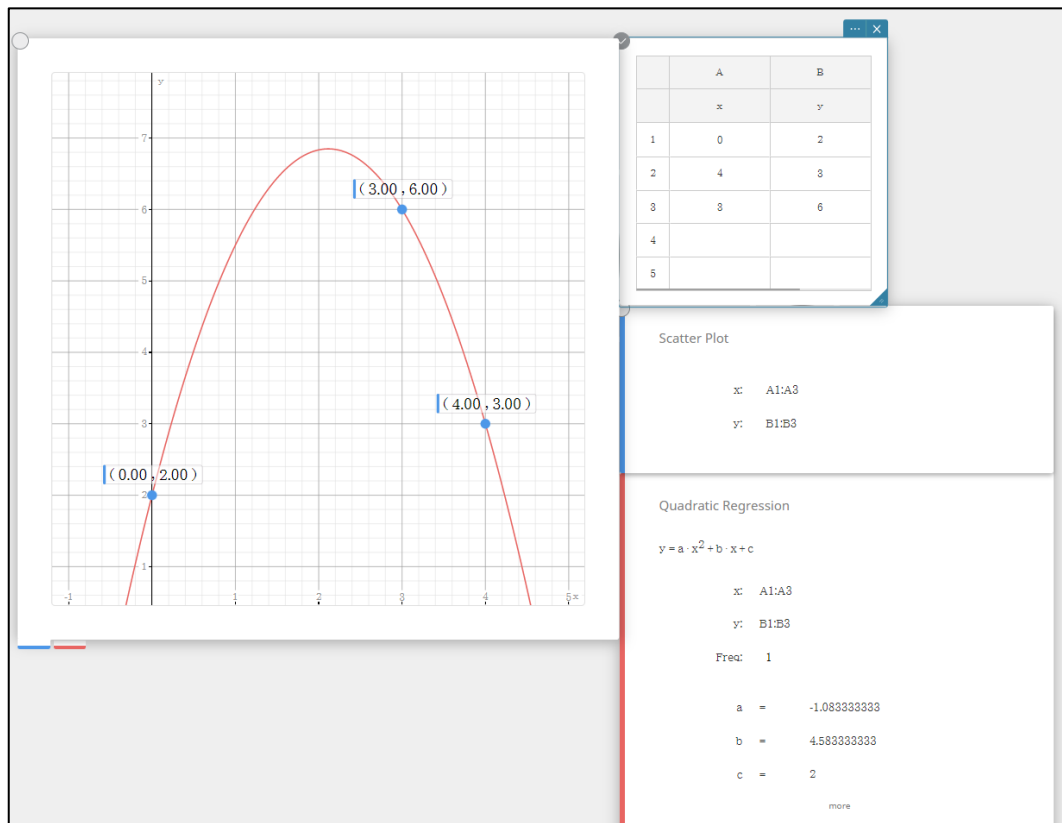
ป้อนค่าพิกัดของทั้งสามจุด, , เลือก [Reg Results]

เลือก $y=a+bx+cx^2$, , สมการของฟังก์ชันกำลังสองที่ผ่านจุดทั้งสามจะถูกคำนวณ

,  , สแกน QR Code เพื่อแสดงรูปกราฟ

	1-Variable 2-Variable	
	2-Var Results Reg Results ▶ Statistics Calc ▶	$y=a+bx$ $y=a+bx+cx^2$ $y=a+b \cdot \ln(x)$ $y=a \cdot e^{(bx)}$
$y=a+bx+cx^2$ $a=2$ $b=4.583333333$ $c=-1.083333333$		

 โปรดทราบว่าเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์จะแสดงผลโดยเรียงลำดับจากน้อยไปมากตามระดับดีกรี แต่ ClassPad.net จะแสดงผลจากมากไปน้อย



(2) หาสมการของฟังก์ชันกำลังสองที่ผ่านจุดที่สามอื่นๆ ที่ไม่ใช่จุดในข้อ (1) จากนั้นให้ยืนยันรูปร่างทั่วไปของกราฟของสมการดังกล่าว

※ การตรวจสอบจุดที่สามจุดใหม่ในข้อ (2) สามารถทำได้ง่ายโดยใช้การป้อนค่าต่อไปนี้บน ClassPad.net เลือกและลบพิกัดเดิมของจุดที่สามที่ถูกป้อนค่าในข้อ (1) จากนั้นให้ป้อนค่าใหม่ลงไป สมการและกราฟใหม่จะถูกสร้างขึ้น

	A	B	C
	x	y	
1	0	2	
2	4	3	
3	3	6	
4			
5			

ผู้สอนให้ผู้เรียนแสดงกราฟที่ได้กับผู้เรียนคนอื่นๆ แล้วตรวจสอบให้เห็นรูปร่างของกราฟ

(3) ยืนยันว่ากราฟของพาราโบลาสามารถกำหนดได้โดยใช้จุดสามจุด

⇒ รูปร่างของพาราโบลาสามารถเป็นได้หลายแบบขึ้นอยู่กับจุดที่สาม ผู้เรียนควรเข้าใจว่าเราจำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขที่เหมาะสมต่อวัตถุประสงค์ของเรา

→ เราจะพิจารณาสิ่งนี้ในกิจกรรมที่ 3

โปรดทราบว่าเราไม่สามารถวาดพาราโบลาได้หาก x มีค่าเท่ากับ 0 และ 4 ให้ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติมหากจำเป็น

ต่อไป ให้ผู้เรียนคิดเกี่ยวกับพิกัดของจุดที่สาม นอกเหนือไปจากจุดเริ่มต้นและจุดเป้าหมาย ที่จะทำให้การโยนลูกบาสเกตบอลได้ดี (ผู้สอนถามคำถามกับผู้เรียน)

⇒ หากรู้พิกัดของจุดยอดของพาราโบลา ผู้เล่นจะสามารถเล็งเป้าไปที่จุดนั้นได้เมื่อโยนลูกบาสเกตบอล

→ ผู้เรียนจะได้ทราบว่า พาราโบลาควรมีจุดยอดแบบใดในกิจกรรมที่ 4 และ 5

เราสามารถพิจารณากราฟโดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มได้ดังนี้

1. พาราโบลาคว่ำ จะให้วิถีโค้งที่ทำให้ลูกบาสเกตบอลเข้าห่วงจากด้านบน
2. พาราโบลาหงาย

กิจกรรมที่ 3 – การพิจารณาเงื่อนไขสำหรับวิธีการโยนลูกบาสเกตบอล

เพื่อความสะดวก เราจะพิจารณาจุดยอดของพาราโบลา กำหนดให้ (p, q) เป็นจุดยอดดังกล่าว เราจะใช้สัญลักษณ์นี้ในการพิจารณาเงื่อนไขของสมการพาราโบลาที่เกี่ยวข้องกับจุดยอดนี้

ทบทวนสมการของฟังก์ชันกำลังสอง (พาราโบลา) ที่ผ่านพิกัดของจุดยอด (p, q)

ผู้สอนให้ผู้เรียนเขียนสมการนี้ลงในใบกิจกรรม

$$\Rightarrow y = a(x-p)^2 + q$$

จากที่ได้เห็นในกิจกรรมที่ 2 เราสามารถหาสมการพาราโบลาได้จากจุดสามจุด แต่สมการพาราโบลาบางสมการไม่เหมาะที่จะเป็นวิถีของการโยนลูกบาสเกตบอลลงห่วง ลองให้ผู้เรียนคิดเกี่ยวกับเงื่อนไขที่เหมาะสมของวิธีการเคลื่อนที่ผ่านห่วง

⇒ อันดับแรก ให้ผู้เรียนคิดว่ามีเงื่อนไขอะไรบ้างสำหรับพาราโบลา $y = a(x-p)^2 + q$ ที่ผ่านจุด $(0, 2)$ และ $(4, 3)$ ที่จะเป็นวิถีการเคลื่อนที่ของลูกบาสเกตบอล (อาจให้ผู้เรียนอภิปรายกันในกลุ่ม)

ทิศทางของพาราโบลา (ค่าของ a)

- พาราโบลาจะต้องมีลักษณะคว่ำลง (ถึงแม้ลูกบาสเกตบอลจะถูกโยนในทิศลง ก็เป็นไปได้ที่จะมีจุดยอดที่ฐานของพาราโบลา) $\rightarrow a < 0$
- ถ้า $a > 0$ จะได้ว่า พาราโบลามีลักษณะหงายขึ้น ซึ่งไม่สอดคล้องกับสิ่งที่เราต้องการ

จุดยอด (p, q) ของพาราโบลา

- ในการโยนลูกบาสเกตบอลผ่านห่วง ลูกบาสเกตบอลจะต้องมาถึงห่วงในระหว่างที่กำลังเคลื่อนที่ลง ไม่ใช่ในระหว่างที่กำลังเคลื่อนที่ขึ้น

$\Rightarrow$ พิกัด y ของจุดยอด: จะต้องสูงกว่า 3 เมตร $\rightarrow 3 < q$

$\Rightarrow$ พิกัด x ของจุดยอด: จะอยู่หน้าห่วง $\rightarrow 0 < p < 4$

- ในความเป็นไปได้ต่อไปนี้ ตำแหน่งของจุดยอด (ค่า p) ควรอยู่ที่ใด

(1) ใกล้กว่าจุดกึ่งกลางระหว่างจุดที่โยนบอลกับห่วง $\rightarrow 0 < p < 2$

(2) ที่จุดกึ่งกลางระหว่างจุดที่โยนบอลกับห่วง $\rightarrow p = 2$

(3) เลยจุดกึ่งกลางระหว่างจุดที่โยนบอลกับห่วง $\rightarrow 2 < p < 4$

$\rightarrow$ เนื่องจากพาราโบลามีลักษณะสมมาตรซ้ายขวา ดังนั้น ลูกบอลจะไปไม่ถึงห่วงด้วยเงื่อนไข (1) หรือ (2)

นั่นคือ $2 < p < 4$

กิจกรรมที่ 4 – การพิจารณาตัวอย่างของวิธีการโยนลูกบอล

เพื่อเป็นการทดสอบ ให้แทนค่า $p = 2.5$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ได้ในกิจกรรมที่ 3 ($2 < p < 4$) และให้ผู้เรียนคำนวณค่าของ q และ a จากนั้น หาสมการของวิธีการโยนลูกบาสเกตบอลนี้

คำอธิบายการคำนวณ

- แทนค่า $(0, 2)$ และ $(4, 3)$ ลงในสมการ $y = a(x-p)^2 + q$ จะได้ว่า

$$2 = ap^2 + q \quad (i)$$

$$\rightarrow \text{แทนค่า } p = 2.5 \text{ แล้วสลับข้างของสมการ จะได้ว่า } 2.5^2 a + q = 2 \quad (i')$$

$$3 = a(4-p)^2 + q \quad (ii)$$

$$\rightarrow \text{แทนค่า } p = 2.5 \text{ แล้วสลับข้างของสมการ จะได้ว่า } 1.5^2 a + q = 3 \quad (ii')$$

ผู้สอนอธิบายเพิ่มเติมว่าเราสามารถป้อนค่ากำลังสองได้โดยตรง และเน้นว่าการทำแบบนี้สามารถลดเวลาในการคำนวณได้

กิจกรรมที่ 5 – การหาจุดยอดต่างๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขและพิจารณาจุดที่เหมาะสม

แทนค่า p อื่นๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข นอกเหนือไปจาก $p = 2.5$ ในกิจกรรมที่ 4 จากนั้น หาค่าของ q และ a ดังที่ได้ทำไปในกิจกรรมที่ 4 และกรอกค่าที่ได้ลงในตารางด้านล่างนี้ จากนั้น พิจารณาว่าการเปลี่ยนแปลงของค่า p และ q สามารถบอกวิถีที่บอลจะถูกโยนได้อย่างไร

ทำการคำนวณในทำนองเดียวกับที่ได้ทำไปในกิจกรรมที่ 4 จะสามารถกรอกค่าลงในตารางได้ดังนี้

P	2.1	2.5	3	3.5	3.9
q	7.5125	3.5625	3.125	3.020833333	3.000657895
a	-5/4	-1/4	-1/8	-1/12	-5/76

ผู้สอนให้ผู้เรียนคิดเกี่ยวกับวิถีโค้งที่ดีที่สุดของการโยนลูกบาสเกตบอลโดยอิงจากผลลัพธ์ในตารางข้างต้น

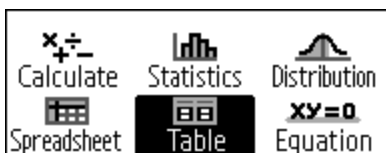
⇒ หากจุดยอดอยู่ใกล้กับจุดที่ลูกบาสเกตบอลถูกโยนออกไป เช่น เมื่อ $p = 2.1$ จะได้ว่า วิถีการโยนนั้นสูงเกินไป

⇒ หากจุดยอดอยู่ไกลจากจุดที่โยนลูกบาสเกตบอลเกินไป เช่น เมื่อ $p = 3.9$ จะได้ว่า จุดยอดจะอยู่ต่ำลง แต่มุมที่ลูกบอลเคลื่อนที่เข้าหาห่วงนั้นไม่ดี และไม่น่าเป็นไปได้ที่ลูกบาสเกตบอลจะเข้าห่วง

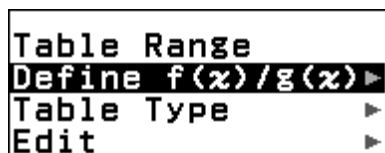
ดังนั้นจึงสันนิษฐานได้ว่า สมการที่อยู่ช่วงตรงกลางจะให้ผลลัพธ์ที่ดี

เพื่อเป็นการทดสอบ ให้คำนวณสมการเมื่อ $p = 2.5$ และเมื่อ $p = 3$ โดยใช้ฟังก์ชันตารางบนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์จะได้

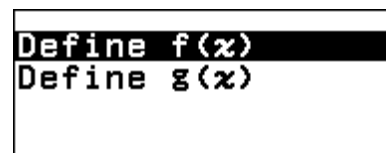
$$y = -\frac{1}{4}(x-2.5)^2 + 3.5625, y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + 3.125$$



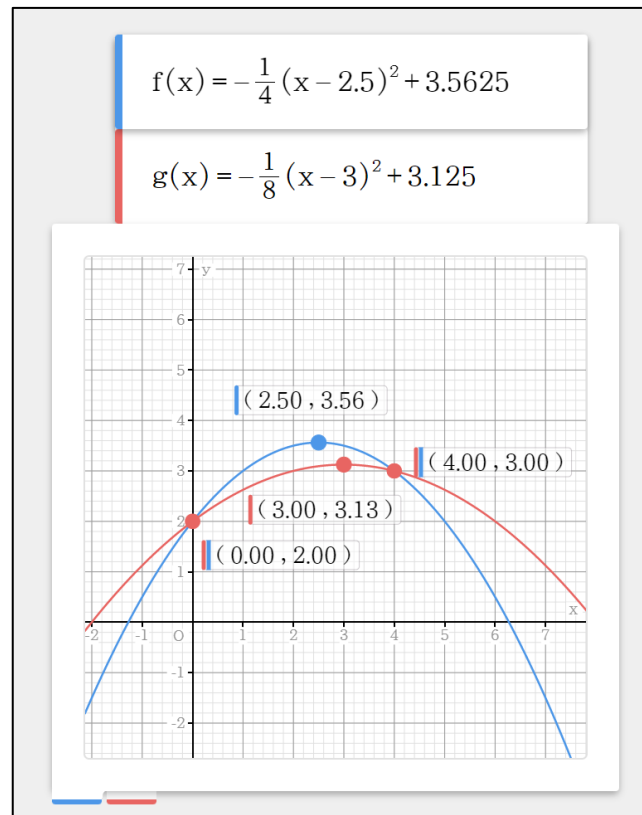
$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-2.5)^2 + 3.5625$$



$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-2.5)^2 + 3.5625$$



$$g(x) = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + 3.125$$



ผู้สอนให้ผู้เรียนคิดว่า มุมใดเหมาะสมที่สุดที่ลูกบาสเกตบอลจะลงห่วง

มุม 45° น่าจะเป็นมุมที่เหมาะสมที่สุด

(แม้จะมีข้อผิดพลาดบ้างเมื่อโยนลูกบาสเกตบอล แต่มุมนี้จะช่วยลดความไม่แม่นยำลงได้)

ดังนั้น จากภาพข้างต้น จะสามารถประมาณค่าได้ว่า $p = 2.5$ ใกล้เคียงกับจุดที่เหมาะสมที่สุด

(ที่จริงแล้ว มุมในการโยนลูกบาสเกตบอลลงห่วงคือ 45° เมื่อ $p = 2.4$ จะเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด)

→ หากเป็นไปได้ อาจดูวิดีโอการยิงลูกโทษบนยูทูบเพื่อตรวจสอบตำแหน่งของจุดยอด

สรุปผลการเรียนรู้

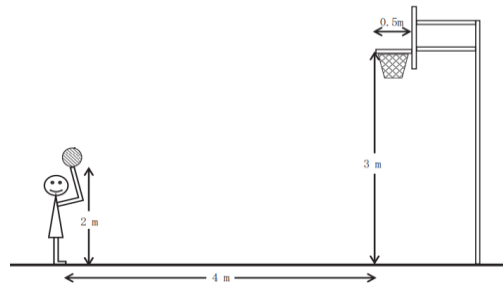
- การศึกษาปัญหานี้สามารถแสดงให้เห็นว่า สมการกำลังสอง ($y = a(x-p)^2 + q$) จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้
 $a < 0$, $3 < q$, $2 < p < 4$
- นอกจากนี้ พิกัด x ของจุดยอด p ควรจะถูกกำหนดโดยให้ลูกบาสเกตบอลเข้าห่วงเป็นมุม 45° (ในอุดมคติ ผู้เล่นควรพยายามให้ $p = 2.4$)

ใบกิจกรรม

หน่วย	ฟังก์ชันกำลังสอง	หัวข้อ	สมการและกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง
ชื่อ		ชั้นเรียน	

กิจกรรมที่ 1

- วาดภาพว่าวิถีโค้งของการโยนลูกบาสเกตบอลควรเป็นอย่างไร



- ลองคิดว่ารูปร่างของพาราโบลาสามารถกำหนดได้ด้วยจุดสองจุดหรือไม่
รูปร่างที่เป็นไปได้ไม่ได้มีเพียงรูปร่างเดียว แต่มีพาราโบลาเป็นจำนวนนับไม่ถ้วนที่เป็นไปได้

กิจกรรมที่ 2

เลือก 2 ตัวแปร (2-Variable) ในโหมดสถิติของเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ ป้อนค่าพิกัด (0, 2), (4, 3) และสุ่มเลือกจุดที่สาม

- (1) หาสมการของฟังก์ชันกำลังสองที่ผ่านจุด (0, 2), (4, 3) และจุดที่สามที่สุ่มเลือก

ต่อไป ตรวจสอบรูปร่างของกราฟของฟังก์ชันดังกล่าว

ให้จุดที่สามที่สุ่มเลือกคือ (,)

สมการคือ:

รูปร่างของกราฟคือ:

- (2) หาสมการของฟังก์ชันกำลังสองที่ผ่านจุด (0, 2), (4, 3) และสุ่มเลือกจุดที่สาม โดยให้แตกต่างจากจุดที่สุ่มในข้อ (1)

ต่อไป ตรวจสอบรูปร่างของกราฟของฟังก์ชันดังกล่าว

ให้จุดที่สามที่สุ่มเลือกคือ (,)

สมการคือ:

รูปร่างของกราฟคือ:

- (3) จากผลลัพธ์ในข้อ (1) และ (2) ผู้เรียนคิดว่าต้องใช้กี่จุดในการกำหนดสมการพาราโบลา (สามจุด)

ต่อไป พิจารณาความเฉพาะเจาะจงของพาราโบลาที่ใช้อธิบายการโยนลูกบาสเกตบอล

- มีความจำเป็นที่จะต้องพิจารณาเงื่อนไขที่เหมาะสมสำหรับวิธีการโยนลูกบาสเกตบอล ในการพิจารณาเกี่ยวกับสมการพาราโบลา
- สมการพาราโบลาสามารถกำหนดได้จากจุดสามจุดที่อยู่บนพาราโบลา นอกเหนือไปจากจุดเริ่มต้นและจุดของห่วงแล้ว จุดที่สามที่สะดวกในการพิจารณา คือ จุดใด (จุดยอด)

กิจกรรมที่ 3

- เขียนสูตรของฟังก์ชันกำลังสอง (พาราโบลา) ในรูปของพิกัดของจุดยอด ($y = a(x-p)^2+q$)
- เงื่อนไขใดบ้างที่ใช้กับพาราโบลา $y = a(x-p)^2+q$ ในการพิจารณาวิถีโค้งของบอลที่ผ่านจุด (0, 2) และ (4, 3) ทิศทางของพาราโบลา (ค่าของ a)

$$a < 0$$

เหตุผล:

จุดยอด (p, q) ของพาราโบลา

เงื่อนไขสำหรับ q: $3 < q$

เหตุผล:

เงื่อนไขสำหรับ p: $2 < p < 4$

เหตุผล:

กิจกรรมที่ 4

คำนวณหาค่าของ q และ a เมื่อ $p = 2.5$

กิจกรรมที่ 5

แทนค่า p อื่นๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข นอกเหนือไปจาก $p = 2.5$ ในกิจกรรมที่ 4 จากนั้น หาค่าของ q และ a ดังที่ได้ทำไปในกิจกรรมที่ 4 และกรอกค่าที่ได้ลงในตารางด้านล่าง

p	2.1	2.5	3	3.5	3.9
q	7.5125	3.5625	3.125	3.020833333	3.000657895
a	$-5/4$	$-1/4$	$-1/8$	$-1/12$	$-5/76$

ต่อไป อภิปรายว่าค่าของ p และ q สามารถบอกวิธีที่บอลจะถูกโยนได้อย่างไร