

เลขยกกำลัง

TARGET

การเรียนรู้และการทำความเข้าใจวิธีคำนวณเลขยกกำลัง

STUDY GUIDE

เลขยกกำลัง

สามารถแสดงได้ตามรูปแบบที่แสดงด้านล่าง

$$n \text{ ครั้ง}$$

$$a \times a \times a \times \cdots \times a = a^n$$

ในกรณีนี้ n คือจำนวนเต็มบวก นอกจากนี้ เรายังกล่าวได้ว่า a คือ **ฐานของเลขยกกำลัง** และ n คือ **เลขชี้กำลัง**

EXERCISE



1 จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) คำนวณ 3^4

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$ 3 $\square^{\square}$ 4 $\odot$

$$3^4 = 81$$

(2) คำนวณ $\left(-\frac{2}{5}\right)^7$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^7 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{128}{78125}$$

$$-\frac{128}{78125}$$

($\ominus$) 2 $\square^{\square}$ 5 > 1 $\square^{\square}$ 7 $\odot$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^7 = -\frac{128}{78125}$$

(3) คำนวณ $(\sqrt{7})^4$

$$(\sqrt{7})^4 = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 49$$

($\sqrt{\square}$) 7 > 1 $\square^{\square}$ 4 $\odot$

$$(\sqrt{7})^4 = 49$$

(4) แยกตัวประกอบ 32 เป็นตัวประกอบเฉพาะ และแสดงเป็นเลขยกกำลัง

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

หลังจากป้อน 3 2 $\odot$ แล้ว ให้กด $\odot$ เลือก [Prime factor (ตัวประกอบเฉพาะ)] กด $\odot$

$$32 = 2^5$$



2 จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a

(1) $5^4 \times 5^2 = 5^a$

$$5^4 \times 5^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \times 5 \cdot 5 = 5^6$$

$a=6$

5 $\frac{\square}{\square}$ 4 > $\times$ 5 $\frac{\square}{\square}$ EXE

$5^4 \times 5^2$

15625

5 $\frac{\square}{\square}$ 6 EXE

5^6

15625

(2) $\frac{13^{12}}{13^7} = 13^a$

$$\frac{13^{12}}{13^7} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}{13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13} = 13^5$$

$a=5$

1 3 $\frac{\square}{\square}$ 1 2 > $\frac{\square}{\square}$ 1 3 $\frac{\square}{\square}$ 7 EXE

$\frac{13^{12}}{13^7}$

371293

1 3 $\frac{\square}{\square}$ 5 EXE

13^5

371293

(3) $(7^2)^3 = 7^a$

$$(7^2)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$$

$a=6$

(7 $\frac{\square}{\square}$) $\frac{\square}{\square}$ 3 EXE

$(7^2)^3$

117649

7 $\frac{\square}{\square}$ 6 EXE

7^6

117649

(4) $(2 \times 3)^4 = 2^a \times 3^a$

$$(2 \times 3)^4 = (2 \times 3)(2 \times 3)(2 \times 3)(2 \times 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \times 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \times 3^4$$

$a=4$

(2 $\times$ 3) $\frac{\square}{\square}$ 4 EXE

$(2 \times 3)^4$

1296

2 $\frac{\square}{\square}$ 4 > $\times$ 3 $\frac{\square}{\square}$ 4 EXE

$2^4 \times 3^4$

1296

PRACTICE

① จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) คำนวณ 2^6

(2) คำนวณ $(-7)^3$

(3) แยกตัวประกอบ 625 เป็นตัวประกอบเฉพาะ และแสดงเป็นเลขยกกำลัง

② จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a

(1) $3^4 \times 3^5 = 3^a$

(2) $\frac{2^8}{2^2} = 2^a$

(3) $(5^7)^3 = 5^a$

สมบัติของเลขยกกำลัง

TARGET

การเรียนรู้สมบัติของเลขยกกำลังและการทำความเข้าใจวิธีคำนวณสมบัติของเลขยกกำลัง

STUDY GUIDE

สมบัติของเลขยกกำลัง

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

$$(a) \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(b) \quad a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n)$$

$$(c) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(d) \quad (ab)^m = a^m b^m$$

EXERCISE



จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a และ b

$$(1) \quad 3^3 \times 3^4 = 3^a$$

จาก (a) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้ $3^3 \times 3^4 = 3^{3+4} = 3^7$

$a=7$

3 $\square$ 3 $\times$ 3 $\square$ 4 $\square$ EXE

$3^3 \times 3^4$

2187

3 $\square$ 7 $\square$ EXE

3^7

2187

$$(2) \quad \frac{2^{10}}{2^7} = 2^a$$

จาก (b) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้ $\frac{2^{10}}{2^7} = 2^{10-7} = 2^3$

$a=3$

2 $\square$ 1 0 $\div$ 2 $\square$ 7 $\square$ EXE

$\frac{2^{10}}{2^7}$

8

2 $\square$ 3 $\square$ EXE

2^3

8

$$(3) \quad \{(\sqrt{5})^3\}^2 = (\sqrt{5})^a = 5^b$$

จาก (c) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้ $\{(\sqrt{5})^3\}^2 = (\sqrt{5})^{3 \times 2} = (\sqrt{5})^{2 \times 3} = \{(\sqrt{5})^2\}^3 = 5^3$

$a=6, b=3$

(($\sqrt{\square}$ 5 $\times$) $\square$ 3 $\times$) $\square$ 2 $\square$ EXE

$((\sqrt{5})^3)^2$

125

$\sqrt{\square}$ 5 $\times$ $\square$ 6 $\square$ EXE

$\sqrt{5}^6$

125

$\sqrt{\square}$ 5 $\square$ 3 $\square$ OK

$\sqrt{5}^3$

5³

PRACTICE

◆ จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a

(1) $11^2 \times 11^3 = 11^a$

(2) $\frac{2^{19}}{2^{16}} = 2^a$

(3) $(17^3)^2 = 17^a$

ADVANCED

EXERCISE



◆ จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a , b และ c

(1) $(4 \cdot 7)^3 = 4^a \cdot 7^b = 2^c \cdot 7^3$

จาก (d) และ (c) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้ $(4 \cdot 7)^3 = 4^3 \cdot 7^3 = (2^2)^3 \cdot 7^3 = 2^6 \cdot 7^3$

$a=3, b=3, c=6$

((4 × 7)) ^ 3 = 21952

4 ^ 3 × 7 ^ 3 = 21952

4 ^ 3 × 7 ^ 3 = 2^6 × 7^3

(2) $6^2 \cdot 6^3 = 6^a = 2^b \cdot 3^c$

จาก (a) และ (d) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้ $6^2 \cdot 6^3 = 6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$

$a=5, b=5, c=5$

6 ^ 2 × 6 ^ 3 = 7776

6 ^ 5 = 7776

6 ^ 5 = 2^5 × 3^5

(3) $(4^3)^2 = 2^a$

จาก (c) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้ $(4^3)^2 = 4^{3 \times 2} = 4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$

$a=12$

((4 ^ 3)) ^ 2 = 4096

4 ^ 6 = 4096

4 ^ 6 = 2^12

สมบัติของเลขยกกำลังเพิ่มเติม (1)

TARGET

การเรียนรู้เกี่ยวกับเลขชี้กำลัง 0 และจำนวนเต็มลบ และการทำความเข้าใจวิธีคำนวณ

STUDY GUIDE

สมบัติของเลขยกกำลังเพิ่มเติม

แม้ว่าเลขชี้กำลัง n ของ a^n คือ 0 หรือจำนวนเต็มลบ สมบัติของเลขยกกำลังจะเป็นไปตามที่กำหนดไว้ดังต่อไปนี้

เมื่อ $a \neq 0$ และ n คือจำนวนเต็มบวก

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

explanation

สำหรับสมบัติของเลขยกกำลัง $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ให้พิจารณา $m=2$ และ $n=0$

จาก $a^2 \times a^0 = a^{2+0} = a^2$ เราเข้าใจได้ว่า $a^0 = 1$

สำหรับสมบัติของเลขยกกำลัง $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ให้พิจารณา $m=2$ และ $n=-2$

จาก $a^2 \times a^{-2} = a^{2+(-2)} = a^0 = 1$ เราเข้าใจได้ว่า $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

EXERCISE



จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ 6392^0

$$6392^0 = 1$$

6 3 9 2 $\frac{1}{\square}$ 0 EXE

6392⁰

1

(2) จงหาค่าของ 2^{-5}

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

2 $\frac{1}{\square}$ - 5 EXE

2⁻⁵

$\frac{1}{32}$

(3) จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a ใน $21^{-8} = \frac{1}{21^a}$

$$21^{-8} = \frac{1}{21^8}$$

2 1 $\frac{1}{\square}$ - 8 > - 1 $\frac{1}{\square}$ 8 EXE

21⁻⁸ - $\frac{1}{21^8}$

$a=8$

PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ 2022^0

(2) จงหาค่าของ 3^{-4}

(3) จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a ใน $14^{-9} = \frac{1}{14^a}$

สมบัติของเลขยกกำลังเพิ่มเติม (2)

TARGET

การเรียนรู้เกี่ยวกับรากและการทำความเข้าใจสมบัติของเลขยกกำลังโดยพิจารณาวิธีเพิ่มเลขชี้กำลังภายในช่วงของจำนวนตรรกยะ

STUDY GUIDE

ราก

พิจารณาปริมาตรของลูกบาศก์ โดยให้ความยาวด้านคือ $\sqrt[n]{a}$ ดังนั้นจะมีพื้นที่คือ a

เมื่อ a คือจำนวนจริงและ n คือจำนวนบวก ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่าจำนวน x ที่ตรงกับ $x^n = a$ คือรากที่ n ของ a รายการต่อไปนี้แสดงวิธีพิจารณารากที่ n ของจำนวนจริง a ในช่วงของจำนวนจริง

(1) เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

เมื่อ $a > 0$ จะมีรากที่ n ของ a สองรากคือ $\sqrt[n]{a}$ และ $-\sqrt[n]{a}$

เมื่อ $a < 0$ และไม่มีรากที่ n ของ a

(2) เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

มีรากที่ n ของ a เพียงหนึ่งรากเท่านั้น คือ $\sqrt[n]{a}$ ไม่ว่า a จะเป็นบวกหรือลบ

จากนิยามของราก เมื่อ $a > 0$ รายการต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$\sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a$$



Ex. (1) $(\sqrt[7]{3})^7 = 3$

⬆ ⬆ ⬆ 7 > 3 > 1 ⬆ 7 EXE

$$(\sqrt[7]{3})^7 = 3$$

(2) $\sqrt[8]{5^8} = 5$

⬆ ⬆ 8 > 5 ⬆ 8 EXE

$$\sqrt[8]{5^8} = 5$$

นอกจากนี้ รายการต่อไปนี้ยังแสดงสมบัติของราก เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$ โดยที่ m, n และ p คือจำนวนเต็มบวก

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} & (2) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & (3) \quad (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} \\ (4) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} & (5) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{mp}}} &= \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

นิยามของเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนตรรกยะ

เมื่อเลขชี้กำลังคือจำนวนตรรกยะ สมบัติของเลขยกกำลังนั้นจะกำหนดให้ $a > 0$ และ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก เราสามารถกำหนดรายการต่อไปนี้ได้

$$(1) \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (2) \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

explanation

สำหรับสมบัติของเลขยกกำลัง $(a^m)^n = a^{mn}$ ให้พิจารณาว่า m คือ $\frac{1}{m}$ และ n คือ m

จาก $(a^{\frac{1}{m}})^m = a^{\frac{1}{m} \times m} = a$ เราได้รู้ว่า $a^{\frac{1}{m}}$ คือรากที่ m ของ a ดังนั้น เราจึงได้ $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$

นอกจากนี้ ด้วยสมบัติของเลขยกกำลัง $(a^m)^n = a^{mn}$ เราสามารถพิจารณาได้ว่า m คือ $\frac{m}{n}$

จาก $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$ เราสามารถเข้าใจได้ว่า $a^{\frac{m}{n}}$ คือรากที่ n ของ a^m ดังนั้น เราจึงได้ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

สมบัติของเลขยกกำลังที่เป็นจำนวนตรรกยะ

สมบัติของเลขยกกำลังสำหรับจำนวนตรรกยะถูกกำหนดไว้ดังต่อไปนี้ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ เมื่อ r และ s คือจำนวนตรรกยะ

$$(1) \quad a^r a^s = a^{r+s} \quad (2) \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (3) \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$(4) \quad (ab)^r = a^r b^r \quad (5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

EXERCISE



① จงหาค่ารากต่อไปนี้

(1) รากที่ 2 ของ 4

เนื่องจาก $4 = 2^2$ รากที่ 2 ของ 4 คือ ± 2

รากที่ 2 เรียกอีกอย่างหนึ่งว่าสแควร์รูก ดังนั้นรากที่สองของ 4 ก็คือ ± 2

± 2

↑ √ 2 > 4 EXE

$2\sqrt{4}$

2

(2) รากที่ 3 ของ -27

เนื่องจาก $-27 = -3^3 = (-3)^3$ รากที่ 3 ของ -27 คือ -3

-3

↑ √ 3 > - 2 7 EXE

$3\sqrt{-27}$

-3

(3) รากที่ 6 ของ 64

เนื่องจาก $64 = 2^6$ รากที่ 6 ของ 64 คือ ± 2

± 2

↑ √ 6 > 6 4 EXE

$6\sqrt{64}$

2

(4) รากที่ 5 ของ 7

โดยใช้เครื่องหมายกรณฑ์ รากที่ 5 ของ 7 จะแสดงเป็น $\sqrt[5]{7}$

$$\sqrt[5]{7}$$

เนื่องจากเป็นจำนวนตรรกยะ ให้คำนวณค่าประมาณและยืนยันโดยการเพิ่มค่าดังกล่าวเป็นรากที่ 5

↑ √ 5 > 7 EXE

$\sqrt[5]{7}$

1.475773162

Ans √ 5 EXE

Ans⁵

7



2 จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a และ b

(1) $\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{a}}$

$$\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$$

$$a=5$$

ตรวจคำตอบ (ด้านซ้าย) – (ด้านขวา) = 0

↑ √ 5 > 6 > - 6 √ 1 = 5 EXE

$\sqrt[5]{6} - 6^{\frac{1}{5}}$

0

(2) $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{a}{b}}$

$$\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$$

$$a=3, b=4$$

ตรวจคำตอบ (ด้านซ้าย) – (ด้านขวา) = 0

↑ √ 4 > 5 √ 3 > - 5 √ 3 = 4 EXE

$\sqrt[4]{5^3} - 5^{\frac{3}{4}}$

0

PRACTICE

1 จงหาค่ารากต่อไปนี้

(1) รากที่ 2 ของ 9

(2) รากที่ 3 ของ -125

(3) รากที่ 4 ของ 16

(4) รากที่ 5 ของ 3

2 จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a และ b

(1) $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{a}{b}}$

(2) $\sqrt[3]{125^2} = a$

ADVANCED

EXERCISE



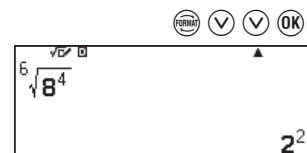
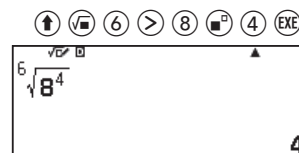
◆ จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a และ b

(1) $\sqrt[6]{8^4} = 2^a = b$

$$\sqrt[6]{8^4} = 8^{\frac{4}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

$a=2, b=4$

ตรวจคำตอบ

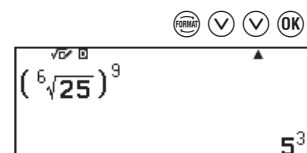
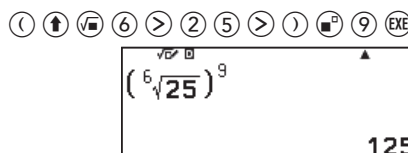


(2) $(\sqrt[6]{25})^9 = 5^a = b$

$$(\sqrt[6]{25})^9 = (25^{\frac{1}{6}})^9 = 25^{\frac{9}{6}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 5^{2 \times \frac{3}{2}} = 5^3 = 125$$

$a=3, b=125$

ตรวจคำตอบ



การคำนวณโดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีคำนวณโดยใช้สมบัติของเลขยกกำลังที่มีช่วงเป็นจำนวนตรรกยะ

EXERCISE



◆ จงหาคำตอบต่อไปนี้

$$(1) \quad 3^6 \times 3^4 \div 3^8$$

$$= 3^{6+4-8} = 3^2 = 9$$

(3) (6) (3) (4) (3) (8) (EXE)

$$3^6 \times 3^4 \div 3^8$$

9

$$(2) \quad (5^4)^2 \div (5^2)^3 \times \frac{1}{25}$$

$$= 5^8 \div 5^6 \times \frac{1}{5^2} = 5^8 \times 5^{-6} \times 5^{-2} = 5^{8-6-2} = 5^0 = 1$$

(1) (5) (4) (3) (1) (5) (3) (1) (2) (5) (EXE)

$$(5^4)^2 \div (5^2)^3 \times \frac{1}{25}$$

1

$$(3) \quad 4^2 \times 8^{-2} \times \frac{1}{2}$$

$$= (2^2)^2 \times (2^3)^{-2} \times 2^{-1} = 2^4 \times 2^{-6} \times 2^{-1} = 2^{4-6-1} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

(4) (8) (2) (1) (2) (EXE)

$$4^2 \times 8^{-2} \times \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{8}$

$$(4) \quad 27^3 \times 9^{-4} \div 3^2$$

$$= (3^3)^3 \times (3^2)^{-4} \times 3^{-2} = 3^9 \times 3^{-8} \times 3^{-2} = 3^{9-8-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

(2) (7) (3) (9) (4) (3) (EXE)

$$27^3 \times 9^{-4} \div 3^2$$

$\frac{1}{3}$

$$(5) \quad (\sqrt[3]{5})^4 \times \sqrt[3]{25}$$

$$= (5^{\frac{1}{3}})^4 \times (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3} \times 4} \times 5^{2 \times \frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} = 5^2 = 25$$

(1) (5) (3) (4) (3) (2) (5) (EXE)

$$(\sqrt[3]{5})^4 \times \sqrt[3]{25}$$

25

เลขนัยสำคัญ

TARGET

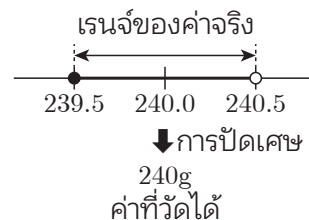
การเรียนรู้ว่าค่าที่วัดได้เป็นค่าประมาณ และการทำความเข้าใจวิธีแสดงค่าดังกล่าว

STUDY GUIDE

ความคลาดเคลื่อน

สมมติว่าคุณต้องชั่งน้ำหนักวัตถุที่มีน้ำหนัก 240 กรัม บนตาชั่งที่มีการไล่ระดับน้ำหนักขั้นต่ำ 1 กรัม ค่าที่ชั่งได้จะเป็นค่าประมาณ และเราจะกล่าวได้ว่าผลต่างระหว่าง

ค่าประมาณและค่าจริงคือค่าความคลาดเคลื่อน



$$\text{ค่าความคลาดเคลื่อน} = \text{ค่าประมาณ} - \text{ค่าจริง}$$

โดยพิจารณาค่าที่วัดได้ 240 กรัม เป็นค่าที่ปัดเศษเป็น 1 กรัม แล้วค่าจริงของ a ต้องอยู่ในเรนจ์ $239.5 \leq a < 240.5$ ซึ่งเราพิจารณาได้ว่าความคลาดเคลื่อนของค่าสัมบูรณ์นั้นน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.5

เลขนัยสำคัญ

พิจารณาค่าที่วัดได้ 2 ค่าต่อไปนี้

[a] น้ำหนัก 240 กรัมที่ชั่งบนตาชั่งที่มีการไล่ระดับน้ำหนักขั้นต่ำ 1 กรัม

[b] น้ำหนัก 240 กรัมที่ชั่งบนตาชั่งที่มีการไล่ระดับน้ำหนักขั้นต่ำ 10 กรัม

สำหรับ [a] เราปัดเศษเป็นค่าขั้นต่ำ 1 กรัม ซึ่งหมายความว่าเราสามารถเชื่อถือค่าที่วัดได้ 2, 4 และ 0

สำหรับ [b] เราปัดเศษเป็นค่าขั้นต่ำ 10 กรัม ซึ่งหมายความว่าเราสามารถเชื่อถือค่าที่วัดได้ 2 และ 4 แต่ตัวเลข 0 เป็นเพียงสัญลักษณ์แสดงตำแหน่ง

นี่คือเหตุผลที่แสดงตัวเลขเป็นค่าโดยประมาณ ซึ่งเรากล่าวได้ว่าตัวเลขที่เราเชื่อถือได้คือเลขนัยสำคัญ

เพื่อระบุจำนวนหลักของค่าที่วัดได้เป็นตัวเลขนัยสำคัญอย่างชัดเจน เรามักจะแสดงเป็น

สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ $a \times 10^n$ โดยที่ $1 \leq a < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

[a] $2.40 \times 10^2 (\text{g})$

[b] $2.4 \times 10^2 (\text{g})$

EXERCISE

จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) จงแสดง 617000 ลิตร เป็นตัวเลขนัยสำคัญ 3 หลัก

เนื่องจากมีเลขนัยสำคัญ 3 หลัก ผลจึงกลายเป็น $617000 \text{ L} = 6.17 \times 10^5 (\text{L})$

$$\underline{6.17 \times 10^5 (\text{L})}$$



check

กด $\odot$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด $\odot$ เลือก [Number Format (รูปแบบตัวเลข)] กด $\odot$ เลือก [Sci (วิทยาศาสตร์)] กด $\odot$ เลือก [Sci3 (วิทยาศาสตร์ 3)] (3 หลัก) กด $\odot$ กด $\odot$

Input/Output
Angle Unit
Number Format
Engineer Symbol

$\odot$ Fix
 $\odot$ Sci
 $\odot$ Norm :2

Sci1 : 1×10^1
Sci2 : 1.2×10^1
Sci3 : 1.23×10^1
Sci4 : 1.234×10^1

6 1 7 0 0 0 EXE
617000
6.17 $\times 10^5$

(2) จงแสดง 0.00005983 ม. เป็นตัวเลขนัยสำคัญ 4 หลัก

เนื่องจากมีเลขนัยสำคัญ 4 หลัก ผลจึงกลายเป็น $0.00005983 \text{ m} = \frac{5.983}{10^5} \text{ m} = 5.983 \times 10^{-5} (\text{m})$

$5.983 \times 10^{-5} (\text{m})$

check

กด $\equiv$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Number Format (รูปแบบตัวเลข)] กด OK เลือก [Sci (วิทยาศาสตร์)] กด OK เลือก [Sci4 (วิทยาศาสตร์ 4)] (4 หลัก) กด OK กด AC

Input/Output
Angle Unit
Number Format
Engineer Symbol

☐ Fix
☒ Sci :3
☐ Norm

Sci1 : 1×10^1
Sci2 : 1.2×10^1
Sci3 : 1.23×10^1
Sci4 : 1.234×10^1

0 . 0 0 0 0 5 9 8 3 EXE

0.00005983
 5.983×10^{-5}

PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงแสดง 425000000 กรัมเป็นเลขนัยสำคัญ 3 หลัก

(2) จงแสดง 0.000000813 ม. เป็นตัวเลขนัยสำคัญ 4 หลัก

การใช้เลขยกกำลังในชีวิตจริง

TARGET

การทำความเข้าใจการใช้เลขยกกำลังในชีวิตจริง

EXERCISE

- ◆ ระบบค่าจ้างมี 2 ประเภท [A] และ [B] ตามที่แสดงด้านล่าง สำหรับการรับเงินค่าจ้าง จงแก้โจทย์เกี่ยวกับระบบเงินเดือนต่อไปนี้

[A] ได้รับค่าจ้างเป็นเงิน 100 ดอลลาร์ต่อวันเป็นเวลา 30 วัน

[B] ได้รับค่าจ้างเป็นเงิน 1 ดอลลาร์สำหรับการทำงานวันที่ 1 หากทำงานครบ 2 วัน จะได้ค่าจ้างรวมเป็นสองเท่าของวันที่ 1 เป็นเงิน 2 ดอลลาร์ และหากทำงานครบ 3 วัน จะได้ค่าจ้างรวมเป็นสองเท่าของวันที่ 2 เป็นเงิน 4 ดอลลาร์ เป็นต้น โดยที่เงินค่าจ้างรวมจะเพิ่มเป็นสองเท่าของวันก่อนหน้าไปเรื่อย ๆ ทุกวันเป็นเวลา 30 วัน

- (1) จงหาค่าจ้างรวมทั้งหมดที่จะได้รับจากการทำงาน 30 วันตามระบบ [A]

$$100 \times 30 = 3000 \text{ (ดอลลาร์)}$$

3000 ดอลลาร์

- (2) จงหาค่าจ้างที่จะได้รับในวันที่ 10 ตามระบบ [B]

วันที่ 1 ได้ค่าจ้างเป็นเงิน 1 ดอลลาร์ วันที่ 2 ได้ค่าจ้างเป็นเงิน 2 ดอลลาร์ วันที่ 3 คือ $2^2 = 4$ เป็นเงิน 4 ดอลลาร์ วันที่ 4 คือ $2^3 = 8$ เป็นเงิน 8 ดอลลาร์ จนถึงวันที่ 10 คือ $2^9 = 512$ เป็นเงิน 512 ดอลลาร์

512 ดอลลาร์

- (3) ระบบค่าจ้างใดที่จ่ายเงินรวมทั้งหมดสูงที่สุดสำหรับการทำงาน 30 วัน

จะได้รับเงินค่าจ้างรวมทั้งหมด 3000 ดอลลาร์สำหรับการทำงาน 30 วันตามระบบ [A]

ในทางกลับกัน ตามระบบ [B] จะได้รับค่าจ้างรวมทั้งหมด $2^{29} = 536870912$ (≈ 540 ล้าน) สำหรับการทำงานในระยะเวลาเพียง 30 วัน เนื่องจากค่าจ้างตามระบบ [B] นั้นเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว

ในช่วงแรก ค่าจ้างตามระบบ [A] จะสูงกว่า แต่ค่าจ้างตามระบบ [B] นั้นเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ทำให้ค่าจ้างตามระบบ [B] แซงหน้าค่าจ้างรวมทั้งหมดตามเวลาที่ได้รับค่าจ้างในวันที่ 9

[B]



check

กด $\equiv$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด $\odot$ เลือก [Number Format (รูปแบบตัวเลข)] กด $\odot$ เลือก [Norm (รูปแบบปกติ)] กด $\odot$ เลือก [Norm2 (รูปแบบปกติ 2)] (รูปแบบทศนิยมปกติ) กด $\odot$ กด $\odot$

Input/Output
Angle Unit
Number Format
Engineer Symbol

$\odot$ Fix
 $\odot$ Sci :4
 $\odot$ Norm

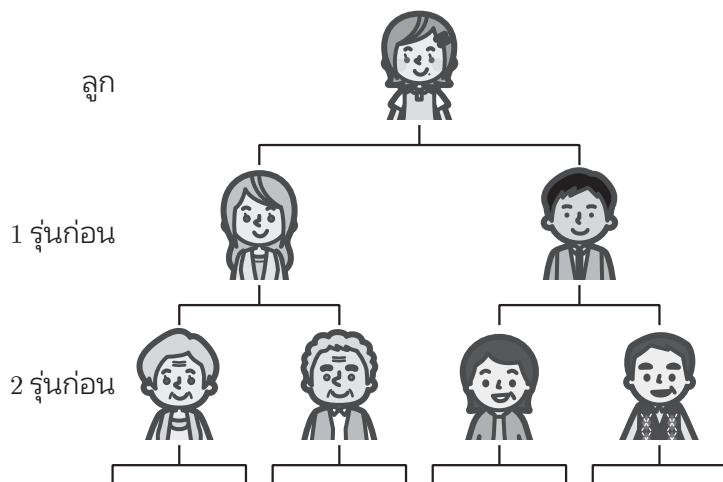
Norm1: 1.23×10^3
Norm2: 0.00123

② ③ ④ ⑤ EXE
 2^{29}
536870912

PRACTICE



- ลูกเกิดจากพ่อและแม่ “บรรพบุรุษรุ่นที่ 1 ของลูก” คือพ่อและแม่ ส่วนพ่อและแม่ต่างก็มีบรรพบุรุษรุ่นที่ 1 ของตัวเอง เมื่อนับจากมุมมองของลูก บรรพบุรุษเหล่านี้คือ “บรรพบุรุษรุ่นที่ 2 ของลูก” จากรูปภาพด้านล่าง เราจะเห็นว่า “บรรพบุรุษรุ่นที่ 1 ของลูก” มี 2 คน และ “บรรพบุรุษรุ่นที่ 2 ของลูก” มี 4 คน ในตอนนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้



- (1) จงหา “จำนวนบรรพบุรุษรุ่นที่ 5 ของลูก”

- (2) กำหนดให้ ระยะห่างของแต่ละรุ่นเป็น 30 ปี มีบรรพบุรุษที่รุ่นนับจากปี 2022 ย้อนกลับไป (ตอบเป็นจำนวนเต็ม)

- (3) กำหนดให้ คำตอบในข้อที่ (2) มีค่าเท่ากับ n “บรรพบุรุษรุ่นที่ n ของลูก” มีจำนวนกี่คน? จงหาคำตอบสำหรับ เลขนัยสำคัญ 3 หลัก

กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

TARGET

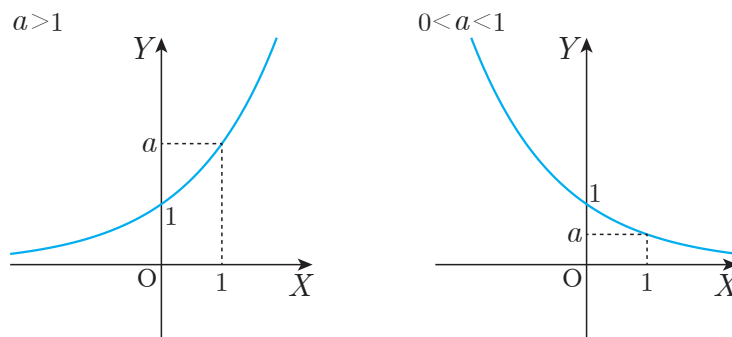
การทำความเข้าใจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

STUDY GUIDE

กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ฟังก์ชันของ x ในกราฟของ $y = a^x$ จะเรียกว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่มีฐาน a รายการต่อไปนี้แสดงสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

- (1) โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ คือจำนวนจริงทั้งหมด และเรนจ์คือจำนวนบวกทั้งหมด
- (2) กราฟผ่านจุด $(0, 1)$ และ $(1, a)$ และแกน X คือเส้นกำกับของกราฟ
- (3) เมื่อ $a > 1$ หาก $p > q$ แล้ว $a^p > a^q$
 $\Rightarrow$ เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของ y ก็เพิ่มขึ้นเช่นกัน
 เมื่อ $0 < a < 1$ หาก $p > q$ แล้ว $a^p < a^q$
 $\Rightarrow$ เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จะลดลง



การเลื่อนขนานและการสะท้อนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เราสามารถเลื่อนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลได้ตามที่แสดงด้านล่าง

การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานกับ p ตามแกน $X \Rightarrow y = a^{x-p}$

การเลื่อนขนานกับ q ตามแกน $Y \Rightarrow y = a^x + q$

การสะท้อน

การสะท้อนข้ามแกน $X \Rightarrow y = -a^x$

การสะท้อนข้ามแกน $Y \Rightarrow y = a^{-x}$

การสะท้อนที่สัมพันธ์กับจุดกำเนิดพิกัด $\Rightarrow y = -a^{-x}$

EXERCISE

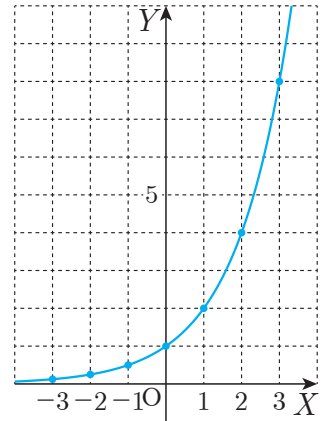
① วาดกราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$ ดังต่อไปนี้

(1) จงหาค่า y และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

(2) ในรูปภาพด้านขวา ให้วาดพิกัดสำหรับค่าต่าง ๆ ของ x และ y จาก (1)

(3) จงวาดกราฟให้สมบูรณ์โดยการเชื่อมจุดต่าง ๆ จาก (2)



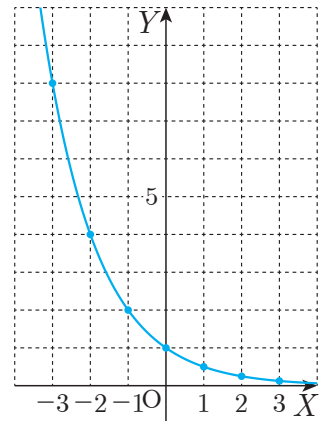
② วาดกราฟของฟังก์ชัน $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ดังต่อไปนี้

(1) จงหาค่า y และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(2) ในรูปภาพด้านขวา ให้วาดพิกัดสำหรับค่าต่าง ๆ ของ x และ y จาก (1)

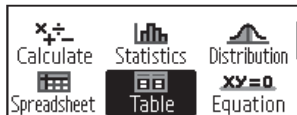
(3) จงวาดกราฟให้สมบูรณ์โดยการเชื่อมจุดต่าง ๆ จาก (2)



check

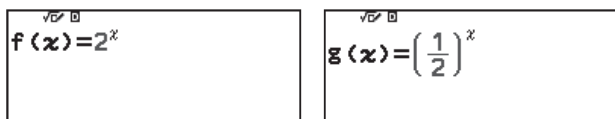
ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบกราฟ

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$



กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = 2^x$ กด EXE

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



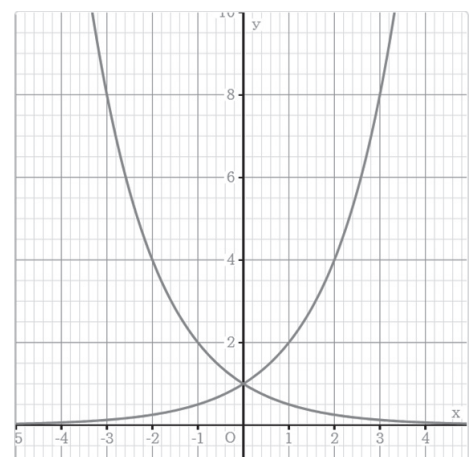
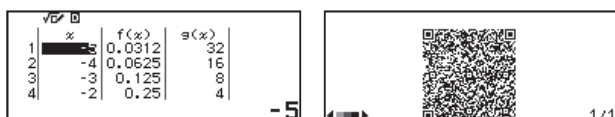
กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -5, End (สิ้นสุด): 5, Step (ขั้น): 1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE



กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



3 จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 3 รายการด้านล่าง

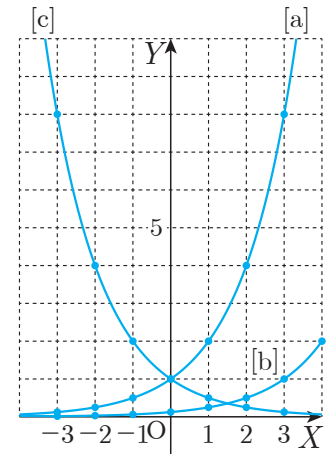
[a] ฟังก์ชัน $y = 2^x$

[b] ฟังก์ชัน $y = 2^{x-3}$

[c] ฟังก์ชัน $y = 2^{-x}$

(1) วาดกราฟของแต่ละฟังก์ชัน

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
[a] $y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
[b] $y = 2^{x-3}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
[c] $y = 2^{-x}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



(2) จงพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟ [b] เมื่อเทียบกับกราฟ [a]

[b] เลื่อนขนานตามแกน X ไปทางขวา 3 หน่วย เมื่อเทียบกับ [a]

(3) จงพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟ [c] เมื่อเทียบกับกราฟ [a]

[c] สะท้อนข้ามแกน Y เมื่อเทียบกับ [a]

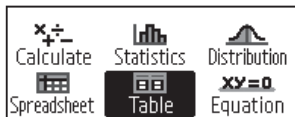


check

ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบกราฟ

เปรียบเทียบฟังก์ชัน $y = 2^x$ และฟังก์ชัน $y = 2^{x-3}$

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

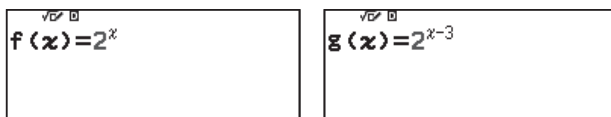


กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด $\odot$

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$

หลังจากป้อน $f(x) = 2^x$ กด $\odot$

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 2^{x-3}$



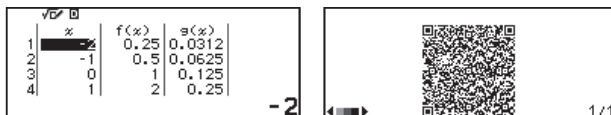
กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-2, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1]

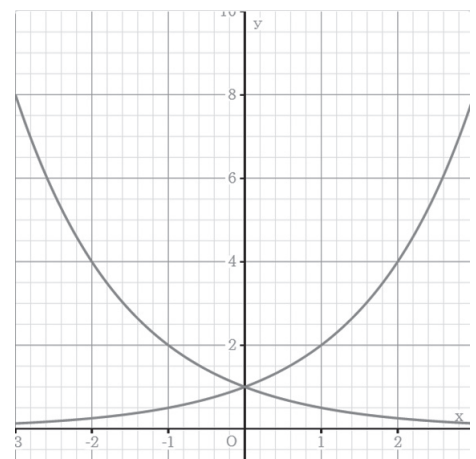
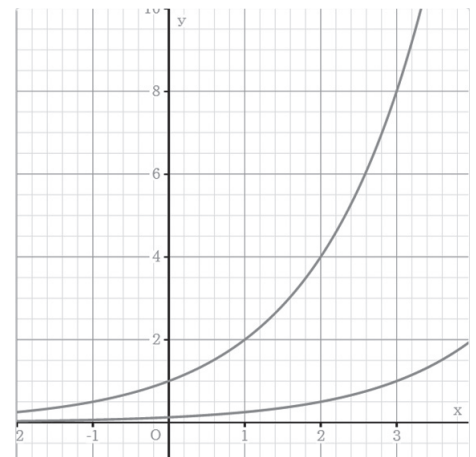
เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$



กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



เปรียบเทียบฟังก์ชัน $y = 2^x$ และฟังก์ชัน $y = 2^{x-3}$ ด้วยวิธีเดียวกัน

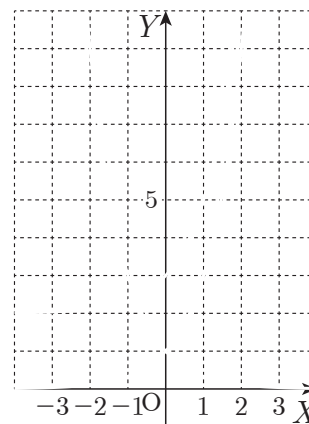


PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 3 รายการด้านล่าง

[a] ฟังก์ชัน $y = 3^x$ [b] ฟังก์ชัน $y = 3^x + 2$ [c] ฟังก์ชัน $y = 3^{-x}$

(1) วาดกราฟของแต่ละฟังก์ชัน



(2) จงพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟ [b] เมื่อเทียบกับกราฟ [a]

(3) จงพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟ [c] เมื่อเทียบกับกราฟ [a]

การใช้ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแก้โจทย์โดยใช้กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

EXERCISE



- ◆ สมมติว่าเราตรวจสอบการแพร่กระจายของโรคติดเชื้อทุกวัน และผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่าจำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่เพิ่มขึ้น r เท่าหลังจาก 1 วัน ตัวอย่างเช่น ในวันที่กำหนดไว้ มีผู้ติดเชื้อ 100 คน และหาก $r=1.5$ หลังจากผ่านไป 1 วัน ผู้ติดเชื้อรายใหม่จะมีจำนวน $100 \times 1.5 = 150$ (คน) และหลังจากผ่านไป 2 วัน จะมีผู้ติดเชื้อ $150 \times 1.5 = 225$ (คน) เมื่อคำนวณจาก 2 วันก่อน เราจะได้ 100×1.5^2 (คน) จากจุดนี้ เราสามารถเข้าใจได้ดังต่อไปนี้ หลังจาก x วัน จำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่จะเป็น y เท่าของจำนวนผู้ติดเชื้อเริ่มต้น ซึ่งเราสามารถแสดงเป็น $y = r^x$ ได้ ในตอนนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

- (1) กำหนดให้ $r=1.5$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง จงหาว่าจำนวนผู้ติดเชื้อวันแรกคิดเป็นกี่เท่าของจำนวนของผู้ติดเชื้อรายใหม่หลังจาก 10 วัน นอกจากนี้ยังกำหนดให้มีผู้ติดเชื้อ 100 คนในวันแรก จงหาว่าจะมีผู้ติดเชื้อรายใหม่กี่คนหลังจากผ่านไป 10 วัน

แทนที่ $x=10$ ใน $y = 1.5^x$ ก็จะได้ $y = 1.5^{10} = 57.66 \dots$ (เท่า)

จำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่หลังจาก 10 วันคือ

$$100 \times 57.66 \dots = 5766 \dots \text{ (คน)}$$

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด F1 เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

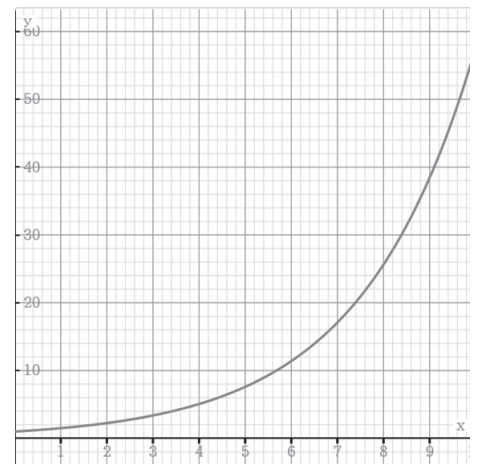
หลังจากป้อน $f(x) = 1.5^x$ แล้ว ให้กด EXE

กด F2 เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0, End (สิ้นสุด):10, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

x	$f(x)$	$g(x)$
0	1	
1	1.5	
2	2.25	
3	3.375	
4	5.0625	
5	7.59375	
6	11.390625	
7	17.0859375	
8	25.62890625	
9	38.443359375	
10	57.6650390625	



ประมาณ 58 เท่า ประมาณ 5800 คน

- (2) จงหาค่าสำหรับ r ที่จะทำให้จำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่ลดลง

ตัวอย่างเช่น ตรวจสอบว่าจะเกิดอะไรขึ้นเมื่อ $r=0.8$ และ 0.4

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด F1 เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = 0.8^x$ กด EXE

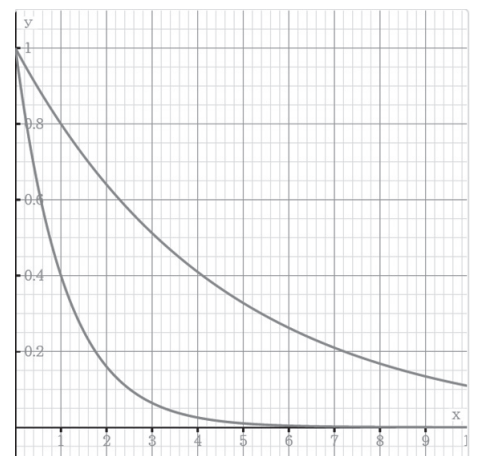
และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 0.4^x$

กด F2 เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0, End (สิ้นสุด):10, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

x	$f(x)$	$g(x)$
0	1	1
1	0.8	0.4
2	0.64	0.16
3	0.512	0.064
4	0.4096	0.0256
5	0.32768	0.01024
6	0.262144	0.004096
7	0.2097152	0.0016384
8	0.16777216	0.00065536
9	0.134217728	0.000262144
10	0.1073741824	0.0001048576



เมื่อ $0 < r < 1$ เส้นโค้งจะเคลื่อนลงไปทางขวา เราจึงรู้ว่าค่าลดลง

$0 < r < 1$

(3) จงหาเรนจ์ของค่า r โดยที่จำนวนผู้ติดเชื้อในวันที่ 20 นั้นน้อยกว่า 100 คน กำหนดให้มีผู้ติดเชื้อเริ่มต้น 10000 คน

เพื่อให้มีผู้ติดเชื้อ 100 คนหลังจาก 20 วัน อัตราส่วนของจำนวนผู้ติดเชื้อเริ่มต้นจะเป็น $\frac{100}{10000} = \frac{1}{100}$ (เท่า)

แทนที่ $x=20$ และ $y = \frac{1}{100}$ ใน $y = r^x$ เพื่อหา r

จาก $\frac{1}{100} = r^{20}$ เราจะได้ $r = \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{20}} = 0.794 \dots$

กำหนดให้หลังจาก x วัน จำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่จะเป็น z คน ซึ่งเราสามารถแสดงเป็น $z = 10000r^x$ ได้

กด เลือก [Table (ตาราง)] กด จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด

กด **⊙** เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด **OK** เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด **OK**

หลังจากป้อน $f(x) = 10000x^{20}$ กด (EXE)

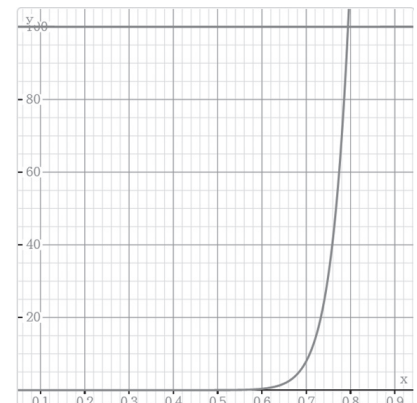
และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 100$

กด  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด 

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0.05, End (สิ้นสุด):0.95, Step (ขั้น):0.05]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด **ⓧ**

	x	$f(x)$	$g(x)$
14	0.7	7.9792	100
15	0.75	31.712	100
16	0.8	115.29	100
17	0.85	387.59	100



จากกราฟ เราจะพบว่าค่านั้นต่ำกว่า 0.8

นอกจากนี้ โดยใช้ฟังก์ชันการแก้ออกซ์เพื่อแก้ $10000x^{20} = 100$ เราจะได้ $x=0.794... \approx 0.79$

กด เลือก [Equation (สมการ)] กด

เลือก [Solver (แก้สมการ)] กด **OK**

Calculate Statistics Distribution
Spreadsheet Table **Equation**

ป้อนข้อมูล $10000x^{20} = 100$

① ② ③ ④ ⑤ × x $\frac{\square}{\square}$ ⑥ ⑦ > ↑ (⑧ ⑨ ⑩ EXE

$$10000x^{20} = 100$$

ป้อนข้อมูล $x = 0.8$

0 . 8 EXE EXE

$0 < r \leq 0.79$

PRACTICE



- อัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจเป็นตัวบ่งชี้การเติบโตทางเศรษฐกิจของประเทศ โดยพื้นฐานแล้ว รายได้ของพลเมืองเชื่อมโยงกับอัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจ กำหนดให้รายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยในช่วงเวลาหนึ่งคือ A และอัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจคือ r และหลังจาก x ปี รายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยจะเท่ากับ y แล้ว $y = A(1 + r)^x$ จึงถูกต้อง

[ตัวอย่าง] ในประเทศที่มีรายได้ประชาชาติเฉลี่ย 200 ดอลลาร์ โดยมีอัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจที่ 0.03 จากนั้นในระยะเวลา 10 ปี รายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยจะเท่ากับ $y = 200(1 + 0.03)^{10} \approx 268.8$ (ดอลลาร์)

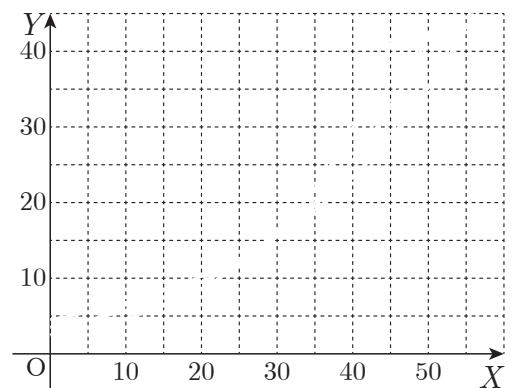
ซึ่งหมายความว่าในช่วง 10 ปี รายได้จะเท่ากับ $\frac{268.8 - 200}{200} = 0.344$ ซึ่งเพิ่มขึ้น 34.4% โดยเฉพาะ

ตารางต่อไปนี้แสดงรายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยและอัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจสำหรับ 3 ประเทศ A, B และ C ในตอนนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

ประเทศ	A	B	C
รายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ย (ดอลลาร์)	3.5	2.5	4.5
อัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจ	0.051	0.064	0.042

- (1) โดยอ้างอิง [ตัวอย่าง] จงหารายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยของ 3 ประเทศหลังจาก 10 ปี (ตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง) นอกจากนี้ จงหาเปอร์เซ็นต์ (%) ของรายได้ที่เพิ่มขึ้น (ตอบเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

- (2) จงวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของ x และ y ของ 3 ประเทศ



ความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีฐานเป็นจำนวนเดียวกัน

TARGET

การทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีฐานเป็นจำนวนเดียวกัน

STUDY GUIDE

สมบัติต่าง ๆ และความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ รายการต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$[a] \quad a^p = a^q \Leftrightarrow p = q$$

$$[b] \quad \text{เมื่อ } a > 1, \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p > q$$

$$\text{เมื่อ } 0 < a < 1, \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p < q$$

EXERCISE

① จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a

$$(1) \quad 3^x = 3^6 \Rightarrow x = a$$

จาก [a] ที่ด้านบน เราจะได้ $x = 6$

$$\underline{a=6}$$

$$(2) \quad 5^x = 25 \Rightarrow x = a$$

จาก [a] ที่ด้านบน เราจะได้ $x = 2$

$$\underline{a=2}$$

② จงเติมเครื่องหมายอสมการลงใน $\square$

$$(1) \quad 7^x > 7^4 \Rightarrow x \square 4$$

จาก [b] ที่ด้านบน เราจะได้ $x > 4$

$$\underline{>}$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^9 \Rightarrow x \square 9$$

จาก [b] ที่ด้านบน เราจะได้ $x > 9$

$$\underline{>}$$

PRACTICE

① จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a

$$(1) \quad 13^x = 13^3 \Rightarrow x = a$$

$$(2) \quad 2^x = 8^5 \Rightarrow x = a$$

② จงเติมเครื่องหมายอสมการลงใน $\square$

$$(1) \quad 0.3^x > 0.3^7 \Rightarrow x \square 7$$

$$(2) \quad 1.01^x < 1.01^8 \Rightarrow x \square 8$$

ความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเดียวกัน

TARGET

การทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเดียวกัน

STUDY GUIDE

ความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเดียวกัน

เมื่อ $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ และ $b \neq 1$ รายการต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$[a] \quad a^p = b^p \Leftrightarrow a = b$$

$$[b] \quad a^p < b^p \Leftrightarrow a < b$$

EXERCISE

◆ จงเรียงลำดับของ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ โดยใช้เครื่องหมายอสมการแสดงคำตอบ

เนื่องจาก $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ เราจะได้ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$



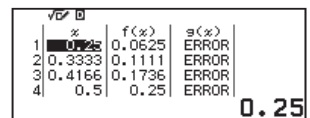
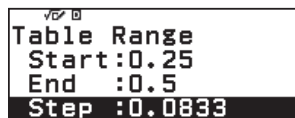
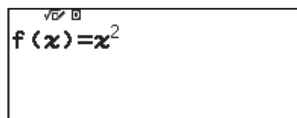
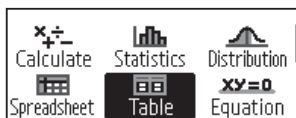
check

ใช้ตารางเพื่อคำนวณและเปรียบเทียบกำลังสองของแต่ละค่าในขั้นตอนเดียว

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$ หลังจากป้อน $f(x) = x^2$ กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$ หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): $\frac{1}{4}$, End (สิ้นสุด): $\frac{1}{2}$, Step (ขั้น): $\frac{1}{12}$] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$



PRACTICE

◆ จงเรียงลำดับของ $2^2, 3^2, 4^2$ โดยใช้เครื่องหมายอสมการแสดงคำตอบ

EXERCISE

◆ จงเรียงลำดับ โดยใช้เครื่องหมายอสมการแสดงคำตอบ

(1) $\sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{27}$

ทำให้ฐานเหมือนกัน ซึ่งก็คือ 3 แล้วจึงเปรียบเทียบ

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3^{-1}} = 3^{-\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}, \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^3} = 3^{\frac{3}{5}}$$

เนื่องจาก $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ เราจะได้ $\sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt{3} < \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{9}$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt{3} < \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{9}$$



Calculator interface showing $\sqrt{3}$ and the result 1.732050808

Calculator interface showing $\sqrt{\frac{1}{3}}$ and the result 0.5773502692

Calculator interface showing $\sqrt[3]{9}$ and the result 2.080083823

Calculator interface showing $\sqrt[5]{27}$ and the result 1.933182045

(2) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}$

กำหนดให้ $a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, b = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}, c = \sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}}$

จาก $a^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8, b^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9$ เราจะได้ $a^6 < b^6$ ดังนั้น $a < b$

จาก $a^{10} = (2^{\frac{1}{2}})^{10} = 2^5 = 32, c^{10} = (5^{\frac{1}{5}})^{10} = 5^2 = 25$ เราจะได้ $a^{10} > c^{10}$ ดังนั้น $a > c$

ดังนั้น เนื่องจาก $c < a < b$ เราจะได้ $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

$$\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

Calculator interface showing $\sqrt{2}$ and the result 1.414213562

Calculator interface showing $\sqrt[3]{3}$ and the result 1.44224957

Calculator interface showing $\sqrt[5]{5}$ and the result 1.379729661

สมการเอกซ์โพเนนเชียล

TARGET

การทำความเข้าใจการแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง

STUDY GUIDE

สมการเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อสมการมีตัวไม่ทราบค่าที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เราต้องทำให้ฐานเท่ากันก่อน จากนั้นจึงแก้เลขชี้กำลังในสมการ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จากนั้นเราจึงใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$a^p = a^q \Leftrightarrow p = q$$

EXERCISE



◆ จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $2^x = 16$

จาก $16 = 2^4$ เราจะได้ $2^x = 2^4$ ดังนั้น $x=4$

$$x=4$$

② ③ ④ EXE

(2) $9^x = \frac{1}{27}$

จาก $(3^2)^x = \frac{1}{3^3}$, $3^{2x} = 3^{-3}$ เราจะได้ $2x = -3$, $x = -\frac{3}{2}$

$$x = -\frac{3}{2}$$

9 ③ ④ ③ ⑤ ② EXE

(3) $5^{x-2} = \sqrt{5}$

จาก $5^{x-2} = 5^{\frac{1}{2}}$ เราจะได้ $x-2 = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{5}{2}$$

⑤ ③ ⑤ ⑤ ② > ② EXE ⑤ ⑤ EXE (FORMAT) ✓ OK

PRACTICE

◆ จงแก้สมการต่อไปนี้

$$(1) (\sqrt{2})^x = \frac{1}{4}$$

$$(2) 3^{2-x} = 81$$

$$(3) 5^{x-4} = 5^{3-2x}$$

ADVANCED

EXERCISE

◆ จงแก้สมการ $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$

(ด้านซ้าย): $(2^2)^x - 5 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 16 = (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16$

ในตอนนี้ ให้แทนที่ 2^x ด้วย X และแก้สมการกำลังสองสำหรับ X

$$X^2 - 10X + 16 = 0, (X - 2)(X - 8) = 0, X = 2, 8$$

ดังนั้น จาก $2^x = 2$ เราจะได้ $x=1$

นอกจากนี้ จาก $2^x = 8, 2^x = 2^3$ เราจะได้ $x=3$

$x=1,3$



check

ป้อนข้อมูล $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16$ และแทนที่ $x=1$ และ 3 เพื่อยืนยันว่าค่าของนิพจน์คือ 0

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK กด f(x) เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x)=4^x - 5 \times 2^{x+1} + 16$ กด EXE

กด f(x) เลือก [$f(x)$] กด OK หลังจากป้อน $f(1)$ แล้ว ให้กด EXE จากนั้นจึงป้อน $f(3)$ ด้วยวิธีเดียวกัน

$f(x)$ $g(x)$ Define $f(x)$ Define $g(x)$	$f(x)=4^x-5 \times 2^{x+1}+16$	$f(1)$	$f(3)$
--	--------------------------------	--------	--------

PRACTICE

◆ จงแก้สมการ $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแก้สมการที่มีจำนวนที่ไม่ทราบค่าที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง

STUDY GUIDE

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่ออสมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เราต้องทำให้ฐานเท่ากันก่อน จากนั้นจึงตรวจสอบว่าฐานมากกว่าหรือน้อยกว่า 1 หลังจากนั้น เราจะแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จากนั้นเราจึงใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\text{เมื่อ } a > 1, \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p > q$$

$$\text{เมื่อ } 0 < a < 1, \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p < q$$

EXERCISE

◆ จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $100^x < 0.001$

$$(10^2)^x < \frac{1}{10^3}, 10^{2x} < 10^{-3}$$

ฐานคือ 10 มากกว่า 1 ดังนั้นเราจึงได้ $2x < -3, x < -\frac{3}{2}$

$$x < -\frac{3}{2}$$



check

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺

100	$\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	1

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+2} \leq 81$

$$(3^{-1})^{3x+2} \leq 3^4 \text{ และ } 3^{-3x-2} \leq 3^4$$

ฐานคือ 3 มากกว่า 1 ดังนั้นเราจะได้ $-3x-2 \leq 4, -3x \leq 6$ และ $x \geq -2$

$$x \geq -2$$

check

กด ⑤ เลือก [Table (ตาราง)] กด ① จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด ①

กด ② เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด ① เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด ① หลัง

จากป้อน $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+2}$ กด ①

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 81$

กด ② เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด ① หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-4, End (สิ้นสุด):-1, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด ①

เราสามารถยืนยันได้ว่าเมื่อ $x < -2$ แล้ว $f(x) > g(x)$ และเมื่อ $x = -2$ แล้ว $f(x) = g(x)$ และเมื่อ $x > -2$ แล้ว $f(x) < g(x)$

	x	$f(x)$	$g(x)$
1	-4	59049	81
2	-3	2187	81
3	-2	81	81
4	-1	3	81

PRACTICE

◆ จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $0.01^x > 100$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1} \geq \sqrt{2}$

ADVANCED

EXERCISE

◆ จงแก้สมการ $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 < 0$

$$(2^2)^x - 7 \cdot 2^x - 8 < 0, (2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 < 0$$

ในตอนนี ให้แทนที่ 2^x ด้วย X และแก้สมการกำลังสองสำหรับ X

$$X^2 - 7X - 8 < 0, (X+1)(X-8) < 0, -1 < X < 8$$

จาก $X = 2^x > 0$ เราจะได้ $0 < X < 8$

ดังนั้น จาก $0 < 2^x < 8, 0 < 2^x < 2^3$ เราจะได้ $x < 3$

$$\underline{x < 3}$$

check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = 4^x - 7 \times 2^x - 8$ กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

เราสามารถยืนยันได้ว่าเมื่อ $x < 3$ แล้ว $f(x) < 0$ และเมื่อ $x = 3$ แล้ว $f(x) = 0$ และเมื่อ $x > 3$ แล้ว $f(x) > 0$

	x	$f(x)$	$g(x)$
1	1	-18	ERROR
2	2	-20	ERROR
3	3	0	ERROR
4	4	136	ERROR

3

PRACTICE

◆ จงแก้สมการ $(2^x - 4)(2^x - 8) \leq 0$

- (3) อัตราดอกเบี้ยรายปี r จะเปลี่ยนแปลงตามสภาพเศรษฐกิจ จงหาว่าที่อัตราดอกเบี้ยรายปี r ต้องเพิ่มขึ้นเพื่อให้เงินต้นเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในระยะเวลา 5 ปี
- เมื่อเงินต้นคือ A และอัตราดอกเบี้ยรายปีคือ r แล้วจำนวนรวม $A(1+r)^5$ ของเงินต้น A บวกดอกเบี้ยมีจำนวนถึง 2 เท่าของเงินต้นหลังจาก 5 ปี
- เนื่องจาก $A(1+r)^5 \geq 2A$, $(1+r)^5 \geq 2$, $1+r \geq 2^{\frac{1}{5}}$, $r \geq 2^{\frac{1}{5}} - 1$ และ $r \geq 0.1486\dots$ แล้ว $r=0.149$

② $\frac{1}{5}$ ① $\frac{1}{5}$ ⑤ $>$ $>$ $-$ ① EXE

$$2^{\frac{1}{5}} - 1$$

0.148698355

$r=0.149$

check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK เลือก [Solver (แก้สมการ)] กด OK

① ① $+$ x $)$ $\frac{1}{5}$ $>$ $\uparrow$ ① ② EXE Ans EXE EXE

$$(1+x)^5=2$$

Enter Initial Value
 $x = \text{Ans}$
 Execute

$$(1+x)^5=2$$

$x=$ 0.148698355
 $L-R=$ 0

PRACTICE

- ◆ เมื่ออัตราดอกเบี้ยทบต้นสำหรับ 1 ปีคือ 0.1 และเงินต้นคือ 10000 ดอลลาร์ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาจำนวนดอกเบี้ยหลังจาก 1 ปี

(2) จงหาผลรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยหลังจาก 5 ปี

(3) จงหาจำนวนปี เมื่อผลรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยมากกว่า 2 เท่าของเงินต้น (ตอบเป็นจำนวนเต็ม)

ความสัมพันธ์ระหว่างเลขยกกำลังและลอการิทึม

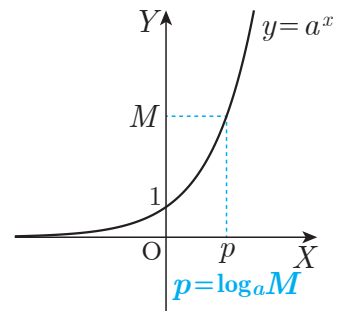
TARGET

การทำความเข้าใจประโยชน์ของลอการิทึมในหลักการเดียวกันกับเลขยกกำลัง

STUDY GUIDE

นิยามของลอการิทึม

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ดังนั้นในกราฟของ $y = a^x$ เราจึงกำหนดได้ว่ามีจำนวนจริงเพียง 1 ตัว ซึ่งก็คือ p ที่ตรงกับ $a^p = M$ ($M > 0$) ในส่วนนี้ ค่าของ p จะแสดงเป็น $\log_a M$ โดยที่ a คือฐานของ $\log$ (ลอการิทึม) ของ M และ $\log_a M$ สามารถแสดงผลลัพธ์ได้อีกรูปแบบหนึ่ง คือ ค่า a เมื่อทำการยกกำลังด้วยจำนวนจำนวนหนึ่ง จะมีค่าเท่ากับ M นอกจากนี้ เรายังกล่าวได้ว่าใน $\log_a M$ ค่า M นั้นคือ **แอนติลอการิทึม** ของลอการิทึม รายการต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ของ p และ M



$$a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$$

Ex. ใช้นิยามข้างต้นเพื่อแปลงค่าระหว่างเลขยกกำลังและลอการิทึม

$$2^p = 3 \Leftrightarrow p = \log_2 3$$

$$3^p = 5 \Leftrightarrow p = \log_3 5$$

เงื่อนไขของแอนติลอการิทึม เนื่องจาก $a^p > 0$ แอนติลอการิทึม M คือจำนวนบวก

เงื่อนไขของฐาน เช่นเดียวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $a > 0$ และ $a \neq 1$

นอกจากนี้ เราจะได้ว่า

$$\log_a a^p = p$$

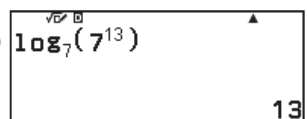


proof

ยืนยันว่า $\log_7 7^{13} = 13$

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

$\log_7 7 > 7 \text{ (1) (3) (EXE)}$



ความสัมพันธ์ระหว่างเลขยกกำลังและลอการิทึม

จากความสัมพันธ์ระหว่างเลขยกกำลังและลอการิทึม เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$(1) a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$$

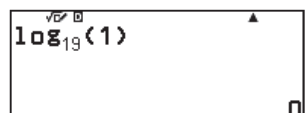
$$(2) a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$$

$$(3) a^{-1} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{a} = -1$$

proof

ยืนยันว่า $\log_{19} 1 = 0$

$\log_{19} 1 > 1 \text{ (1) (9) (EXE)}$



EXERCISE

① จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลังหรือลอการิทึม

(1) $5^p = 2$

แสดงเป็นลอการิทึมที่มีฐาน 5 และแอนติลอการิทึม 2

$$\underline{p = \log_5 2}$$

(2) $p = \log_2 8$

ลอการิทึมที่มีฐาน 2 และแอนติลอการิทึม 8

$$\underline{2^p = 8}$$



② จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

(1) $\log_3 3^4$

จาก $\log_a a^p = p$ เราจะได้ $\log_3 3^4 = 4$

4

$\log_3$ 3 > 3 $\log_3$ 4 =

$\log_3(3^4)$
4

(2) $\log_2 8$

$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

3

$\log_2$ 2 > 8 =

$\log_2(8)$
3

(3) $\log_2 1$

จาก $\log_a 1 = 0$ เราจะได้ $\log_2 1 = 0$

0

$\log_2$ 2 > 1 =

$\log_2(1)$
0

PRACTICE

1 จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลังหรือลอการิทึม

(1) $5^p = 13$

(2) $p = \log_3 81$

2 จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

(1) $\log_2 2^{17}$

(2) $\log_3 27$

(3) $\log_5 1$

ADVANCED

3 จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

(1) $\log_2 \frac{1}{4}$

(2) $\log_3 \sqrt{27}$

(3) $\log_5 \sqrt[3]{125}$

(4) $\log_{10} \frac{1}{10000}$

สมบัติต่าง ๆ ของลอการิทึม

TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติของลอการิทึม

STUDY GUIDE

สมบัติต่าง ๆ ของลอการิทึม

สำหรับ $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$ และ $N > 0$ ดังนั้นเมื่อ k คือจำนวนจริง สมบัติต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$(1) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

ลอการิทึมของผลคูณคือผลรวมของลอการิทึม

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

ลอการิทึมของผลหารคือผลต่างของลอการิทึม

$$(3) \log_a M^k = k \log_a M$$

ลอการิทึมของกำลังที่ k คือ k เท่าของลอการิทึม

explanation

หากเราปล่อยให้ $\log_a M = p$, $\log_a N = q$ แล้วเราจะได้ $M = a^p$, $N = a^q$

$$(1) \text{ จาก } MN = a^p a^q = a^{p+q} \text{ เราจะได้ } \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$$

$$(2) \text{ จาก } \frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \text{ เราจะได้ } \log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$$

$$(3) \text{ จาก } M^k = (a^p)^k = a^{pk} \text{ เราจะได้ } pk = \log_a M^k, \log_a M^k = pk = k \log_a M$$

EXERCISE



◆ จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$(1) \log_2 16 + \log_2 64$$

$$= \log_2 16 \cdot 64 = \log_2 2^4 \cdot 2^6 = \log_2 2^{10} = 10$$

10

(log+) 2 > 1 6 > + (log+) 2 > 6 4 EXE

$$\log_2(16) + \log_2(64)$$

10

$$(2) \log_3 324 - \log_3 4$$

$$= \log_3 \frac{324}{4} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

4

(log+) 3 > 3 2 4 > - (log+) 3 > 4 EXE

$$\log_3(324) - \log_3(4)$$

4

2

2

ADVANCED

2] จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1) $\log_5 \sqrt[4]{125}$

(2) $\log_2 \sqrt{96} - \log_2 \sqrt{3}$

การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม

TARGET

การทำความเข้าใจการเปลี่ยนฐานของลอการิทึม

STUDY GUIDE

การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม

เราสามารถเปลี่ยนฐานของลอการิทึมเป็นค่าอื่นได้ การเปลี่ยนฐานจะเพิ่มช่วงของการคำนวณลอการิทึมอย่างมาก เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนบวก และ $a \neq 1$, $b \neq 1$ และ $c \neq 1$ ดังนั้นการเปลี่ยนฐานของลอการิทึมต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{และจะได้ว่า} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

explanation

เมื่อกำหนดให้ $\log_a b = p$ เราจะได้ $a^p = b$

เนื่องจาก $c > 0$ และ $c \neq 1$ และสำหรับฐาน c เมื่อทำการนำลอการิทึมฐาน c ใส่เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\log_c a^p = \log_c b, p \log_c a = \log_c b$$

$$\text{จาก } a \neq 1 \text{ แล้ว } \log_c a \neq 0 \text{ ดังนั้นเราจึงได้ } p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\text{ด้วยวิธีการนี้ เราจะได้ } \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

EXERCISE



◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ $\log_8 32$

แปลง $8 = 2^3, 32 = 2^5$ เป็นฐาน 2

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3}$$

5
3

(log) 8 > 3 2 EXE

(2) จงหาค่าของ $\log_{\sqrt{27}} \frac{1}{81}$

แปลง $27 = 3^3, 81 = 3^4$ เป็นฐาน 3

$$\log_{\sqrt{27}} \frac{1}{81} = \frac{\log_3 \frac{1}{81}}{\log_3 \sqrt{27}} = \frac{\log_3 3^{-4}}{\log_3 \sqrt{3^3}} = \frac{\log_3 3^{-4}}{\log_3 3^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4}{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{3}$$

8
-3

(log) (1/x) 2 7 > > 1 (1/x) 8 1 EXE

(3) ทำให้ $\log_5 2 \cdot \log_8 25$ เป็นรูปอย่างง่าย

เปลี่ยนฐานของ $\log_8 25$ เป็น 5

$$\log_5 2 \cdot \log_8 25 = \log_5 2 \cdot \frac{\log_5 25}{\log_5 8} = \log_5 2 \cdot \frac{\log_5 5^2}{\log_5 2^3} = \log_5 2 \cdot \frac{2}{3 \log_5 2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$

(log=) 5 > 2 > (log=) 8 > 2 5 EXE

$$\log_5(2) \log_8(25) = \frac{2}{3}$$

OTHER METHODS

เปลี่ยนฐานเป็น 2

$$\log_5 2 \cdot \log_8 25 = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5^2}{\log_2 2^3} = \frac{1}{\log_2 5} \cdot \frac{2 \log_2 5}{3} = \frac{2}{3}$$

PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ $\log_9 \frac{1}{27}$

(2) จงหาค่าของ $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

(3) ทำให้ $\log_2 27 \cdot \log_3 16$ เป็นรูปอย่างง่าย

ADVANCED

EXERCISE



◆ จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1) $(\log_2 27 - \log_8 3)(\log_9 16 - \log_{81} 8)$

เปลี่ยนฐานเป็น 2

$$= \left(\log_2 27 - \frac{\log_2 3}{\log_2 8} \right) \left(\frac{\log_2 16}{\log_2 9} - \frac{\log_2 8}{\log_2 81} \right) = \left(\log_2 3^3 - \frac{\log_2 3}{\log_2 2^3} \right) \left(\frac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2} - \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3^4} \right)$$

$$= \left(3\log_2 3 - \frac{\log_2 3}{3} \right) \left(\frac{4}{2\log_2 3} - \frac{3}{4\log_2 3} \right) = \frac{8\log_2 3}{3} \cdot \frac{5}{4\log_2 3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{3}$$

10
3

(((log) 2 > 2 7 > - (log) 8 > 3 >)

(((log) 9 > 1 6 > - (log) 8 1 > 8 >) (EXE)

$(\log_2(27) - \log_8(3))$
$\frac{10}{3}$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

เปลี่ยนฐานเป็น 10

$$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2^2}{\log_{10} 2} = \frac{2\log_{10} 2}{\log_{10} 2} = 2$$

2

(log) 2 > 3 > (log) 3 > 4 (EXE)

$\log_2(3) \log_3(4)$
2

PRACTICE

◆ จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1) $(\log_5 81 - \log_{25} 9)(\log_3 125 - \log_9 625)$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติต่าง ๆ และวิธีเขียนกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

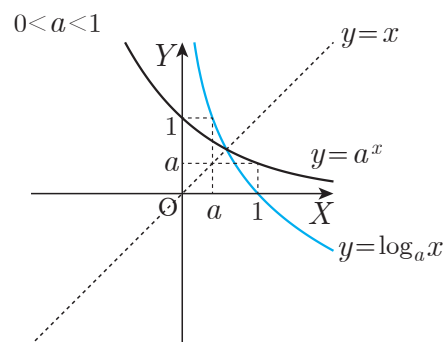
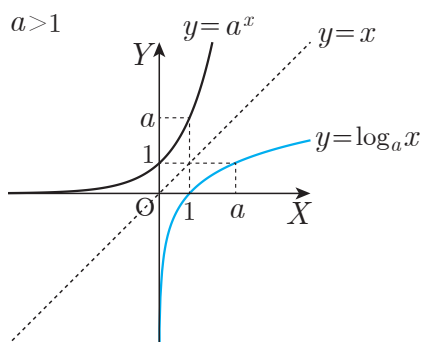
STUDY GUIDE

กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ สำหรับจำนวนบวก x และ y ใด ๆ สามารถเป็นจำนวนได้เพียง 1 จำนวนเท่านั้น ซึ่งเราสามารถแสดงเป็น $x = \log_a y$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า x คือฟังก์ชันของ y โดยการเปลี่ยน x และ y เราจะได้ $y = \log_a x$ โดยแสดงฟังก์ชันของ x ที่มีฐาน a ซึ่งจะเรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึม กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ และกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ นั้นสมมาตรกันตลอดเส้น $y=x$ เนื่องจาก x และ y มีการเปลี่ยนแปลง

รายการต่อไปนี้แสดงสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันลอการิทึม

- (1) โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ คือ $x > 0$ และเรนจ์คือจำนวนจริงทั้งหมด
- (2) กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ และกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ นั้นสมมาตรกันตลอดเส้น $y=x$
- (3) กราฟเคลื่อนผ่านจุด $(1, 0)$ และ $(a, 1)$ และกลายเป็นเส้นโค้งที่มีแกน Y เป็นเส้นกำกับ
- (4) เมื่อ $a > 1$ เส้นโค้งจะขึ้นไปทางขวา และเมื่อ $0 < a < 1$ เส้นโค้งจะลงไปทางขวา



การเลื่อนขนานและการสะท้อนกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เราสามารถแปลกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ ได้ตามที่แสดงด้านล่าง

การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานกับ p ตามแกน $X \Rightarrow y = \log_a(x - p)$

การเลื่อนขนานกับ q ตามแกน $Y \Rightarrow y = \log_a x + q$

การสะท้อน

การสะท้อนข้ามแกน $X \Rightarrow y = \log_{\frac{1}{a}} x \quad (y = -\log_a x)$

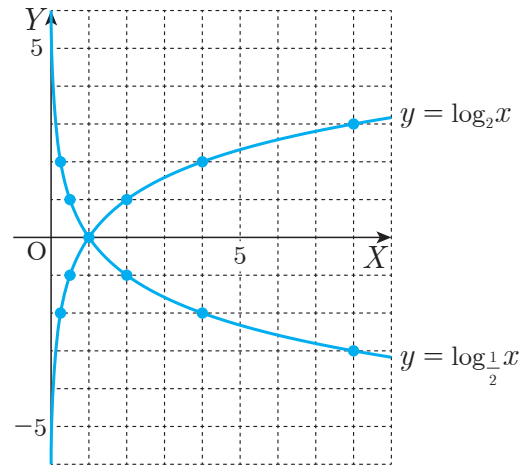
EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 2 รายการด้านล่าง

[a] ฟังก์ชัน $y = \log_2 x$

[b] ฟังก์ชัน $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
[a] $y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3
[b] $y = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3



(1) จงหาค่า y และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(2) จงวาดกราฟของ [a] และ [b]

(3) จงเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน [b] เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน [a]

จาก $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x$ กราฟของ [a] และ [b] นั้นสมมาตรกันตลอดแกน X

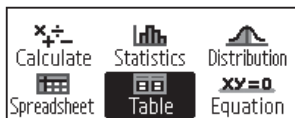
[b] สะท้อน [a] ผ่านแกน X



check

ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบกราฟ

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ จากนั้นจึงใส่ข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

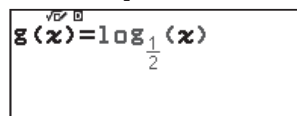


กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด $\odot$

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$

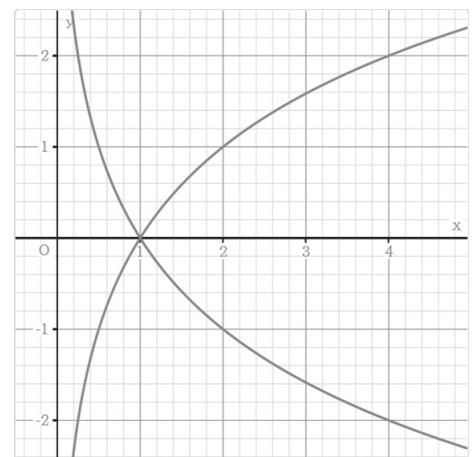
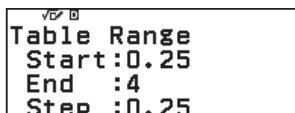
หลังจากป้อน $f(x) = \log_2 x$ กด $\odot$

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0.25, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):0.25] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$



คุณสามารถวาดกราฟได้โดยการเขียนจุดต่าง ๆ จากตารางบนกระดาษกราฟ นอกจากนี้ สำหรับแต่ละค่าของ x

เครื่องหมายค่าของ $f(x)$ และ $g(x)$ นั้นตรงข้ามกัน เป็นจำนวนลบหรือจำนวนบวก เราจึงทราบได้ว่ากราฟจะสมมาตรกันตลอดแกน X

x	$f(x)$	$g(x)$
0.25	-2	2
0.5	-1	1
1	0	0
2	1	-1
4	2	-2

x	$f(x)$	$g(x)$
1.25	0.3219	-0.3219
1.5	0.5849	-0.5849
1.75	0.8073	-0.8073
2	1	-1

x	$f(x)$	$g(x)$
2.25	1.1699	-1.1699
2.5	1.3219	-1.3219
2.75	1.4594	-1.4594
3	1.5849	-1.5849

x	$f(x)$	$g(x)$
3.25	1.7004	-1.7004
3.5	1.8073	-1.8073
3.75	1.9068	-1.9068
4	2	-2

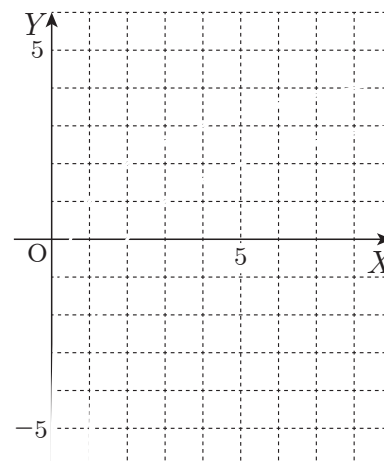
PRACTICE

① จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 2 รายการด้านล่าง

[a] ฟังก์ชัน $y = \log_2(x - 1)$

[b] ฟังก์ชัน $y = \log_2 x + 1$

(1) วาดกราฟของแต่ละฟังก์ชัน



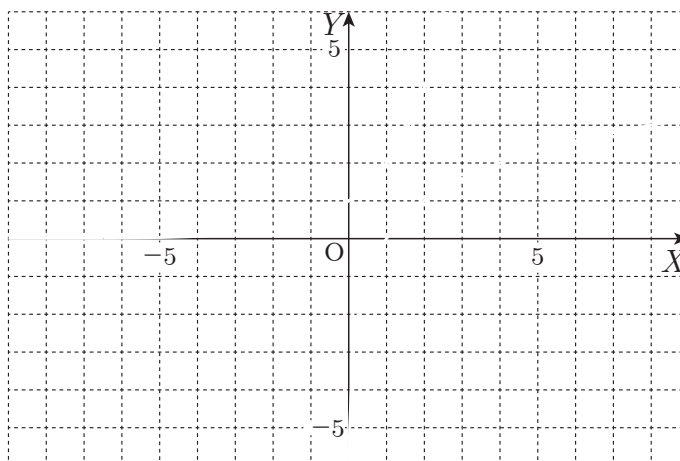
(2) จงเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน [a] เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน $y = \log_2 x$

(3) จงเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน [b] เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน $y = \log_2 x$

๒ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 2 รายการด้านล่าง

[a] ฟังก์ชัน $y = \log_2 x$ [b] ฟังก์ชัน $y = 2^x$

(1) วาดกราฟของแต่ละฟังก์ชัน



(2) จงเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน [a] เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน [b]

สมบัติต่าง ๆ และขนาดของฟังก์ชันลอการิทึม

TARGET

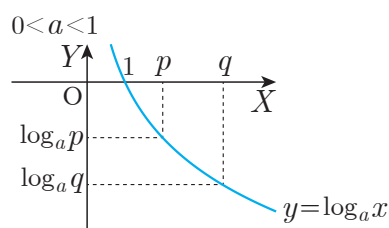
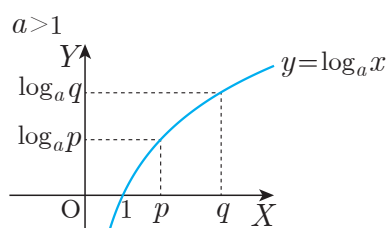
การทำความเข้าใจวิธีใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมเพื่อเปรียบเทียบขนาดของลอการิทึม

STUDY GUIDE

สมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันลอการิทึม

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ดังนั้นสำหรับฟังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ สมบัติต่าง ๆ ต่อไปนี้จึงถูกต้อง

- (1) **กราฟเคลื่อนผ่านจุด $(1, 0)$ และ $(a, 1)$ และกลายเป็นเส้นโค้งที่มีแกน Y เป็นเส้นกำกับ**
- (2) **การสมมูล** หาก $p = q (> 0)$ แล้ว $\log_a p = \log_a q$
- (3) **ขนาด**
 - เมื่อ $a > 1$ และหาก $0 < p < q$ แล้ว $\log_a p < \log_a q$
(เนื่องจากค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จึงเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน)
 - เมื่อ $0 < a < 1$ และหาก $0 < p < q$ แล้ว $\log_a p > \log_a q$
(เนื่องจากค่าของ x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จึงลดลง)



ขนาดของลอการิทึม

การหาลอการิทึม

ด้วยการใช้สมบัติลอการิทึม เราสามารถหา นิพจน์ $\log_a a^k = \log_a l \dots$ (ii) จาก $a^k = l \dots$ (i) ได้ การแปลงนิพจน์ (i) เป็นนิพจน์เช่นเดียวกับ (ii) นิพจน์ลอการิทึมที่มีฐานร่วม a จะเรียกว่า **หาค่าลอการิทึมที่มีฐาน a**

การเปรียบเทียบขนาดของลอการิทึม

- (a) **ทำฐานให้เหมือนกัน** จากนั้นจึงเปรียบเทียบขนาดของแอนติลอการิทึม

Ex. เปรียบเทียบขนาดของ $\log_3 5$ และ $\log_3 6$

เนื่องจาก $3 > 1$ หาก $p < q$ ดังนั้นเราจะได้ $\log_a p < \log_a q$

เนื่องจาก $5 < 6$ เราจะได้ $\log_3 5 < \log_3 6$

- (b) **เปรียบเทียบขนาดกับ 1** เพื่อประเมินขนาด

Ex. เปรียบเทียบขนาดของ $\log_3 2$ และ $\log_2 3$

ซึ่งเราจะได้ $\log_3 2 < \log_3 3 = 1, \log_2 3 > \log_2 2 = 1$

ดังนั้น เราจึงได้ $\log_3 2 < \log_2 3$

EXERCISE

◆ ใช้เครื่องหมายอสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงขนาดของตัวเลขต่อไปนี้

(1) $\log_2 7, \log_2 5, \log_2 9$

เนื่องจากฐาน $2 > 1$ ขนาดของแอนติลอการิทึมและ
ขนาดของลอการิทึมนั้นจึงตรงกัน

จาก $5 < 7 < 9$ เราจะได้ $\log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 9$

$$\log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 9$$

(2) $\log_{0.7} 2, \log_{0.7} 3, \log_{0.7} 4$

เนื่องจากฐาน $0.7 < 1$ ขนาดของแอนติลอการิทึมและ
ขนาดของลอการิทึมนั้นจึงกลับกัน

จาก $2 < 3 < 4$ เราจะได้ $\log_{0.7} 4 < \log_{0.7} 3 < \log_{0.7} 2$

$$\log_{0.7} 4 < \log_{0.7} 3 < \log_{0.7} 2$$



check

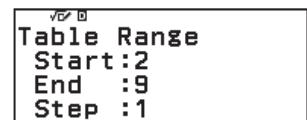
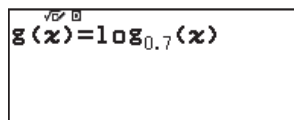
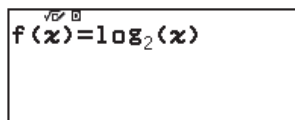
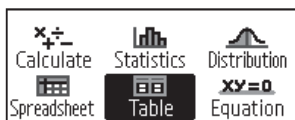
ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบ

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด 2ND เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจาก
ป้อน $f(x) = \log_2 x$ กด EXE

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = \log_{0.7} x$

กด 2ND เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):2, End (สิ้นสุด):9, Step (ขั้น):1] เลือก
[Execute (ดำเนินการ)] กด EXE



	x	f(x)	g(x)
1	2		
2	3	1.5849	-1.943
3	4	2	-3.08
4	5	2.3219	-3.886
			-4.512

2

	x	f(x)	g(x)
5	6	2.5849	-5.023
6	7	2.8073	-5.455
7	8	3	-5.83
8	9	3.1699	-6.16

9



สำหรับ $f(x) = \log_2 x$ เนื่องจาก $f(5) = 2.3219$, $f(7) = 2.8073$ และ

$f(9) = 3.1699$ เราจึงสามารถยืนยัน $\log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 9$ ได้

สำหรับ $g(x) = \log_{0.7} x$ เนื่องจาก $g(2) = -1.943$, $g(3) = -3.08$ และ

$g(4) = -3.886$ เราจึงสามารถยืนยัน $\log_{0.7} 4 < \log_{0.7} 3 < \log_{0.7} 2$ ได้

PRACTICE

◆ ใช้เครื่องหมายอสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงขนาดของตัวเลขต่อไปนี้

(1) $\log_{1.1} 1.4, \log_{1.1} 1.3, \log_{1.1} 1.2$

(2) $\log_{\frac{3}{7}} 8, \log_{\frac{3}{7}} 9, \log_{\frac{3}{7}} 10$

EXERCISE



◆ ใช้เครื่องหมายอสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงขนาดของตัวเลขต่อไปนี้

(1) $\log_2 \sqrt[3]{125}, \frac{1}{2} \log_2 36, 2$

เนื่องจากฐาน $2 > 1$ ทำให้ฐานเท่ากันกับ 2

$$\log_2 \sqrt[3]{125} = \log_2 (5^3)^{\frac{1}{3}} = \log_2 5, \frac{1}{2} \log_2 36 = \log_2 (6^2)^{\frac{1}{2}} = \log_2 6, 2 = 2 \log_2 2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$$

จาก $4 < 5 < 6$ เราจะได้ $2 < \log_2 \sqrt[3]{125} < \frac{1}{2} \log_2 36$

$$2 < \log_2 \sqrt[3]{125} < \frac{1}{2} \log_2 36$$

(log) (2) (>) (1/x) (3) (>) (1) (2) (5) (EXE)

$$\log_2 (\sqrt[3]{125})$$

2.321928095

(1) (1/x) (2) (>) (log) (2) (>) (3) (6) (EXE)

$$\frac{1}{2} \log_2 (36)$$

2.584962501

(2) $\log_3 \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 64, -1$

เนื่องจากฐาน $3 > 1$ ทำให้ฐานเท่ากันกับ 3

$$\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 64 = \log_{\frac{1}{3}} (2^6)^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} 4 = \frac{\log_3 4}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 4}{\log_3 3^{-1}} = -\log_3 4 = \log_3 4^{-1} = \log_3 \frac{1}{4},$$

$$-1 = -\log_3 3 = \log_3 3^{-1} = \log_3 \frac{1}{3}$$

จาก $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ เราจะได้ $\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 64 < -1 < \log_3 \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 64 < -1 < \log_3 \frac{1}{2}$$

(log) (3) (>) (1) (1/x) (2) (EXE)

$$\log_3 \left(\frac{1}{2} \right)$$

-0.6309297536

(1) (1/x) (3) (>) (log) (1) (1/x) (3) (>) (6) (4) (EXE)

$$\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} (64)$$

-1.261859507

(3) $\log_{0.3} 5, \log_2 5, \log_6 5$

ก่อนอื่นให้กำหนดขนาดของ 0 และ 1

ฐานของ $\log_{0.3} 5$ น้อยกว่า 1 และแอนติลอการิทึมมากกว่า 1 ดังนั้นจึงเป็นจำนวนลบ

จาก $\log_2 5 > \log_2 2 = 1, \log_6 5 < \log_6 6 = 1$ เราจะได้ $\log_{0.3} 5 < \log_6 5 < \log_2 5$

$$\log_{0.3} 5 < \log_6 5 < \log_2 5$$

(log) (0) (.) (3) (>) (5) (EXE)

$$\log_{0.3} (5)$$

-1.336772647

(log) (2) (>) (5) (EXE)

$$\log_2 (5)$$

2.321928095

(log) (6) (>) (5) (EXE)

$$\log_6 (5)$$

0.8982444017

PRACTICE

◆ ใช้เครื่องหมายอสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงขนาดของตัวเลขต่อไปนี้

(1) $\log_5 \sqrt[5]{243}, 1, \frac{1}{4} \log_5 256$

(2) $\frac{1}{7} \log_{0.1} 128, -1, \log_{10} \frac{1}{5}$

สมการและอสมการลอการิทึม

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแก้โจทย์โดยใช้สมการและอสมการลอการิทึม

STUDY GUIDE

สมการลอการิทึม

เมื่อ $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$ และ $N > 0$ จากนั้นจึงแก้โจทย์โดยใช้สมการลอการิทึมดังต่อไปนี้

(1) ตรวจสอบว่าฐาน > 0 (ฐาน $\neq 1$) และแอนติลอการิทึม > 0

(2) ใช้สมบัติลอการิทึมเพื่อเปลี่ยนรูปแบบเป็น

$$\log_a M = \log_a N$$

(3) ใช้ความสัมพันธ์ทางด้านขวาเพื่อแก้สมการ

(4) ตรวจสอบว่าคำตอบของ (3) นั้นตรงกับเงื่อนไขของ (1) หรือไม่

โปรดทราบว่าคำตอบของสมการเอกซ์โพเนนเชียลอาจอยู่ในรูปแบบลอการิทึม

$$\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$$

อสมการลอการิทึม

เมื่อ $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$ และ $N > 0$ จากนั้นจึงแก้โจทย์โดยใช้สมการลอการิทึมดังต่อไปนี้

(1) กำหนดเงื่อนไขของฐานและแอนติ

ลอการิทึม และจัดเรียงลอการิทึม

(2) ใช้ความสัมพันธ์ทางด้านขวาเพื่อสร้าง

อสมการแอนติลอการิทึมจากขนาดของฐาน

(3) ตรวจสอบว่าคำตอบของ (2) นั้นตรงกับ

เงื่อนไขหรือไม่

โปรดทราบว่าคำตอบของอสมการเอกซ์โพเนน

เชียลอาจอยู่ในรูปแบบลอการิทึม

เมื่อ $a > 1$

$$\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow 0 < M < N$$

เมื่อ $0 < a < 1$

$$\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow 0 < N < M$$

EXERCISE



① จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $\log_3 x = -2$

แอนติลอการิทึม $x > 0$

ในตอนนี้เราสามารถแปลง $\log_3 x = -2$ เป็น $\log_3 x = \log_3 3^{-2}$ เพื่อที่จะได้ $x = 3^{-2}$

ดังนั้น เราจึงได้ $x = \frac{1}{9}$ ซึ่งตรงกับเงื่อนไข $x > 0$

$$x = \frac{1}{9}$$

(log) 3 > 1 = 9 EXE

$$\log_3 \left(\frac{1}{9} \right) = -2$$

OTHER METHODS

เราสามารถแก้โจทย์นี้ได้จากนิยามของลอการิทึม

จาก $\log_3 x = -2$ เราจะได้ $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$

แอนติลอการิทึม $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$ เป็น $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$ เพื่อที่จะได้ $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

ดังนั้น เราจึงได้ $x = \frac{1}{8}$ ซึ่งตรงกับเงื่อนไข $x > 0$

$x = \frac{1}{8}$

$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8}\right)$

(3) $2^x = 3$

นำลอการิทึมฐาน 2 ใส่เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ เนื่องจากเป็น $\log_2 2^x = \log_2 3$ เราจะได้ $x = \log_2 3$

$x = \log_2 3$

คำนวณ $2^{\log_2 3}$

$2^{\log_2(3)}$

OTHER METHODS

เราสามารถแก้โจทย์นี้ได้จากนิยามของลอการิทึม

จาก $2^x = 3$ เราจะได้ $x = \log_2 3$

2 จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $\log_2 x < 3$

ฐาน $2 > 1$ ดังนั้นแอนติลอการิทึมคือ $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง $\log_2 x < 3$ เป็น $\log_2 x < \log_2 2^3$ เพื่อที่จะได้ $x < 2^3$

ดังนั้น เราจึงได้ $x < 8$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของแอนติลอการิทึม $0 < x < 8$

$0 < x < 8$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$

สำหรับฐาน $0 < \frac{1}{3} < 1$ เราจะได้แอนติลอการิทึม $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$ เป็น $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ เพื่อที่จะได้ $x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

ดังนั้น เราจึงได้ $x < 9$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของแอนติลอการิทึม $0 < x < 9$

$0 < x < 9$

$$(3) \quad 3^x < 5$$

นำลอการิทึมฐาน 3 ใส่เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ เนื่องจากเป็น $\log_3 3^x < \log_3 5$ เราจะได้ $x < \log_3 5$

$$\underline{x < \log_3 5}$$

PRACTICE

① จงแก้สมการต่อไปนี้

$$(1) \quad \log_5 x = -3$$

$$(2) \quad \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = 4$$

$$(3) \quad 10^x = 2$$

2 จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $\log_3 x < -2$

(2) $\log_{\frac{1}{6}} x > -1$

(3) $5^x < 7$

ADVANCED

EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงแก้สมการ $\log_3(2x - 5) = 2$

จากเงื่อนไขแอนติลอการิทึม $2x - 5 > 0$ เราจะได้ $x > \frac{5}{2}$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง $\log_3(2x - 5) = 2$ เป็น $\log_3(2x - 5) = \log_3 3^2$ เพื่อที่จะได้ $2x - 5 = 3^2$

ดังนั้น เราจึงได้ $x = 7$ ซึ่งตรงกับเงื่อนไข $x > \frac{5}{2}$

$x = 7$

(2) เมื่อ $2 \leq x \leq 8$ จงหาค่าที่น้อยที่สุดและมากที่สุดของฟังก์ชันของ x , $f(x) = 4 \log_2 x - 5$

จงหาลอการิทึมแต่ละด้านของ $2 \leq x \leq 8$ เพื่อที่จะได้ $\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 8$ และ $1 \leq \log_2 x \leq 3$

ดังนั้น เราจึงได้ $4 \cdot 1 - 5 \leq 4 \log_2 x - 5 \leq 4 \cdot 3 - 5$ และ $-1 \leq f(x) \leq 7$

ดังนั้น เมื่อ $x=8$ ค่าสูงสุดคือ 7 และเมื่อ $x=2$ ค่าต่ำสุดคือ -1

เมื่อ $x=8$ ค่าสูงสุดคือ 7 และเมื่อ $x=2$ ค่าต่ำสุดคือ -1

PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงแก้สมการ $\log_2(x - 1)(x - 2) = 1$

(2) เมื่อ $3 \leq x \leq 9$ จงหาค่าที่น้อยที่สุดและมากที่สุดของฟังก์ชันของ x , $f(x) = 2 \log_3 x + 1$

ลอการิทึมสามัญ

TARGET

การทำความเข้าใจลอการิทึมสามัญและวิธีใช้

STUDY GUIDE

ลอการิทึมสามัญ

ลอการิทึมที่ใช้มากในการคำนวณคือ **ลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10** เราจึงกล่าวได้ว่าลอการิทึมดังกล่าวเป็น **ลอการิทึมสามัญ** โดยทั่วไปแล้ว จำนวนบวก N ใดๆ สามารถแสดงในรูปแบบ $N = a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) โดยที่ n เป็นจำนวนบวก การเขียน N ในรูปนี้สามารถนำมาช่วยในการหาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบางจำนวนได้จากค่าลอการิทึมที่ทราบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\log_{10} N = \log_{10} a + n$$



Ex. จาก $26300 = 2.63 \times 10^4$ เราจะได้ $\log_{10} 26300 = \log_{10} 2.63 + 4$

โดยการคำนวณโดยเครื่องคิดเลข เนื่องจาก $\log_{10} 2.63 = 0.4200$ เราจะได้ $\log_{10} 26300 = 4.4200$

การใช้ลอการิทึมสามัญ

เราสามารถกำหนดจำนวนเป็นจำนวนที่ใหญ่มากหรือจำนวนตำแหน่งทศนิยมของจำนวนที่น้อยมาก ซึ่งตัวเลขที่ไม่ใช่ 0 จะปรากฏขึ้นในครั้งแรก

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของจำนวนบวก N คือจำนวนที่มีตัวเลข k หลัก

จำนวนเต็มต่ำสุดของ k หลัก $\leq N < (k+1)$ หลัก คือค่าต่ำสุดของจำนวนเต็ม

ดังนั้น เราจึงได้ $10^{k-1} \leq N < 10^k$ โดยการหาลอการิทึมของทั้งสองข้าง เราจะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\text{จำนวนบวก } N \text{ มีจำนวน } k \text{ หลัก} \Leftrightarrow 10^{k-1} \leq N < 10^k \Leftrightarrow k-1 \leq \log_{10} N < k$$

วิธีหาจำนวนตัวเลข N หลักของจำนวนเต็มบวก

- (1) หาค่าของ $\log_{10} N$
- (2) หาจำนวนเต็ม k ที่ตรงกับ $k-1 \leq \log_{10} N < k$
- (3) ดังนั้น เราจึงรู้ว่าจำนวนบวก N คือตัวเลข k หลัก

นอกจากนี้ เมื่อตัวเลขที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏขึ้นเป็นครั้งแรกที่ทศนิยมตำแหน่งที่ n ของจำนวนบวก N จึงเป็น

$$10^{-n} \leq N < 10^{-n+1}$$

โดยการหาลอการิทึมของทั้งสองข้าง เราจะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งที่ n ในจำนวนบวก N

$$\Leftrightarrow 10^{-n} \leq N < 10^{-n+1} \Leftrightarrow -n \leq \log_{10} N < -n+1$$

วิธีหาตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ศูนย์ของเศษส่วนทศนิยมจำนวนบวก N

ตัวเลขหลักแรกที่ปรากฏในเศษส่วนทศนิยมที่ไม่ใช่ 0 จะเรียกว่าจำนวนแรกที่ไม่ใช่ศูนย์

- (1) หาค่าของ $\log_{10} N$
- (2) หาจำนวนเต็ม n ที่ตรงกับ $-n \leq \log_{10} N < -n+1$
- (3) ดังนั้น เราจึงพบว่าตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งที่ n ในเศษส่วนทศนิยมจำนวนบวก N

EXERCISE



1 จงหาจำนวนหลักในจำนวนเต็มต่อไปนี้

(1) 2^{30}

$$\log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 9.031$$

จาก $9 < \log_{10} 2^{30} < 10$, 2^{30} คือจำนวนเต็ม 10 หลัก

ตัวเลข 10 หลัก

log 1 0 > 2 $\frac{\square}{\square}$ 3 0 EXE

$\log_{10}(2^{30})$

9.03089987

2 $\frac{\square}{\square}$ 3 0 EXE

2^{30}

1073741824

(2) 5^{40}

$$\log_{10} 5^{40} = 40 \log_{10} 5 = 27.959$$

จาก $27 < \log_{10} 5^{40} < 28$, 5^{40} คือจำนวนเต็ม 28 หลัก

ตัวเลข 28 หลัก

log 1 0 > 5 $\frac{\square}{\square}$ 4 0 EXE

$\log_{10}(5^{40})$

27.95880017

5 $\frac{\square}{\square}$ 4 0 EXE

5^{40}

9.094947018 $\times 10^{27}$

2 สำหรับ $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ ตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งใด

$$\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = -8 \log_{10} 2 = -2.408$$

จาก $-3 < \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^8 < -2$ ตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งที่ 3

ทศนิยมตำแหน่งที่ 3

log 1 0 > (1 $\frac{\square}{\square}$ 2 >) $\frac{\square}{\square}$ 8 EXE

$\log_{10} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)$

-2.408239965

(1 $\frac{\square}{\square}$ 2 >) $\frac{\square}{\square}$ 8 EXE $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ OK

$\left(\frac{1}{2}\right)^8$

3.90625 $\times 10^{-3}$

PRACTICE

① จงหาจำนวนหลักในจำนวนเต็มต่อไปนี้

(1) 6^{20}

(2) 8^{30}

② สำหรับ $\left(\frac{2}{3}\right)^{40}$ ตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งใด



เนื่องจาก $\log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 9.0309$ จาก $2^{30} = 10^{9.0309} = 10^{0.0309} \times 10^9 = 1.0737 \times 10^9$ เราทราบว่า 2^{30} มี 10 หลัก และตัวเลขในตำแหน่งที่ 5 คือ 1, 0, 7, 3 และ 7

กด **OK** เลือก [Fix (คงที่)] กด **OK** เลือก [Fix4 (คงที่ 4)](4 หลัก) กด **OK** กด **AC**

② ③ ④ ⑤ ⑥

2³⁰ 1073741824.

เนื่องจาก $\log_{10} 5^{40} = 40 \log_{10} 5 = 27.9588$

จาก $5^{40} = 10^{27.9588} = 10^{0.9588} \times 10^{27} = 9.0949 \times 10^{27}$ เราทราบว่า 5^{40} มี 28 หลัก และตัวเลขในตำแหน่งที่ 5 คือ 9, 0, 9, 4 และ 9

5 4 0 EXE

540
9.094947018 $\times 10^{27}$