

# เลขยกกำลัง

## TARGET

การเรียนรู้และการทำความเข้าใจวิธีคำนวณเลขยกกำลัง

## STUDY GUIDE

### เลขยกกำลัง

สามารถแสดงได้ตามรูปแบบที่แสดงด้านล่าง

$$n \text{ ครั้ง}$$

$$a \times a \times a \times \cdots \times a = a^n$$

ในกรณีนี้  $n$  คือจำนวนเต็มบวก นอกจากนี้ เรายังกล่าวได้ว่า  $a$  คือ **ฐานของเลขยกกำลัง** และ  $n$  คือ **เลขชี้กำลัง**

### EXERCISE



1 จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) คำนวณ  $3^4$ 

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

กด  $\odot$  เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด  $\odot$ 3  $\square^{\square}$  4  $\odot$ 

$$3^4 = 81$$

(2) คำนวณ  $\left(-\frac{2}{5}\right)^7$ 

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^7 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{128}{78125}$$

$$-\frac{128}{78125}$$

(  $\ominus$  ) 2  $\square^{\square}$  5 > 1  $\square^{\square}$  7  $\odot$ 

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^7 = -\frac{128}{78125}$$

(3) คำนวณ  $(\sqrt{7})^4$ 

$$(\sqrt{7})^4 = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 49$$

(  $\sqrt{\square}$  ) 7 > 1  $\square^{\square}$  4  $\odot$ 

$$(\sqrt{7})^4 = 49$$

(4) แยกตัวประกอบ 32 เป็นตัวประกอบเฉพาะ และแสดงเป็นเลขยกกำลัง

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

หลังจากป้อน 3 2  $\odot$  แล้ว ให้กด  $\odot$  เลือก [Prime factor (ตัวประกอบเฉพาะ)] กด  $\odot$ 

$$32 = 2^5$$



2 จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$

(1)  $5^4 \times 5^2 = 5^a$

$$5^4 \times 5^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \times 5 \cdot 5 = 5^6$$

$a=6$

5  $\square^{\square}$  4 >  $\times$  5  $\square^{\square}$  EXE

$5^4 \times 5^2$

15625

5  $\square^{\square}$  6 EXE

$5^6$

15625

(2)  $\frac{13^{12}}{13^7} = 13^a$

$$\frac{13^{12}}{13^7} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}{13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13} = 13^5$$

$a=5$

1 3  $\square^{\square}$  1 2 >  $\frac{\square}{\square}$  1 3  $\square^{\square}$  7 EXE

$\frac{13^{12}}{13^7}$

371293

1 3  $\square^{\square}$  5 EXE

$13^5$

371293

(3)  $(7^2)^3 = 7^a$

$$(7^2)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$$

$a=6$

( 7  $\square^{\square}$  )  $\square^{\square}$  3 EXE

$(7^2)^3$

117649

7  $\square^{\square}$  6 EXE

$7^6$

117649

(4)  $(2 \times 3)^4 = 2^a \times 3^a$

$$(2 \times 3)^4 = (2 \times 3)(2 \times 3)(2 \times 3)(2 \times 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \times 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \times 3^4$$

$a=4$

( 2  $\times$  3 )  $\square^{\square}$  4 EXE

$(2 \times 3)^4$

1296

2  $\square^{\square}$  4 >  $\times$  3  $\square^{\square}$  4 EXE

$2^4 \times 3^4$

1296

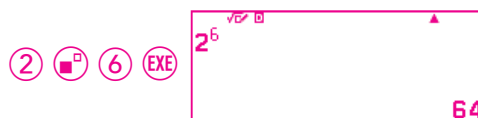
# PRACTICE

## ① จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) คำนวณ  $2^6$

$$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

64



(2) คำนวณ  $(-7)^3$

$$(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$$

-343



(3) แยกตัวประกอบ 625 เป็นตัวประกอบเฉพาะ และแสดงเป็นเลขยกกำลัง

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

5<sup>4</sup>

หลังจากป้อน 6 2 5 EXE แล้ว ให้กด

เลือก [Prime factor (ตัวประกอบเฉพาะ)] กด OK



## ② จงหาตัวเลขที่ตรงกับ a

(1)  $3^4 \times 3^5 = 3^a$

$$3^4 \times 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9$$

a=9

(2)  $\frac{2^8}{2^2} = 2^a$

$$\frac{2^8}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2^6$$

a=6

(3)  $(5^7)^3 = 5^a$

$$(5^7)^3 = 5^7 \cdot 5^7 \cdot 5^7 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{21}$$

a=21

# สมบัติของเลขยกกำลัง

## TARGET

การเรียนรู้สมบัติของเลขยกกำลังและการทำความเข้าใจวิธีคำนวณสมบัติของเลขยกกำลัง

## STUDY GUIDE

### สมบัติของเลขยกกำลัง

ให้  $a, b$  เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

$$(a) \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(b) \quad a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n)$$

$$(c) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(d) \quad (ab)^m = a^m b^m$$

## EXERCISE



◆ จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$  และ  $b$

$$(1) \quad 3^3 \times 3^4 = 3^a$$

จาก (a) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $3^3 \times 3^4 = 3^{3+4} = 3^7$

$a=7$

3  $\square$  3  $\times$  3  $\square$  4  $\square$  EXE

|                  |             |
|------------------|-------------|
| $3^3 \times 3^4$ | $\triangle$ |
|                  | 2187        |

3  $\square$  7  $\square$  EXE

|       |             |
|-------|-------------|
| $3^7$ | $\triangle$ |
|       | 2187        |

$$(2) \quad \frac{2^{10}}{2^7} = 2^a$$

จาก (b) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $\frac{2^{10}}{2^7} = 2^{10-7} = 2^3$

$a=3$

2  $\square$  1 0  $\div$  2  $\square$  7  $\square$  EXE

|                      |             |
|----------------------|-------------|
| $\frac{2^{10}}{2^7}$ | $\triangle$ |
|                      | 8           |

2  $\square$  3  $\square$  EXE

|       |             |
|-------|-------------|
| $2^3$ | $\triangle$ |
|       | 8           |

$$(3) \quad \{(\sqrt{5})^3\}^2 = (\sqrt{5})^a = 5^b$$

จาก (c) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $\{(\sqrt{5})^3\}^2 = (\sqrt{5})^{3 \times 2} = (\sqrt{5})^{2 \times 3} = \{(\sqrt{5})^2\}^3 = 5^3$

$a=6, b=3$

( (  $\sqrt{\square}$  5  $\times$  )  $\square$  3  $\times$  )  $\square$  2  $\square$  EXE

|                    |             |
|--------------------|-------------|
| $((\sqrt{5})^3)^2$ | $\triangle$ |
|                    | 125         |

$\sqrt{\square}$  5  $\times$   $\square$  6  $\square$  EXE

|              |             |
|--------------|-------------|
| $\sqrt{5}^6$ | $\triangle$ |
|              | 125         |

$\sqrt{\square}$  5  $\square$  3  $\square$  OK

|              |                |
|--------------|----------------|
| $\sqrt{5}^3$ | $\triangle$    |
|              | 5 <sup>3</sup> |



## PRACTICE

◆ จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$

(1)  $11^2 \times 11^3 = 11^a$

จาก (a) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $11^2 \times 11^3 = 11^{2+3} = 11^5$

$a=5$



(2)  $\frac{2^{19}}{2^{16}} = 2^a$

จาก (b) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $\frac{2^{19}}{2^{16}} = 2^{19-16} = 2^3$

$a=3$



(3)  $(17^3)^2 = 17^a$

จาก (c) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $(17^3)^2 = 17^{3 \times 2} = 17^6$

$a=6$



## EXERCISE



◆ จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$ ,  $b$  และ  $c$

(1)  $(4 \cdot 7)^3 = 4^a \cdot 7^b = 2^c \cdot 7^3$

จาก (d) และ (c) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $(4 \cdot 7)^3 = 4^3 \cdot 7^3 = (2^2)^3 \cdot 7^3 = 2^6 \cdot 7^3$

$a=3, b=3, c=6$

( ( 4 × 7 ) ) <sup>3</sup> ▲  
21952

4 <sup>3</sup> × 7 <sup>3</sup> ▲  
21952

4 <sup>3</sup> × 7 <sup>3</sup> ▲  
 $2^6 \times 7^3$

(2)  $6^2 \cdot 6^3 = 6^a = 2^b \cdot 3^c$

จาก (a) และ (d) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $6^2 \cdot 6^3 = 6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$

$a=5, b=5, c=5$

6 <sup>2</sup> × 6 <sup>3</sup> ▲  
7776

6 <sup>5</sup> ▲  
7776

6 <sup>5</sup> ▲  
 $2^5 \times 3^5$

(3)  $(4^3)^2 = 2^a$

จาก (c) ในสมบัติของเลขยกกำลัง เราจะได้  $(4^3)^2 = 4^{3 \times 2} = 4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$

$a=12$

( ( 4 <sup>3</sup> ) ) <sup>2</sup> ▲  
4096

4 <sup>6</sup> ▲  
4096

4 <sup>6</sup> ▲  
 $2^{12}$

# สมบัติของเลขยกกำลังเพิ่มเติม (1)

## TARGET

การเรียนรู้เกี่ยวกับเลขชี้กำลัง 0 และจำนวนเต็มลบ และการทำความเข้าใจวิธีคำนวณ

## STUDY GUIDE

### สมบัติของเลขยกกำลังเพิ่มเติม

แม้ว่าเลขชี้กำลัง  $n$  ของ  $a^n$  คือ 0 หรือจำนวนเต็มลบ สมบัติของเลขยกกำลังจะเป็นไปตามที่กำหนดไว้ดังต่อไปนี้

**เมื่อ  $a \neq 0$  และ  $n$  คือจำนวนเต็มบวก**

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

#### explanation

สำหรับสมบัติของเลขยกกำลัง  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  ให้พิจารณา  $m=2$  และ  $n=0$

จาก  $a^2 \times a^0 = a^{2+0} = a^2$  เราเข้าใจได้ว่า  $a^0 = 1$

สำหรับสมบัติของเลขยกกำลัง  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  ให้พิจารณา  $m=2$  และ  $n=-2$

จาก  $a^2 \times a^{-2} = a^{2+(-2)} = a^0 = 1$  เราเข้าใจได้ว่า  $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

## EXERCISE



◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ  $6392^0$

$$6392^0 = 1$$

6 3 9 2  $\frac{1}{\square}$  0 EXE

$6392^0$   
1

(2) จงหาค่าของ  $2^{-5}$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

2  $\frac{1}{\square}$  - 5 EXE

$2^{-5}$   
 $\frac{1}{32}$

(3) จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$  ใน  $21^{-8} = \frac{1}{21^a}$

$$21^{-8} = \frac{1}{21^8}$$

2 1  $\frac{1}{\square}$  - 8 > - 1  $\frac{1}{\square}$  8 EXE

$21^{-8} = \frac{1}{21^8}$   
 $a=8$

## PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ  $2022^0$

$$2022^0 = 1$$

1

② ① ② ②  $\frac{\square}{\square}$  ① EXE

$\sqrt{\square}$   $\frac{\square}{\square}$ 
▲

2022<sup>0</sup>

1

(2) จงหาค่าของ  $3^{-4}$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$\frac{1}{81}$

③  $\frac{\square}{\square}$  − ④ EXE

$\sqrt{\square}$   $\frac{\square}{\square}$ 
▲

3<sup>-4</sup>

$\frac{1}{81}$

(3) จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$  ใน  $14^{-9} = \frac{1}{14^a}$

$$14^{-9} = \frac{1}{14^9}$$

$a=9$

① ④  $\frac{\square}{\square}$  − ⑨ > − ①  $\frac{\square}{\square}$  ① ④  $\frac{\square}{\square}$  ⑨ EXE

$\sqrt{\square}$   $\frac{\square}{\square}$ 
▲

14<sup>-9</sup> −  $\frac{1}{14^9}$

0

# สมบัติของเลขยกกำลังเพิ่มเติม (2)

## TARGET

การเรียนรู้เกี่ยวกับรากและการทำความเข้าใจสมบัติของเลขยกกำลังโดยพิจารณาวิธีเพิ่มเลขชี้กำลังภายในช่วงของจำนวนตรรกยะ

## STUDY GUIDE

### ราก

พิจารณาปริมาตรของลูกบาศก์ โดยให้ความยาวด้านคือ  $\sqrt[n]{a}$  ดังนั้นจะมีพื้นที่คือ  $a$

เมื่อ  $a$  คือจำนวนจริงและ  $n$  คือจำนวนบวก ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่าจำนวน  $x$  ที่ตรงกับ  $x^n = a$  คือรากที่  $n$  ของ  $a$  รายการต่อไปนี้แสดงวิธีพิจารณารากที่  $n$  ของจำนวนจริง  $a$  ในช่วงของจำนวนจริง

(1) เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคู่

เมื่อ  $a > 0$  จะมีรากที่  $n$  ของ  $a$  สองรากคือ  $\sqrt[n]{a}$  และ  $-\sqrt[n]{a}$

เมื่อ  $a < 0$  และไม่มีรากที่  $n$  ของ  $a$

(2) เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคี่

มีรากที่  $n$  ของ  $a$  เพียงหนึ่งรากเท่านั้น คือ  $\sqrt[n]{a}$  ไม่ว่า  $a$  จะเป็นบวกหรือลบ

จากนิยามของราก เมื่อ  $a > 0$  รายการต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$\sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a$$



Ex. (1)  $(\sqrt[7]{3})^7 = 3$

⬆ ⬆ ⬆ 7 > 3 > 1 ⬆ 7 EXE

$$(\sqrt[7]{3})^7 = 3$$

(2)  $\sqrt[8]{5^8} = 5$

⬆ ⬆ 8 > 5 ⬆ 8 EXE

$$\sqrt[8]{5^8} = 5$$

นอกจากนี้ รายการต่อไปนี้ยังแสดงสมบัติของราก เมื่อ  $a > 0$  และ  $b > 0$  โดยที่  $m, n$  และ  $p$  คือจำนวนเต็มบวก

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} & (2) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & (3) \quad (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} \\ (4) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} & (5) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{mp}}} &= \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

### นิยามของเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนตรรกยะ

เมื่อเลขชี้กำลังคือจำนวนตรรกยะ สมบัติของเลขยกกำลังนั้นจะกำหนดให้  $a > 0$  และ  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $r$  เป็นจำนวนตรรกยะบวก เราสามารถกำหนดรายการต่อไปนี้ได้

$$(1) \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (2) \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

### explanation

สำหรับสมบัติของเลขยกกำลัง  $(a^m)^n = a^{mn}$  ให้พิจารณาว่า  $m$  คือ  $\frac{1}{m}$  และ  $n$  คือ  $m$

จาก  $(a^{\frac{1}{m}})^m = a^{\frac{1}{m} \times m} = a$  เราได้รู้ว่า  $a^{\frac{1}{m}}$  คือรากที่  $m$  ของ  $a$  ดังนั้น เราจึงได้  $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$

นอกจากนี้ ด้วยสมบัติของเลขยกกำลัง  $(a^m)^n = a^{mn}$  เราสามารถพิจารณาได้ว่า  $m$  คือ  $\frac{m}{n}$

จาก  $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$  เราสามารถเข้าใจได้ว่า  $a^{\frac{m}{n}}$  คือรากที่  $n$  ของ  $a^m$  ดังนั้น เราจึงได้  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

### สมบัติของเลขยกกำลังที่เป็นจำนวนตรรกยะ

สมบัติของเลขยกกำลังสำหรับจำนวนตรรกยะถูกกำหนดไว้ดังต่อไปนี้  $a \neq 0$  และ  $b \neq 0$  เมื่อ  $r$  และ  $s$  คือจำนวนตรรกยะ

$$\begin{aligned} (1) \quad a^r a^s &= a^{r+s} & (2) \quad \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} & (3) \quad (a^r)^s &= a^{rs} \\ (4) \quad (ab)^r &= a^r b^r & (5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

### EXERCISE



① จงหาค่ารากต่อไปนี้

(1) รากที่ 2 ของ 4

เนื่องจาก  $4 = 2^2$  รากที่ 2 ของ 4 คือ  $\pm 2$

รากที่ 2 เรียกอีกอย่างหนึ่งว่าสแควร์รูก ดังนั้นรากที่สองของ 4 ก็คือ  $\pm 2$

$\pm 2$

↑ √ 2 > 4 EXE

$$\sqrt[2]{4}$$

2

(2) รากที่ 3 ของ -27

เนื่องจาก  $-27 = -3^3 = (-3)^3$  รากที่ 3 ของ -27 คือ -3

-3

↑ √ 3 > - 2 7 EXE

$$\sqrt[3]{-27}$$

-3

(3) รากที่ 6 ของ 64

เนื่องจาก  $64 = 2^6$  รากที่ 6 ของ 64 คือ  $\pm 2$

$\pm 2$

↑ √ 6 > 6 4 EXE

$$\sqrt[6]{64}$$

2

(4) รากที่ 5 ของ 7

โดยใช้เครื่องหมายกรณฑ์ รากที่ 5 ของ 7 จะแสดงเป็น  $\sqrt[5]{7}$

$$\sqrt[5]{7}$$

เนื่องจากเป็นจำนวนตรรกยะ ให้คำนวณค่าประมาณและยืนยันโดยการเพิ่มค่าดังกล่าวเป็นรากที่ 5

↑ √ 5 > 7 EXE

$$\sqrt[5]{7}$$

1.475773162

Ans √ 5 EXE

$$\text{Ans}^5$$

7



2 จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$  และ  $b$

(1)  $\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{a}}$

$$\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$$

$$a=5$$

ตรวจคำตอบ (ด้านซ้าย) - (ด้านขวา) = 0

↑ √ 5 > 6 > - 6 √ 1 = 5 EXE

$$\sqrt[5]{6-6^{\frac{1}{5}}}$$

0

(2)  $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{a}{b}}$

$$\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$$

$$a=3, b=4$$

ตรวจคำตอบ (ด้านซ้าย) - (ด้านขวา) = 0

↑ √ 4 > 5 √ 3 > > - 5 √ 3 = 4 EXE

$$\sqrt[4]{5^3-5^{\frac{3}{4}}}$$

0

## PRACTICE

1 จงหาคำรากต่อไปนี้

(1) รากที่ 2 ของ 9

เนื่องจาก  $9 = 3^2$  รากที่ 2 ของ 9 คือ  $\pm 3$

$$\pm 3$$

(2) รากที่ 3 ของ -125

เนื่องจาก  $-125 = -5^3 = (-5)^3$  รากที่ 3 ของ -125 คือ -5

$$-5$$

(3) รากที่ 4 ของ 16

เนื่องจาก  $16 = 2^4$  รากที่ 4 ของ 16 คือ  $\pm 2$

$$\pm 2$$

(4) รากที่ 5 ของ 3

โดยใช้เครื่องหมายกรณฑ์ รากที่ 5 ของ 3 จะแสดงเป็น  $\sqrt[5]{3}$

$$\sqrt[5]{3}$$

2 จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$  และ  $b$

$$(1) \sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$$

$$a=2, b=5$$

$$(2) \sqrt[3]{125^2} = a$$

$$\sqrt[3]{125^2} = 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3 \times \frac{2}{3}} = 5^2 = 25$$

$$a=25$$

## ADVANCED

### EXERCISE



◆ จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$  และ  $b$

$$(1) \sqrt[6]{8^4} = 2^a = b$$

$$\sqrt[6]{8^4} = 8^{\frac{4}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

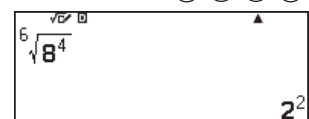
$$a=2, b=4$$

ตรวจคำตอบ

↑ √ □ 6 > 8 ■<sup>□</sup> 4 EXE



FORMAT √ √ OK



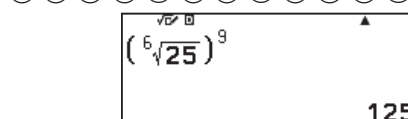
$$(2) (\sqrt[6]{25})^9 = 5^a = b$$

$$(\sqrt[6]{25})^9 = (25^{\frac{1}{6}})^9 = 25^{\frac{9}{6}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 5^{2 \times \frac{3}{2}} = 5^3 = 125$$

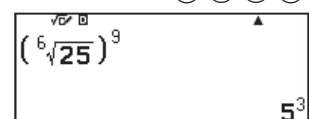
$$a=3, b=125$$

ตรวจคำตอบ

( ↑ √ □ 6 > 2 5 > ) ■<sup>□</sup> 9 EXE



FORMAT √ √ OK





# การคำนวณโดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง

## TARGET

การทำความเข้าใจวิธีคำนวณโดยใช้สมบัติของเลขยกกำลังที่มีช่วงเป็นจำนวนตรรกยะ

## EXERCISE



◆ จงหาคำตอบต่อไปนี้

$$(1) \quad 3^6 \times 3^4 \div 3^8$$

$$= 3^{6+4-8} = 3^2 = 9$$

(3) (6) (3) (4) (3) (8) (EXE)

$$3^6 \times 3^4 \div 3^8$$

9

$$(2) \quad (5^4)^2 \div (5^2)^3 \times \frac{1}{25}$$

$$= 5^8 \div 5^6 \times \frac{1}{5^2} = 5^8 \times 5^{-6} \times 5^{-2} = 5^{8-6-2} = 5^0 = 1$$

(1) (5) (4) (3) (1) (5) (3) (1) (2) (5) (EXE)

$$(5^4)^2 \div (5^2)^3 \times \frac{1}{25}$$

1

$$(3) \quad 4^2 \times 8^{-2} \times \frac{1}{2}$$

$$= (2^2)^2 \times (2^3)^{-2} \times 2^{-1} = 2^4 \times 2^{-6} \times 2^{-1} = 2^{4-6-1} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

(4) (8) (2) (1) (2) (EXE)

$$4^2 \times 8^{-2} \times \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{8}$

$$(4) \quad 27^3 \times 9^{-4} \div 3^2$$

$$= (3^3)^3 \times (3^2)^{-4} \times 3^{-2} = 3^9 \times 3^{-8} \times 3^{-2} = 3^{9-8-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

(2) (7) (3) (9) (4) (3) (EXE)

$$27^3 \times 9^{-4} \div 3^2$$

$\frac{1}{3}$

$$(5) \quad (\sqrt[3]{5})^4 \times \sqrt[3]{25}$$

$$= (5^{\frac{1}{3}})^4 \times (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3} \times 4} \times 5^{2 \times \frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} = 5^2 = 25$$

(1) (5) (3) (4) (3) (2) (5) (EXE)

$$(\sqrt[3]{5})^4 \times \sqrt[3]{25}$$

25



# เลขนัยสำคัญ

## TARGET

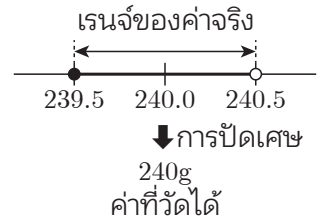
การเรียนรู้ว่าค่าที่วัดได้เป็นค่าประมาณ และการทำความเข้าใจวิธีแสดงค่าดังกล่าว

## STUDY GUIDE

### ความคลาดเคลื่อน

สมมติว่าคุณต้องชั่งน้ำหนักวัตถุที่มีน้ำหนัก 240 กรัม บนตาชั่งที่มีการไล่ระดับน้ำหนักขั้นต่ำ 1 กรัม ค่าที่ชั่งได้จะเป็นค่าประมาณ และเราจะกล่าวได้ว่าผลต่างระหว่าง

ค่าประมาณและค่าจริงคือค่าความคลาดเคลื่อน



$$\text{ค่าความคลาดเคลื่อน} = \text{ค่าประมาณ} - \text{ค่าจริง}$$

โดยพิจารณาค่าที่วัดได้ 240 กรัม เป็นค่าที่ปัดเศษเป็น 1 กรัม แล้วค่าจริงของ  $a$  ต้องอยู่ในเรนจ์  $239.5 \leq a < 240.5$  ซึ่งเราพิจารณาได้ว่าความคลาดเคลื่อนของค่าสัมบูรณ์นั้นน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.5

### เลขนัยสำคัญ

พิจารณาค่าที่วัดได้ 2 ค่าต่อไปนี้

[a] น้ำหนัก 240 กรัมที่ชั่งบนตาชั่งที่มีการไล่ระดับน้ำหนักขั้นต่ำ 1 กรัม

[b] น้ำหนัก 240 กรัมที่ชั่งบนตาชั่งที่มีการไล่ระดับน้ำหนักขั้นต่ำ 10 กรัม

สำหรับ [a] เราปัดเศษเป็นค่าขั้นต่ำ 1 กรัม ซึ่งหมายความว่าเราสามารถเชื่อถือค่าที่วัดได้ 2, 4 และ 0

สำหรับ [b] เราปัดเศษเป็นค่าขั้นต่ำ 10 กรัม ซึ่งหมายความว่าเราสามารถเชื่อถือค่าที่วัดได้ 2 และ 4 แต่ตัวเลข 0 เป็นเพียงสัญลักษณ์แสดงตำแหน่ง

นี่คือเหตุผลที่แสดงตัวเลขเป็นค่าโดยประมาณ ซึ่งเรากล่าวได้ว่าตัวเลขที่เราเชื่อถือได้คือเลขนัยสำคัญ

เพื่อระบุจำนวนหลักของค่าที่วัดได้เป็นตัวเลขนัยสำคัญอย่างชัดเจน เรามักจะแสดงเป็น

สัญกรณ์วิทยาศาสตร์  $a \times 10^n$  โดยที่  $1 \leq a < 10$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

[a]  $2.40 \times 10^2 (\text{g})$

[b]  $2.4 \times 10^2 (\text{g})$

## EXERCISE

### จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) จงแสดง 617000 ลิตร เป็นตัวเลขนัยสำคัญ 3 หลัก

เนื่องจากมีเลขนัยสำคัญ 3 หลัก ผลจึงกลายเป็น  $617000 \text{ L} = 6.17 \times 10^5 (\text{L})$

$$\underline{6.17 \times 10^5 (\text{L})}$$



### check

กด  $\odot$  เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด  $\odot$  เลือก [Number Format (รูปแบบตัวเลข)] กด  $\odot$  เลือก [Sci (วิทยาศาสตร์)] กด  $\odot$  เลือก [Sci3 (วิทยาศาสตร์ 3)] (3 หลัก) กด  $\odot$  กด  $\odot$

Input/Output  
Angle Unit  
Number Format  
Engineer Symbol

$\odot$ Fix  
 $\odot$ Sci  
 $\odot$ Norm :2

Sci1 :  $1 \times 10^1$   
Sci2 :  $1.2 \times 10^1$   
Sci3 :  $1.23 \times 10^1$   
Sci4 :  $1.234 \times 10^1$

6 1 7 0 0 0 EXE  
617000  
6.17  $\times 10^5$

(2) จงแสดง 0.00005983 ม. เป็นตัวเลขนัยสำคัญ 4 หลัก

$$\text{เนื่องจากมีเลขนัยสำคัญ 4 หลัก ผลจึงกลายเป็น } 0.00005983 \text{ m} = \frac{5.983}{10^5} \text{ m} = 5.983 \times 10^{-5} (\text{m})$$

$$\underline{5.983 \times 10^{-5} (\text{m})}$$

check

กด  $\equiv$  เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด  $\text{OK}$  เลือก [Number Format (รูปแบบตัวเลข)] กด  $\text{OK}$  เลือก [Sci (วิทยาศาสตร์)] กด  $\text{OK}$  เลือก [Sci4 (วิทยาศาสตร์ 4)] (4 หลัก) กด  $\text{OK}$  กด  $\text{AC}$



## PRACTICE

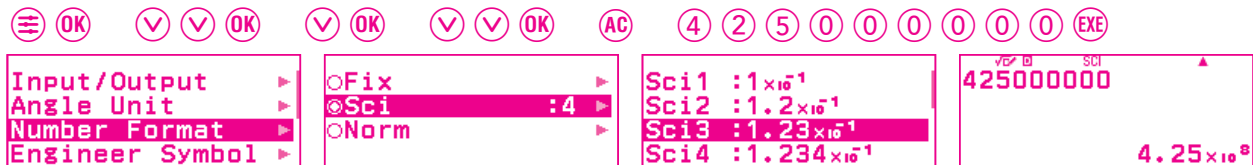
◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงแสดง 425000000 กรัมเป็นเลขนัยสำคัญ 3 หลัก

$$\text{เนื่องจากมีเลขนัยสำคัญ 3 หลัก ผลจึงกลายเป็น } 425000000 \text{ g} = 4.25 \times 10^8 (\text{g})$$

$$\underline{4.25 \times 10^8 (\text{g})}$$

check



(2) จงแสดง 0.000000813 ม. เป็นตัวเลขนัยสำคัญ 4 หลัก

เนื่องจากมีเลขนัยสำคัญ 4 หลัก ผลจึงกลายเป็น

$$0.000000813 \text{ m} = \frac{8.130}{10^{-7}} \text{ m} = 8.130 \times 10^{-7} (\text{m})$$

$$\underline{8.130 \times 10^{-7} (\text{m})}$$

check



# การใช้เลขยกกำลังในชีวิตจริง

## TARGET

การทำความเข้าใจการใช้เลขยกกำลังในชีวิตจริง

## EXERCISE

- ◆ ระบบค่าจ้างมี 2 ประเภท [A] และ [B] ตามที่แสดงด้านล่าง สำหรับการรับเงินค่าจ้าง จงแก้โจทย์เกี่ยวกับระบบเงินเดือนต่อไปนี้

[A] ได้รับค่าจ้างเป็นเงิน 100 ดอลลาร์ต่อวันเป็นเวลา 30 วัน

[B] ได้รับค่าจ้างเป็นเงิน 1 ดอลลาร์สำหรับการทำงานวันที่ 1 หากทำงานครบ 2 วัน จะได้ค่าจ้างรวมเป็นสองเท่าของวันที่ 1 เป็นเงิน 2 ดอลลาร์ และหากทำงานครบ 3 วัน จะได้ค่าจ้างรวมเป็นสองเท่าของวันที่ 2 เป็นเงิน 4 ดอลลาร์ เป็นต้น โดยที่เงินค่าจ้างรวมจะเพิ่มเป็นสองเท่าของวันก่อนหน้าไปเรื่อย ๆ ทุกวันเป็นเวลา 30 วัน

- (1) จงหาค่าจ้างรวมทั้งหมดที่จะได้รับจากการทำงาน 30 วันตามระบบ [A]

$$100 \times 30 = 3000 \text{ (ดอลลาร์)}$$

**3000 ดอลลาร์**

- (2) จงหาค่าจ้างที่จะได้รับในวันที่ 10 ตามระบบ [B]

วันที่ 1 ได้ค่าจ้างเป็นเงิน 1 ดอลลาร์ วันที่ 2 ได้ค่าจ้างเป็นเงิน 2 ดอลลาร์ วันที่ 3 คือ  $2^2 = 4$  เป็นเงิน 4 ดอลลาร์ วันที่ 4 คือ  $2^3 = 8$  เป็นเงิน 8 ดอลลาร์ จนถึงวันที่ 10 คือ  $2^9 = 512$  เป็นเงิน 512 ดอลลาร์

**512 ดอลลาร์**

- (3) ระบบค่าจ้างใดที่จ่ายเงินรวมทั้งหมดสูงที่สุดสำหรับการทำงาน 30 วัน

จะได้รับเงินค่าจ้างรวมทั้งหมด 3000 ดอลลาร์สำหรับการทำงาน 30 วันตามระบบ [A]

ในทางกลับกัน ตามระบบ [B] จะได้รับค่าจ้างรวมทั้งหมด  $2^{29} = 536870912$  ( $\approx 540$  ล้าน) สำหรับการทำงานในระยะเวลาเพียง 30 วัน เนื่องจากค่าจ้างตามระบบ [B] นั้นเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว

ในช่วงแรก ค่าจ้างตามระบบ [A] จะสูงกว่า แต่ค่าจ้างตามระบบ [B] นั้นเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ทำให้ค่าจ้างตามระบบ [B] แซงหน้าค่าจ้างรวมทั้งหมดตามเวลาที่ได้รับค่าจ้างในวันที่ 9

**[B]**



### check

กด  $\equiv$  เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด  $\odot$  เลือก [Number Format (รูปแบบตัวเลข)] กด  $\odot$  เลือก [Norm (รูปแบบปกติ)] กด  $\odot$  เลือก [Norm2 (รูปแบบปกติ 2)] (รูปแบบทศนิยมปกติ) กด  $\odot$  กด  $\odot$

Input/Output  
Angle Unit  
Number Format  
Engineer Symbol

$\odot$ Fix  
 $\odot$ Sci :4  
 $\odot$ Norm

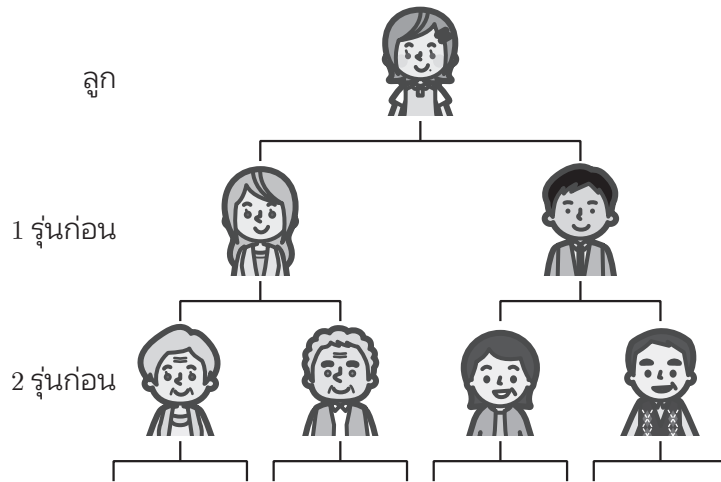
Norm1:  $1.23 \times 10^3$   
Norm2: 0.00123

2  $\odot$  2  $\odot$  9 EXE  
 $2^{29}$   
536870912

## PRACTICE



- ลูกเกิดจากพ่อและแม่ “บรรพบุรุษรุ่นที่ 1 ของลูก” คือพ่อและแม่ ส่วนพ่อและแม่ต่างก็มีบรรพบุรุษรุ่นที่ 1 ของตัวเอง เมื่อนับจากมุมมองของลูก บรรพบุรุษเหล่านี้คือ “บรรพบุรุษรุ่นที่ 2 ของลูก” จากรูปภาพด้านล่าง เราจะเห็นว่า “บรรพบุรุษรุ่นที่ 1 ของลูก” มี 2 คน และ “บรรพบุรุษรุ่นที่ 2 ของลูก” มี 4 คน ในตอนนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้



- (1) จงหา “จำนวนบรรพบุรุษรุ่นที่ 5 ของลูก”

1 รุ่นก่อนมี 2 คน 2 รุ่นก่อนมี 4 คน 3 รุ่นก่อนมี 8 คน ดังนั้น  $n$  รุ่นก่อนจึงมี  $2^n$  คน  
จำนวนบรรพบุรุษรุ่นที่ 5 ของลูกคือ  $2^5 = 32$  (คน)

32 คน

- (2) กำหนดให้ ระยะห่างของแต่ละรุ่นเป็น 30 ปี มีบรรพบุรุษกี่รุ่นนับจากปี 2022 ย้อนกลับไป (ตอบเป็นจำนวนเต็ม)

$2022 \div 30 = 67.4$  ดังนั้นจึงมี 67 รุ่นก่อน

67 รุ่นก่อน

- (3) กำหนดให้ คำตอบในข้อที่ (2) มีค่าเท่ากับ  $n$  “บรรพบุรุษรุ่นที่  $n$  ของลูก” มีจำนวนกี่คน? จงหาคำตอบสำหรับเลขนัยสำคัญ 3 หลัก

$$2^n = 2^{67} \approx 1.48 \times 10^{20} \text{ (คน)}$$

☰ OK ▼ ▼ OK ▼ OK ▼ ▼ OK AC ② ① ⑥ ⑦ EXE

Input/Output  
Angle Unit  
Number Format  
Engineer Symbol

○Fix  
○Sci  
●Norm :2

Sci1 :  $1 \times 10^1$   
Sci2 :  $1.2 \times 10^1$   
Sci3 :  $1.23 \times 10^1$   
Sci4 :  $1.234 \times 10^1$

$2^{67}$  SCI  
 $1.48 \times 10^{20}$

$1.48 \times 10^{20}$  (คน)

หลังจากคำนวณแล้ว ให้เปลี่ยนการตั้งค่าเป็น [Norm2 (รูปแบบปกติ 2)] (รูปแบบทศนิยมปกติ)

# กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

## TARGET

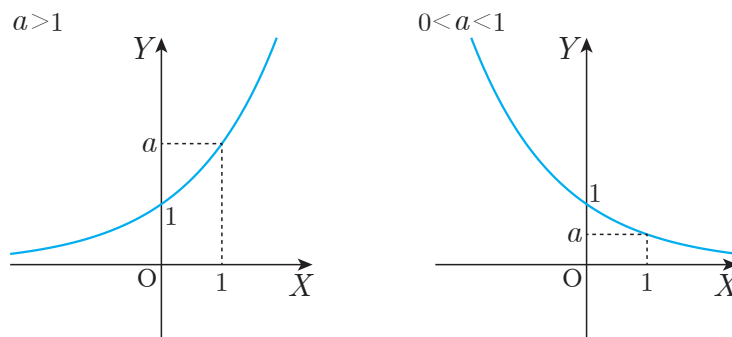
การทำความเข้าใจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

## STUDY GUIDE

### กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  ฟังก์ชันของ  $x$  ในกราฟของ  $y = a^x$  จะเรียกว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่มีฐาน  $a$  รายการต่อไปนี้แสดงสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

- (1) โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล  $y = a^x$  คือจำนวนจริงทั้งหมด และเรนจ์คือจำนวนบวกทั้งหมด
- (2) กราฟผ่านจุด  $(0, 1)$  และ  $(1, a)$  และแกน  $X$  คือเส้นกำกับของกราฟ
- (3) เมื่อ  $a > 1$  หาก  $p > q$  แล้ว  $a^p > a^q$   
 $\Rightarrow$  เมื่อค่าของ  $x$  เพิ่มขึ้น ค่าของ  $y$  ก็เพิ่มขึ้นเช่นกัน  
 เมื่อ  $0 < a < 1$  หาก  $p > q$  แล้ว  $a^p < a^q$   
 $\Rightarrow$  เมื่อค่าของ  $x$  เพิ่มขึ้น ค่าของ  $y$  จะลดลง



### การเลื่อนขนานและการสะท้อนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เราสามารถเลื่อนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลได้ตามที่แสดงด้านล่าง

#### การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานกับ  $p$  ตามแกน  $X \Rightarrow y = a^{x-p}$

การเลื่อนขนานกับ  $q$  ตามแกน  $Y \Rightarrow y = a^x + q$

#### การสะท้อน

การสะท้อนข้ามแกน  $X \Rightarrow y = -a^x$

การสะท้อนข้ามแกน  $Y \Rightarrow y = a^{-x}$

การสะท้อนที่สัมพันธ์กับจุดกำเนิดพิกัด  $\Rightarrow y = -a^{-x}$

## EXERCISE

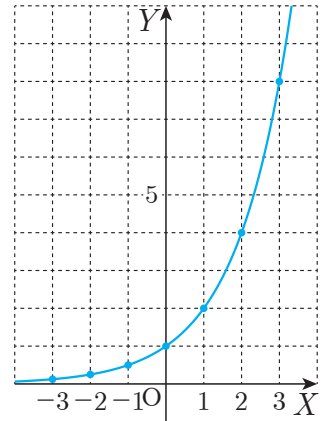
① วาดกราฟของฟังก์ชัน  $y = 2^x$  ดังต่อไปนี้

(1) จงหาค่า  $y$  และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

| $x$ | -3            | -2            | -1            | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|---------------|---------------|---------------|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

(2) ในรูปภาพด้านขวา ให้วาดพิกัดสำหรับค่าต่าง ๆ ของ  $x$  และ  $y$  จาก (1)

(3) จงวาดกราฟให้สมบูรณ์โดยการเชื่อมจุดต่าง ๆ จาก (2)



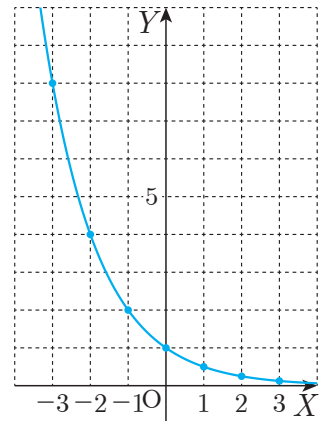
② วาดกราฟของฟังก์ชัน  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  ดังต่อไปนี้

(1) จงหาค่า  $y$  และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1             | 2             | 3             |
|-----|----|----|----|---|---------------|---------------|---------------|
| $y$ | 8  | 4  | 2  | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

(2) ในรูปภาพด้านขวา ให้วาดพิกัดสำหรับค่าต่าง ๆ ของ  $x$  และ  $y$  จาก (1)

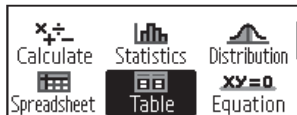
(3) จงวาดกราฟให้สมบูรณ์โดยการเชื่อมจุดต่าง ๆ จาก (2)



check

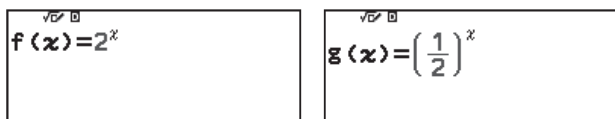
ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบกราฟ

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\text{OK}$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\odot$



กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\text{OK}$  เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน  $f(x) = 2^x$  กด  $\text{EXE}$

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



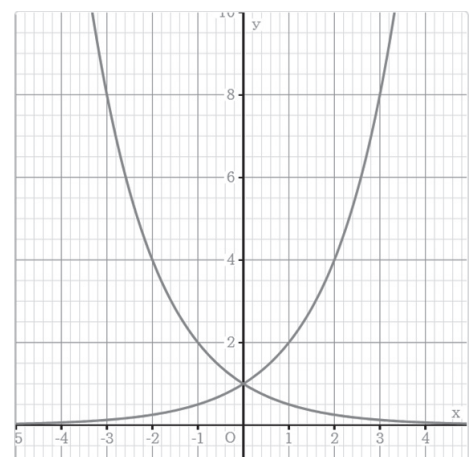
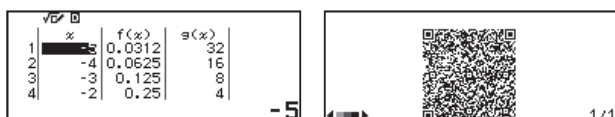
กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\text{OK}$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -5, End (สิ้นสุด): 5, Step (ขั้น): 1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\text{EXE}$



กด  $\uparrow$   $\text{X}$  สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ





3 จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 3 รายการด้านล่าง

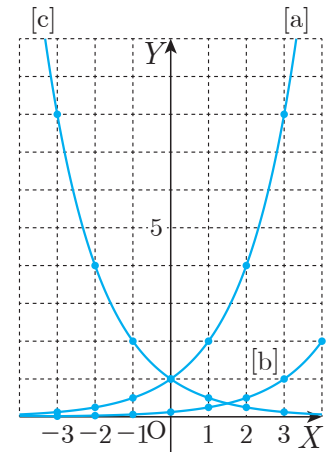
[a] ฟังก์ชัน  $y = 2^x$

[b] ฟังก์ชัน  $y = 2^{x-3}$

[c] ฟังก์ชัน  $y = 2^{-x}$

(1) วาดกราฟของแต่ละฟังก์ชัน

| $x$               | -3             | -2             | -1             | 0             | 1             | 2             | 3             |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| [a] $y = 2^x$     | $\frac{1}{8}$  | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{2}$  | 1             | 2             | 4             | 8             |
| [b] $y = 2^{x-3}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1             |
| [c] $y = 2^{-x}$  | 8              | 4              | 2              | 1             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |



(2) จงพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟ [b] เมื่อเทียบกับกราฟ [a]

[b] เลื่อนขนานตามแกน X ไปทางขวา 3 หน่วย เมื่อเทียบกับ [a]

(3) จงพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟ [c] เมื่อเทียบกับกราฟ [a]

[c] สะท้อนข้ามแกน Y เมื่อเทียบกับ [a]

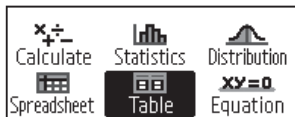


check

ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบกราฟ

เปรียบเทียบฟังก์ชัน  $y = 2^x$  และฟังก์ชัน  $y = 2^{x-3}$

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\odot$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\odot$

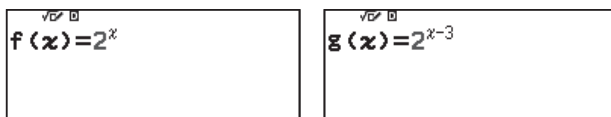


กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\odot$

เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\odot$

หลังจากป้อน  $f(x) = 2^x$  กด  $\odot$

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = 2^{x-3}$



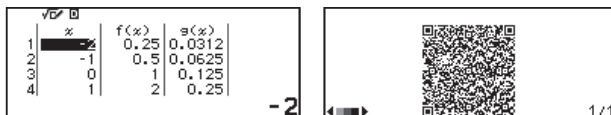
กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-2, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1]

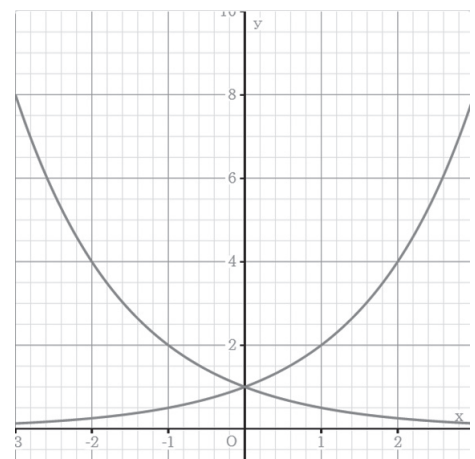
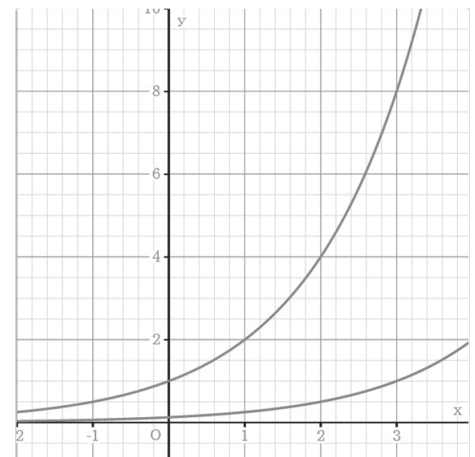
เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\odot$



กด  $\uparrow$   $\odot$  สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



เปรียบเทียบฟังก์ชัน  $y = 2^x$  และฟังก์ชัน  $y = 2^{x-3}$  ด้วยวิธีเดียวกัน



## PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 3 รายการด้านล่าง

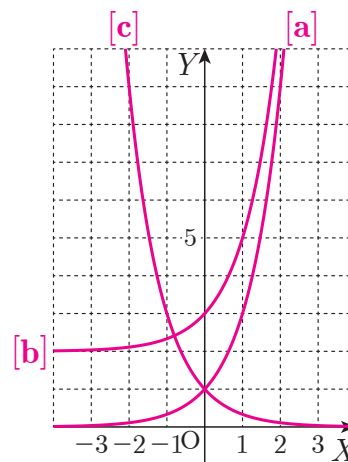
[a] ฟังก์ชัน  $y = 3^x$       [b] ฟังก์ชัน  $y = 3^x + 2$       [c] ฟังก์ชัน  $y = 3^{-x}$

(1) วาดกราฟของแต่ละฟังก์ชัน

**กราฟของ [a] คือเส้นโค้งที่เคลื่อนผ่านจุด (0, 1) และ (1, 3) ขึ้นไปทางขวา**

**กราฟของ [b] คือเส้นโค้งที่เคลื่อนผ่านจุด (0, 3) และ (1, 5) ขึ้นไปทางขวา**

**กราฟของ [c] คือเส้นโค้งที่เคลื่อนผ่านจุด (0, 1) และ (-1, 3) ลงไปทางขวา**



(2) จงพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟ [b] เมื่อเทียบกับกราฟ [a]

**[b] เลื่อนขนานตามแกน Y เลื่อนขึ้นไป 2 หน่วย เมื่อเทียบกับ [a]**

(3) จงพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟ [c] เมื่อเทียบกับกราฟ [a]

**[c] สะท้อนข้ามแกน Y เมื่อเทียบกับ [a]**

# การใช้ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

## TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแก้โจทย์โดยใช้กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

## EXERCISE



- ◆ สมมติว่าเราตรวจสอบการแพร่กระจายของโรคติดเชื้อทุกวัน และผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่าจำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่เพิ่มขึ้น  $r$  เท่าหลังจาก 1 วัน ตัวอย่างเช่น ในวันที่กำหนดไว้ มีผู้ติดเชื้อ 100 คน และหาก  $r=1.5$  หลังจากผ่านไป 1 วัน ผู้ติดเชื้อรายใหม่จะมีจำนวน  $100 \times 1.5 = 150$  (คน) และหลังจากผ่านไป 2 วัน จะมีผู้ติดเชื้อ  $150 \times 1.5 = 225$  (คน) เมื่อคำนวณจาก 2 วันก่อน เราจะได้  $100 \times 1.5^2$  (คน) จากจุดนี้ เราสามารถเข้าใจได้ดังต่อไปนี้ หลังจาก  $x$  วัน จำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่จะเป็น  $y$  เท่าของจำนวนผู้ติดเชื้อเริ่มต้น ซึ่งเราสามารถแสดงเป็น  $y = r^x$  ได้ ในตอนนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

- (1) กำหนดให้  $r=1.5$  ไม่มีการเปลี่ยนแปลง จงหาว่าจำนวนผู้ติดเชื้อวันแรกคิดเป็นกี่เท่าของจำนวนของผู้ติดเชื้อรายใหม่หลังจาก 10 วัน นอกจากนี้ยังกำหนดให้มีผู้ติดเชื้อ 100 คนในวันแรก จงหาว่าจะมีผู้ติดเชื้อรายใหม่กี่คนหลังจากผ่านไป 10 วัน

แทนที่  $x=10$  ใน  $y = 1.5^x$  ก็จะได้  $y = 1.5^{10} = 57.66 \dots$  (เท่า)

จำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่หลังจาก 10 วันคือ

$$100 \times 57.66 \dots = 5766 \dots \text{ (คน)}$$

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\text{OK}$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\text{C}$

กด  $\text{D}$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\text{OK}$

เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\text{OK}$

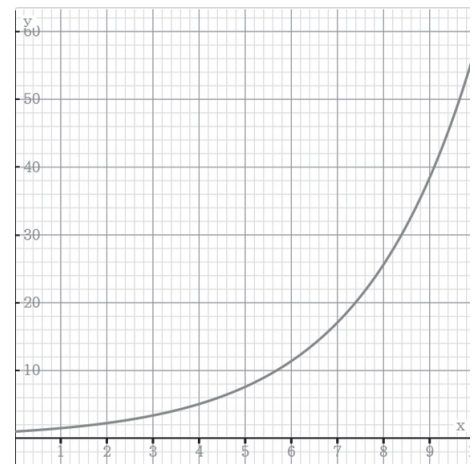
หลังจากป้อน  $f(x) = 1.5^x$  แล้ว ให้กด  $\text{EXE}$

กด  $\text{D}$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\text{OK}$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0, End (สิ้นสุด):10, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\text{EXE}$

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|-----|--------|--------|
| 7   | 17.085 | ERROR  |
| 8   | 25.628 | ERROR  |
| 9   | 38.443 | ERROR  |
| 10  | 57.665 | ERROR  |
| 11  | 86.496 | ERROR  |



**ประมาณ 58 เท่า ประมาณ 5800 คน**

- (2) จงหาค่าสำหรับ  $r$  ที่จะทำให้จำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่ลดลง

ตัวอย่างเช่น ตรวจสอบว่าจะเกิดอะไรขึ้นเมื่อ  $r=0.8$  และ  $0.4$

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\text{OK}$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\text{C}$

กด  $\text{D}$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\text{OK}$

เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\text{OK}$

หลังจากป้อน  $f(x) = 0.8^x$  กด  $\text{EXE}$

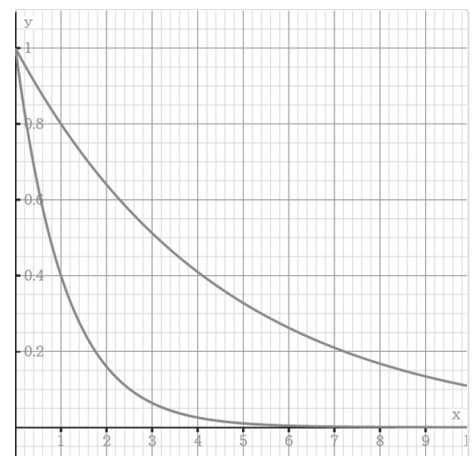
และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = 0.4^x$

กด  $\text{D}$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\text{OK}$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0, End (สิ้นสุด):10, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\text{EXE}$

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$    |
|-----|--------|-----------|
| 7   | 0.2097 | 1.6777e-4 |
| 8   | 0.1677 | 6.5795e-5 |
| 9   | 0.1342 | 2.6318e-5 |
| 10  | 0.1074 | 1.0486e-5 |



เมื่อ  $0 < r < 1$  เส้นโค้งจะเคลื่อนลงไปทางขวา เราจึงรู้ว่าค่าลดลง

**$0 < r < 1$**

(3) จงหาเรนจ์ของค่า  $r$  โดยที่จำนวนผู้ติดเชื้อในวันที่ 20 นั้นน้อยกว่า 100 คน กำหนดให้มีผู้ติดเชื้อเริ่มต้น 10000 คน

เพื่อให้มีผู้ติดเชื้อ 100 คนหลังจาก 20 วัน อัตราส่วนของจำนวนผู้ติดเชื้อเริ่มต้นจะเป็น  $\frac{100}{10000} = \frac{1}{100}$  (เท่า)

แทนที่  $x=20$  และ  $y = \frac{1}{100}$  ใน  $y = r^x$  เพื่อหา  $r$

จาก  $\frac{1}{100} = r^{20}$  เราจะได้  $r = \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{20}} = 0.794 \dots$

กำหนดให้หลังจาก  $x$  วัน จำนวนผู้ติดเชื้อรายใหม่จะเป็น  $z$  คน ซึ่งเราสามารถแสดงเป็น  $z = 10000r^x$  ได้

กด  เลือก [Table (ตาราง)] กด  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด 

กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\odot$

หลังจากป้อน  $f(x) = 10000x^{20}$  กด (EXE)

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = 100$

กด  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด 

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0.05, End (สิ้นสุด):0.95, Step (ขั้น):0.05]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด **ⓧ**

|    | $x$  | $f(x)$ | $g(x)$ |
|----|------|--------|--------|
| 14 | 0.7  | 7.9792 | 100    |
| 15 | 0.75 | 31.712 | 100    |
| 16 | 0.8  | 115.29 | 100    |
| 17 | 0.85 | 387.59 | 100    |

จากกราฟ เราจะพบว่าค่านั้นต่ำกว่า 0.8

นอกจากนี้ โดยใช้ฟังก์ชันการแก้อิทธิพลเพื่อแก้  $10000x^{20} = 100$  เราจะได้  $x=0.794... \approx 0.79$

กด  เลือก [Equation (สมการ)] กด 

เลือก [Solver (แก้สมการ)] กด **OK**

Calculate Statistics Distribution  
Spreadsheet Table **Equation**

ป้อนข้อมูล  $10000x^{20} = 100$

① ② ③ ④ ⑤ ×  $x$   $\frac{\square}{\square}$  ⑥ ⑦ > ↑ ( ⑧ ⑨ ⑩ EXE

$$10000x^{20} = 100$$

ป้อนข้อมูล  $x = 0.8$

0 . 8 EXE EXE

$0 < r \leq 0.79$

## PRACTICE



- อัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจเป็นตัวบ่งชี้การเติบโตทางเศรษฐกิจของประเทศ โดยพื้นฐานแล้ว รายได้ของพลเมืองเชื่อมโยงกับอัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจ กำหนดให้รายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยในช่วงเวลาหนึ่งคือ  $A$  และอัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจคือ  $r$  และหลังจาก  $x$  ปี รายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยจะเท่ากับ  $y$  แล้ว  $y = A(1 + r)^x$  จึงถูกต้อง

[ตัวอย่าง] ในประเทศที่มีรายได้ประชาชาติเฉลี่ย 200 ดอลลาร์ โดยมีอัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจที่ 0.03 จากนั้นในระยะเวลา 10 ปี รายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยจะเท่ากับ  $y = 200(1 + 0.03)^{10} \approx 268.8$  (ดอลลาร์)

ซึ่งหมายความว่าในช่วง 10 ปี รายได้จะเท่ากับ  $\frac{268.8 - 200}{200} = 0.344$  ซึ่งเพิ่มขึ้น 34.4% โดยเฉพาะ

ตารางต่อไปนี้จะแสดงรายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยและอัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจสำหรับ 3 ประเทศ A, B และ C ในตอนนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

| ประเทศ                             | A     | B     | C     |
|------------------------------------|-------|-------|-------|
| รายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ย (ดอลลาร์) | 3.5   | 2.5   | 4.5   |
| อัตราการเติบโตทางเศรษฐกิจ          | 0.051 | 0.064 | 0.042 |

- (1) โดยอ้างอิง [ตัวอย่าง] จงหารายได้ประชาชาติโดยเฉลี่ยของ 3 ประเทศหลังจาก 10 ปี (ตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง) นอกจากนี้ จงหาเปอร์เซ็นต์ (%) ของรายได้ที่เพิ่มขึ้น (ตอบเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

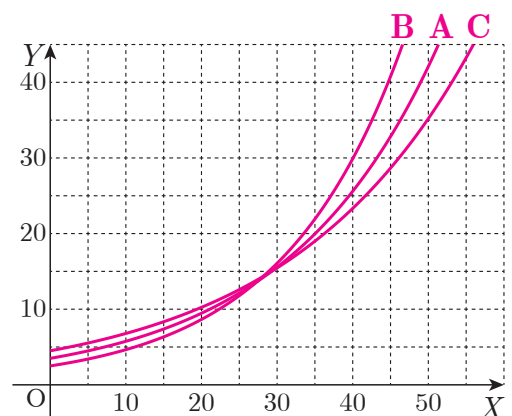
**ประเทศ A...**  $y = 3.5(1 + 0.051)^{10} = 5.7556 \dots, \frac{5.756 - 3.5}{3.5} = 0.6445 \dots$

**ประเทศ B...**  $y = 2.5(1 + 0.064)^{10} = 4.6489 \dots, \frac{4.649 - 2.5}{2.5} = 0.8596$

**ประเทศ C...**  $y = 4.5(1 + 0.042)^{10} = 6.7903 \dots, \frac{6.790 - 4.5}{4.5} = 0.5088 \dots$

**ประเทศ A...5.756, 64.5% ประเทศ B...4.649, 86.0%**  
**ประเทศ C...6.790, 50.9%**

- (2) จงวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของ  $x$  และ  $y$  ของ 3 ประเทศ



# ความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีฐานเป็นจำนวนเดียวกัน

## TARGET

การทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีฐานเป็นจำนวนเดียวกัน

## STUDY GUIDE

### สมบัติต่าง ๆ และความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  รายการต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$[a] \quad a^p = a^q \Leftrightarrow p = q$$

$$[b] \quad \text{เมื่อ } a > 1, \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p > q$$

$$\text{เมื่อ } 0 < a < 1, \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p < q$$

## EXERCISE

① จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$

$$(1) \quad 3^x = 3^6 \Rightarrow x = a$$

จาก [a] ที่ด้านบน เราจะได้  $x=6$

$$\underline{a=6}$$

$$(2) \quad 5^x = 25 \Rightarrow x = a$$

จาก [a] ที่ด้านบน เราจะได้  $x=2$

$$\underline{a=2}$$

② จงเติมเครื่องหมายอสมการลงใน  $\square$

$$(1) \quad 7^x > 7^4 \Rightarrow x \square 4$$

จาก [b] ที่ด้านบน เราจะได้  $x > 4$

$$\underline{>}$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^9 \Rightarrow x \square 9$$

จาก [b] ที่ด้านบน เราจะได้  $x > 9$

$$\underline{>}$$

## PRACTICE

① จงหาตัวเลขที่ตรงกับ  $a$

$$(1) \quad 13^x = 13^3 \Rightarrow x = a$$

$$\underline{a=3}$$

$$(2) \quad 2^x = 8^5 \Rightarrow x = a$$

จาก  $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$  เราจะได้  $x=15$

$$\underline{a=15}$$

② จงเติมเครื่องหมายอสมการลงใน  $\square$

$$(1) \quad 0.3^x > 0.3^7 \Rightarrow x \square 7$$

เนื่องจากฐานคือ 0.3 เราจะได้  $x < 7$

$$\underline{<}$$

$$(2) \quad 1.01^x < 1.01^8 \Rightarrow x \square 8$$

เนื่องจากฐานคือ 1.01 เราจะได้  $x < 8$

$$\underline{<}$$

**ความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเดียวกัน**

## TARGET

การทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเดียวกัน

# STUDY GUIDE

## ความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เมื่อมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเดียวกัน

เมื่อ  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  และ  $b \neq 1$  รายการต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$[a] \quad a^p = b^p \quad \Leftrightarrow \quad a=b$$

[b]  $a^p < b^p \iff a < b$

## EXERCISE

◆ จงเรียงลำดับของ  $\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2$  โดยใช้เครื่องหมายอสมการแสดงคำตอบ

เนื่องจาก  $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$  เราจะได้  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$



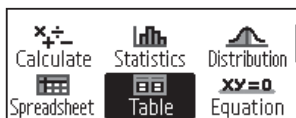
check

ใช้ตารางเพื่อคำนวณและเปรียบเทียบกำลังสองของแต่ละค่าในขั้นตอนเดียว

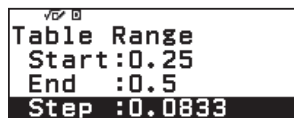
กด **⌘** เลือก [Table (ตาราง)] กด **OK** จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด **⌘**

กด **⊖** เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด **OK** เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด **OK** หลังจาก  
ป้อน  $f(x) = x^2$  กด **EXE**

กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):  $\frac{1}{4}$ , End (สิ้นสุด):  $\frac{1}{2}$ , Step (ขั้น):  $\frac{1}{12}$ ]  
เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\text{EXE}$



$$f(x) = x^2$$



|   | $x$    | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|--------|--------|--------|
| 1 | 0.25   | 0.0625 | ERROR  |
| 2 | 0.3333 | 0.1111 | ERROR  |
| 3 | 0.4166 | 0.1736 | ERROR  |
| 4 | 0.5    | 0.25   | ERROR  |

0.25

## PRACTICE

◆ จงเรียงลำดับของ  $2^2, 3^2, 4^2$  โดยใช้เครื่องหมายอสมการแสดงคำตอบ

เนื่องจาก  $2 < 3 < 4$  เราจะได้  $2^2 < 3^2 < 4^2$

$$2^2 < 3^2 < 4^2$$

② ③<sup>2</sup> ④ EXE

A diagram of a square with side length 2. The top-left corner is labeled  $2^2$ . The top edge has a point labeled  $\sqrt{2}$  and a point labeled 2. The right edge has a point labeled 2. The bottom-right corner is labeled 4.

③ ④<sup>2</sup> ⑤ EXE

3<sup>2</sup>

4    $\blacksquare^2$    EXE

$$4^2 = 16$$



## EXERCISE

◆ จงเรียงลำดับ โดยใช้เครื่องหมายอสมการแสดงคำตอบ

(1)  $\sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{27}$

ทำให้ฐานเหมือนกัน ซึ่งก็คือ 3 แล้วจึงเปรียบเทียบ

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3^{-1}} = 3^{-\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}, \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^3} = 3^{\frac{3}{5}}$$

เนื่องจาก  $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$  เราจะได้  $\sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt{3} < \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{9}$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt{3} < \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{9}$$



$\sqrt{3}$   
1.732050808

$\sqrt{\frac{1}{3}}$   
0.5773502692

$\sqrt[3]{9}$   
2.080083823

$\sqrt[5]{27}$   
1.933182045

(2)  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}$

กำหนดให้  $a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, b = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}, c = \sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}}$

จาก  $a^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8, b^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9$  เราจะได้  $a^6 < b^6$  ดังนั้น  $a < b$

จาก  $a^{10} = (2^{\frac{1}{2}})^{10} = 2^5 = 32, c^{10} = (5^{\frac{1}{5}})^{10} = 5^2 = 25$  เราจะได้  $a^{10} > c^{10}$  ดังนั้น  $a > c$

ดังนั้น เนื่องจาก  $c < a < b$  เราจะได้  $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

$$\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

$\sqrt{2}$   
1.414213562

$\sqrt[3]{3}$   
1.44224957

$\sqrt[5]{5}$   
1.379729661



# สมการเอกซ์โพเนนเชียล

## TARGET

การทำความเข้าใจการแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง

## STUDY GUIDE

### สมการเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อสมการมีตัวไม่ทราบค่าที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เราต้องทำให้ฐานเท่ากันก่อน จากนั้นจึงแก้เลขชี้กำลังในสมการ เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  จากนั้นเราจึงใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$a^p = a^q \Leftrightarrow p = q$$

## EXERCISE



◆ จงแก้สมการต่อไปนี้

(1)  $2^x = 16$

จาก  $16 = 2^4$  เราจะได้  $2^x = 2^4$  ดังนั้น  $x=4$

$$x=4$$

② ③ ④ EXE

(2)  $9^x = \frac{1}{27}$

จาก  $(3^2)^x = \frac{1}{3^3}$ ,  $3^{2x} = 3^{-3}$  เราจะได้  $2x = -3$ ,  $x = -\frac{3}{2}$

$$x = -\frac{3}{2}$$

9 ③ ④ ③ ⑤ ② EXE

(3)  $5^{x-2} = \sqrt{5}$

จาก  $5^{x-2} = 5^{\frac{1}{2}}$  เราจะได้  $x-2 = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{5}{2}$

$$x = \frac{5}{2}$$

⑤ ③ ⑤ ③ ② > ② EXE    ⑤ ⑤ EXE    (FORMAT) ✓ OK

# PRACTICE

◆ จงแก้สมการต่อไปนี้

(1)  $(\sqrt{2})^x = \frac{1}{4}$

จาก  $(2^{\frac{1}{2}})^x = \frac{1}{2^2}, 2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-2}$  เราจะได้  $\frac{1}{2}x = -2, x = -4$

$x = -4$

$\sqrt{\square}$  2 >  $\square^{\square}$  - 4 EXE

$$\sqrt{2}^{-4} = \frac{1}{4}$$

(2)  $3^{2-x} = 81$

จาก  $3^{2-x} = 3^4$  เราจะได้  $2 - x = 4, x = -2$

$x = -2$

3  $\square^{\square}$  2 - ( - 2 ) EXE

$$3^{2-(-2)} = 81$$

(3)  $5^{x-4} = 5^{3-2x}$

$x - 4 = 3 - 2x, 3x = 7, x = \frac{7}{3}$

$x = \frac{7}{3}$

5  $\square^{\square}$  7  $\frac{\square}{\square}$  3 > - 4 EXE 5  $\square^{\square}$  3 - 2  $\times$  7  $\frac{\square}{\square}$  3 EXE

$$5^{\frac{7}{3}-4} = 0.06839903787$$

$$5^{3-2 \times \frac{7}{3}} = 0.06839903787$$

# ADVANCED

## EXERCISE

◆ จงแก้สมการ  $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$

(ด้านซ้าย):  $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 16 = (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16$

ในตอนนี้ ให้แทนที่  $2^x$  ด้วย  $X$  และแก้สมการกำลังสองสำหรับ  $X$

$X^2 - 10X + 16 = 0, (X - 2)(X - 8) = 0, X = 2, 8$

ดังนั้น จาก  $2^x = 2$  เราจะได้  $x=1$

นอกจากนี้ จาก  $2^x = 8, 2^x = 2^3$  เราจะได้  $x=3$

$x=1,3$

check

ป้อนข้อมูล  $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16$  และแทนที่  $x=1$  และ  $3$  เพื่อยืนยันว่าค่าของนิพจน์คือ 0

กด  $\odot$  เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด  $\text{OK}$  กด  $\text{f(x)}$  เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน  $f(x)=4^x - 5 \times 2^{x+1} + 16$  กด  $\text{EXE}$

กด  $\text{f(x)}$  เลือก [f(x)] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน f(1) แล้ว ให้กด  $\text{EXE}$  จากนั้นจึงป้อน f(3) ด้วยวิธีเดียวกัน

|                                            |                                |      |      |
|--------------------------------------------|--------------------------------|------|------|
| f(x)<br>g(x)<br>Define f(x)<br>Define g(x) | $f(x)=4^x-5 \times 2^{x+1}+16$ | f(1) | f(3) |
|--------------------------------------------|--------------------------------|------|------|

## PRACTICE

◆ จงแก้สมการ  $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

(ด้านซ้าย):  $(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9$

ในตอนนี้ ให้แทนที่  $3^x$  ด้วย  $X$  และแก้สมการกำลังสองสำหรับ  $X$

$X^2 - 10X + 9 = 0, (X - 1)(X - 9) = 0, X = 1, 9$

ดังนั้น จาก  $3^x = 1$  เราจะได้  $x=0$

นอกจากนี้ จาก  $3^x = 9, 3^x = 3^2$  เราจะได้  $x=2$

$x=0,2$

check

กด  $\text{f(x)}$  เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน

$f(x) = 9^x - 10 \times 3^x + 9$  กด  $\text{EXE}$

กด  $\text{f(x)}$  เลือก [f(x)] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน f(0) แล้ว ให้กด  $\text{EXE}$  จากนั้นจึงป้อน f(2) ด้วยวิธีเดียวกัน

|                                            |                            |      |      |
|--------------------------------------------|----------------------------|------|------|
| f(x)<br>g(x)<br>Define f(x)<br>Define g(x) | $f(x)=9^x-10 \times 3^x+9$ | f(0) | f(2) |
|--------------------------------------------|----------------------------|------|------|

# อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

## TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแก้สมการที่มีจำนวนที่ไม่ทราบค่าที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง

## STUDY GUIDE

### อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่ออสมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เราต้องทำให้ฐานเท่ากันก่อน จากนั้นจึงตรวจสอบว่าฐานมากกว่าหรือน้อยกว่า 1 หลังจากนั้น เราจะแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  จากนั้นเราจึงใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\text{เมื่อ } a > 1, \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p > q$$

$$\text{เมื่อ } 0 < a < 1, \quad a^p > a^q \Leftrightarrow p < q$$

## EXERCISE

◆ จงแก้สมการต่อไปนี้

(1)  $100^x < 0.001$

$$(10^2)^x < \frac{1}{10^3}, 10^{2x} < 10^{-3}$$

ฐานคือ 10 มากกว่า 1 ดังนั้นเราจึงได้  $2x < -3, x < -\frac{3}{2}$

$$x < -\frac{3}{2}$$



check

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺

|     |      |
|-----|------|
| 100 | 1000 |
| 2   | 1    |
| 3   | 1000 |

(2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+2} \leq 81$

$$(3^{-1})^{3x+2} \leq 3^4 \text{ และ } 3^{-3x-2} \leq 3^4$$

ฐานคือ 3 มากกว่า 1 ดังนั้นเราจะได้  $-3x-2 \leq 4, -3x \leq 6$  และ  $x \geq -2$

$$x \geq -2$$

check

กด ⑤ เลือก [Table (ตาราง)] กด ① จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด ①

กด ② เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด ① เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด ① หลัง

จากป้อน  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+2}$  กด ①

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = 81$

กด ② เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด ① หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-4, End (สิ้นสุด):-1, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด ①

เราสามารถยืนยันได้ว่าเมื่อ  $x < -2$  แล้ว  $f(x) > g(x)$  และเมื่อ  $x = -2$  แล้ว  $f(x) = g(x)$  และเมื่อ  $x > -2$  แล้ว  $f(x) < g(x)$

|   | f(x)  | g(x) |
|---|-------|------|
| 1 | 59049 | 81   |
| 2 | 2187  | 81   |
| 3 | 81    | 81   |
| 4 | 3     | 81   |

## PRACTICE

◆ จงแก้สมการต่อไปนี้

(1)  $0.01^x > 100$

$$\left(\frac{1}{10^2}\right)^x > 10^2, (10^{-2})^x > 10^2, 10^{-2x} > 10^2$$

ฐานคือ 10 มากกว่า 1 ดังนั้นเราจึงได้  $-2x > 2, x < -1$

$$x < -1$$

check

0 . 0 1  $\frac{\square}{\square}$  - 1 EXE



(2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1} \geq \sqrt{2}$

$$(2^{-1})^{-2x+1} \geq 2^{\frac{1}{2}}, 2^{2x-1} \geq 2^{\frac{1}{2}}$$

ฐานคือ 2 มากกว่า 1 ดังนั้นเราจะได้  $2x-1 \geq \frac{1}{2}, 2x \geq \frac{3}{2}$  และ  $x \geq \frac{3}{4}$

$$x \geq \frac{3}{4}$$

check

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\text{OK}$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\odot$

กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\text{OK}$

เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\text{OK}$

หลังจาก ป้อน  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1}$  แล้ว ให้กด  $\text{EXE}$

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = \sqrt{2}$

กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):  $\frac{1}{4}$ , End (สิ้นสุด): 1, Step (ขั้น):  $\frac{1}{4}$ ] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\text{EXE}$

เราสามารถยืนยันได้ว่าเมื่อ  $x < \frac{3}{4}$  แล้ว  $f(x) < g(x)$  และเมื่อ  $x = \frac{3}{4}$  แล้ว  $f(x) = g(x)$

และเมื่อ  $x > \frac{3}{4}$  แล้ว  $f(x) > g(x)$

|   | x    | f(x)   | g(x)   |
|---|------|--------|--------|
| 1 | 0.25 | 0.7071 | 1.4142 |
| 2 | 0.5  | 1      | 1.4142 |
| 3 | 0.75 | 1.4142 | 1.4142 |
| 4 | 1    | 2      | 1.4142 |

0.25

## EXERCISE

◆ จงแก้สมการ  $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 < 0$

$$(2^2)^x - 7 \cdot 2^x - 8 < 0, (2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 < 0$$

ในตอนนี้ ให้แทนที่  $2^x$  ด้วย  $X$  และแก้สมการกำลังสองสำหรับ  $X$

$$X^2 - 7X - 8 < 0, (X+1)(X-8) < 0, -1 < X < 8$$

จาก  $X = 2^x > 0$  เราจะได้  $0 < X < 8$

ดังนั้น จาก  $0 < 2^x < 8, 0 < 2^x < 2^3$  เราจะได้  $x < 3$

$$x < 3$$

check

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\text{OK}$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\odot$

กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\text{OK}$  เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\text{OK}$

หลังจากป้อน  $f(x) = 4^x - 7 \times 2^x - 8$  กด  $\text{EXE}$

กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\text{EXE}$

เราสามารถยืนยันได้ว่าเมื่อ  $x < 3$  แล้ว  $f(x) < 0$  และเมื่อ  $x = 3$  แล้ว  $f(x) = 0$  และเมื่อ  $x > 3$  แล้ว  $f(x) > 0$

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|-----|--------|--------|
| 1   | -18    | ERROR  |
| 2   | -20    | ERROR  |
| 3   | 0      | ERROR  |
| 4   | 136    | ERROR  |

3

## PRACTICE

◆ จงแก้สมการ  $(2^x - 4)(2^x - 8) \leq 0$

แทนที่  $2^x$  ด้วย  $X$  และแก้สมการกำลังสองสำหรับ  $X$

$$(X - 4)(X - 8) \leq 0 \text{ และ } 4 \leq X \leq 8$$

จาก  $X = 2^x > 0$  เราจะได้  $4 \leq X \leq 8$

ดังนั้น จาก  $2^2 \leq 2^x \leq 2^3$  เราจะได้  $2 \leq x \leq 3$

$$2 \leq x \leq 3$$

check

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\text{OK}$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\odot$

กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\text{OK}$  เลือก [Define  $f(x)$

(กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน  $f(x) = (2^x - 4)(2^x - 8)$  กด  $\text{EXE}$

กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1,

End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):0.5] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\text{EXE}$

เราสามารถยืนยันได้ว่าเมื่อ  $x < 2$  และ  $3 < x$  แล้ว  $f(x) > 0$  เมื่อ  $x = 2, 3$  แล้ว  $f(x) = 0$

และเมื่อ  $2 < x < 3$  แล้ว  $f(x) < 0$

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|-----|--------|--------|
| 1   | 12     | ERROR  |
| 2   | 6.0588 | ERROR  |
| 3   | 0      | ERROR  |
| 4   | -3.882 | ERROR  |

1

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|-----|--------|--------|
| 4   | -3.882 | ERROR  |
| 5   | 0      | ERROR  |
| 6   | 24.235 | ERROR  |
| 7   | 96     | ERROR  |

2.5



- (3) อัตราดอกเบี้ยรายปี  $r$  จะเปลี่ยนแปลงตามสภาพเศรษฐกิจ จงหาว่าที่อัตราดอกเบี้ยรายปี  $r$  ต้องเพิ่มขึ้นเพื่อให้เงินต้นเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในระยะเวลา 5 ปี
- เมื่อเงินต้นคือ  $A$  และอัตราดอกเบี้ยรายปีคือ  $r$  แล้วจำนวนรวม  $A(1+r)^5$  ของเงินต้น  $A$  บวกดอกเบี้ยมีจำนวนถึง 2 เท่าของเงินต้นหลังจาก 5 ปี
- เนื่องจาก  $A(1+r)^5 \geq 2A$ ,  $(1+r)^5 \geq 2$ ,  $1+r \geq 2^{\frac{1}{5}}$ ,  $r \geq 2^{\frac{1}{5}} - 1$  และ  $r \geq 0.1486\dots$  แล้ว  $r=0.149$

②  $\frac{1}{5}$  ①  $\frac{1}{5}$  ⑤  $>$   $>$   $-$  ①  $\text{EXE}$

$$2^{\frac{1}{5}} - 1$$

0.148698355

$r=0.149$

check

กด  $\odot$  เลือก [Equation (สมการ)] กด  $\text{OK}$  เลือก [Solver (แก้สมการ)] กด  $\text{OK}$

① ①  $+$   $x$   $)$   $\frac{1}{5}$   $>$   $\uparrow$  ① ②  $\text{EXE}$   $\text{Ans}$   $\text{EXE}$   $\text{EXE}$

$$(1+x)^5=2$$

Enter Initial Value  
 $x = \text{Ans}$   
 $\text{Execute}$

$$(1+x)^5=2$$

$x = 0.148698355$   
 $L-R = 0$

## PRACTICE

- ◆ เมื่ออัตราดอกเบี้ยทบต้นสำหรับ 1 ปีคือ 0.1 และเงินต้นคือ 10000 ดอลลาร์ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

- (1) จงหาจำนวนดอกเบี้ยหลังจาก 1 ปี

$$10000 \times 0.1 = 1000 \text{ (ดอลลาร์)}$$

1000 ดอลลาร์

- (2) จงหาผลรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยหลังจาก 5 ปี

$$10000 \times (1 + 0.1)^5 = 16105.1 \text{ (ดอลลาร์)}$$

16105.1 ดอลลาร์

- (3) จงหาจำนวนปี เมื่อผลรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยมากกว่า 2 เท่าของเงินต้น (ตอบเป็นจำนวนเต็ม)

เมื่อเงินต้นคือ 10000 ดอลลาร์ และอัตราดอกเบี้ยรายปีคือ  $r=0.1$  หลังจาก  $n$  ปี ผลรวมของเงินต้นและดอกเบี้ย  $10000(1+0.1)^n$  จะมากกว่าสองเท่าของเงินต้น 10000 ดอลลาร์

เนื่องจาก  $10000(1+0.1)^n \geq 20000$ ,  $1.1^n \geq 2$  และ  $n \geq 7.27\dots$  จึงได้ผลลัพธ์เป็นหลังจาก 8 ปี

หลังจาก 8 ปี



# ความสัมพันธ์ระหว่างเลขยกกำลังและลอการิทึม

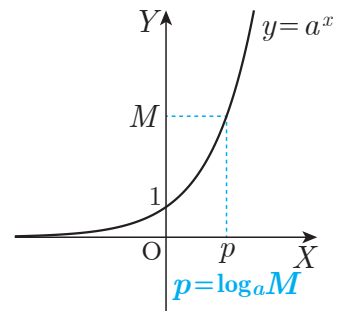
## TARGET

การทำความเข้าใจประโยชน์ของลอการิทึมในหลักการเดียวกันกับเลขยกกำลัง

## STUDY GUIDE

### นิยามของลอการิทึม

เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  ดังนั้นในกราฟของ  $y = a^x$  เราจึงกำหนดได้ว่ามีจำนวนจริงเพียง 1 ตัว ซึ่งก็คือ  $p$  ที่ตรงกับ  $a^p = M$  ( $M > 0$ ) ในส่วนนี้ ค่าของ  $p$  จะแสดงเป็น  $\log_a M$  โดยที่  $a$  คือฐานของ  $\log$  (ลอการิทึม) ของ  $M$  และ  $\log_a M$  สามารถแสดงผลลัพธ์ได้อีกรูปแบบหนึ่ง คือ ค่า  $a$  เมื่อทำการยกกำลังด้วยจำนวนจำนวนหนึ่ง จะมีค่าเท่ากับ  $M$  นอกจากนี้ เรายังกล่าวได้ว่าใน  $\log_a M$  ค่า  $M$  นั้นคือ **แอนติลอการิทึม** ของลอการิทึม รายการต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ของ  $p$  และ  $M$



$$a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$$

Ex. ใช้นิยามข้างต้นเพื่อแปลงค่าระหว่างเลขยกกำลังและลอการิทึม

$$2^p = 3 \Leftrightarrow p = \log_2 3$$

$$3^p = 5 \Leftrightarrow p = \log_3 5$$

**เงื่อนไขของแอนติลอการิทึม** เนื่องจาก  $a^p > 0$  แอนติลอการิทึม  $M$  คือจำนวนบวก

**เงื่อนไขของฐาน** เช่นเดียวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล  $a > 0$  และ  $a \neq 1$

นอกจากนี้ เราจะได้ว่า

$$\log_a a^p = p$$

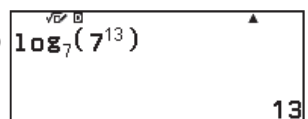


proof

ยืนยันว่า  $\log_7 7^{13} = 13$

กด  $\odot$  เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด  $\text{OK}$

$\log_7$   $\odot$   $7$   $>$   $\odot$   $7$   $\odot$   $1$   $\odot$   $3$   $\text{EXE}$



### ความสัมพันธ์ระหว่างเลขยกกำลังและลอการิทึม

จากความสัมพันธ์ระหว่างเลขยกกำลังและลอการิทึม เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$(1) \quad a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$$

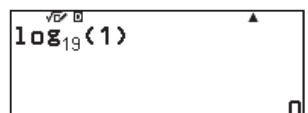
$$(2) \quad a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$$

$$(3) \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{a} = -1$$

proof

ยืนยันว่า  $\log_{19} 1 = 0$

$\log_{19}$   $\odot$   $1$   $>$   $\odot$   $1$   $\text{EXE}$



## EXERCISE

① จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลังหรือลอการิทึม

(1)  $5^p = 2$

แสดงเป็นลอการิทึมที่มีฐาน 5 และแอนติลอการิทึม 2

$$\underline{p = \log_5 2}$$

(2)  $p = \log_2 8$

ลอการิทึมที่มีฐาน 2 และแอนติลอการิทึม 8

$$\underline{2^p = 8}$$



② จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

(1)  $\log_3 3^4$

จาก  $\log_a a^p = p$  เราจะได้  $\log_3 3^4 = 4$

4

$\log_3$  3 > 3  $\log_3$  4 EXE

$\log_3(3^4)$

4

(2)  $\log_2 8$

$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

3

$\log_2$  2 > 8 EXE

$\log_2(8)$

3

(3)  $\log_2 1$

จาก  $\log_a 1 = 0$  เราจะได้  $\log_2 1 = 0$

0

$\log_2$  2 > 1 EXE

$\log_2(1)$

0

## PRACTICE

① จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลังหรือลอการิทึม

(1)  $5^p = 13$

**แสดงเป็นลอการิทึมที่มีฐาน 5 และแอนติลอการิทึม 13**

$$p = \log_5 13$$

(2)  $p = \log_3 81$

**ลอการิทึมที่มีฐาน 3 และแอนติลอการิทึม 81**

$$3^p = 81$$

② จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

(1)  $\log_2 2^{17}$

**จาก  $\log_a a^p = p$  เราจะได้  $\log_2 2^{17} = 17$**

$$17$$

(2)  $\log_3 27$

$$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

$$3$$

(3)  $\log_5 1$

**จาก  $\log_a 1 = 0$  เราจะได้  $\log_5 1 = 0$**

$$0$$

## ADVANCED

③ จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

(1)  $\log_2 \frac{1}{4}$

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$$

$$-2$$

(2)  $\log_3 \sqrt{27}$

$$\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}$$

(3)  $\log_5 \sqrt[7]{125}$

$$\log_5 \sqrt[7]{125} = \log_5 \sqrt[7]{5^3} = \log_5 5^{\frac{3}{7}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{7}$$

(4)  $\log_{10} \frac{1}{10000}$

$$\log_{10} \frac{1}{10000} = \log_{10} \frac{1}{10^4} = \log_{10} 10^{-4} = -4$$

$$-4$$

# สมบัติต่าง ๆ ของลอการิทึม

## TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติของลอการิทึม

## STUDY GUIDE

### สมบัติต่าง ๆ ของลอการิทึม

สำหรับ  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $M > 0$  และ  $N > 0$  ดังนั้นเมื่อ  $k$  คือจำนวนจริง สมบัติต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$(1) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

ลอการิทึมของผลคูณคือผลรวมของลอการิทึม

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

ลอการิทึมของผลหารคือผลต่างของลอการิทึม

$$(3) \log_a M^k = k \log_a M$$

ลอการิทึมของกำลังที่  $k$  คือ  $k$  เท่าของลอการิทึม

### explanation

หากเราปล่อยให้  $\log_a M = p$ ,  $\log_a N = q$  แล้วเราจะได้  $M = a^p$ ,  $N = a^q$

$$(1) \text{ จาก } MN = a^p a^q = a^{p+q} \text{ เราจะได้ } \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$$

$$(2) \text{ จาก } \frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \text{ เราจะได้ } \log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$$

$$(3) \text{ จาก } M^k = (a^p)^k = a^{pk} \text{ เราจะได้ } pk = \log_a M^k, \log_a M^k = pk = k \log_a M$$

### EXERCISE



◆ จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$(1) \log_2 16 + \log_2 64$$

$$= \log_2 16 \cdot 64 = \log_2 2^4 \cdot 2^6 = \log_2 2^{10} = 10$$

10

(log+) 2 > 1 6 > + (log+) 2 > 6 4 EXE

$$\log_2(16) + \log_2(64)$$

10

$$(2) \log_3 324 - \log_3 4$$

$$= \log_3 \frac{324}{4} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

4

(log+) 3 > 3 2 4 > - (log+) 3 > 4 EXE

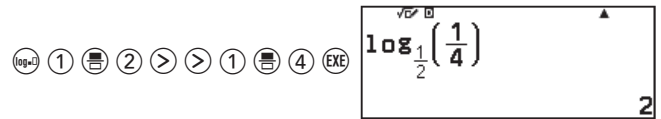
$$\log_3(324) - \log_3(4)$$

4

$$(3) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \right)^2 = 2$$

2



## PRACTICE

1 จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$(1) \log_3 243 + \log_3 \frac{1}{9}$$

$$= \log_3 243 \cdot \frac{1}{9} = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

3

$$(2) \log_2 512 - \log_2 16$$

$$= \log_2 \frac{512}{16} = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

5

$$(3) \log_{10} 10000$$

$$= \log_{10} 10^4 = 4$$

4

## ADVANCED

2] จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1)  $\log_5 \sqrt[4]{125}$

$$= \log_5 125^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_5 125 = \frac{1}{4} \log_5 5^3 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

(log=) 5 > ↑ √ 4 > 1 2 5 EXE

$$\log_5(\sqrt[4]{125}) = \frac{3}{4}$$

(2)  $\log_2 \sqrt{96} - \log_2 \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} &= \log_2 96^{\frac{1}{2}} - \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 96 - \frac{1}{2} \log_2 3 = \frac{1}{2} (\log_2 96 - \log_2 3) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \frac{96}{3} = \frac{1}{2} \log_2 32 = \frac{1}{2} \log_2 2^5 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

1 (log=) 2 > (log=) 2 > 9 6 > - (log=) 2 > √ 3 EXE

$$\frac{1}{2} \log_2(96) - \log_2(\sqrt{3}) = \frac{5}{2}$$

# การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม

## TARGET

การทำความเข้าใจการเปลี่ยนฐานของลอการิทึม

## STUDY GUIDE

### การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม

เราสามารถเปลี่ยนฐานของลอการิทึมเป็นค่าอื่นได้ การเปลี่ยนฐานจะเพิ่มช่วงของการคำนวณลอการิทึมอย่างมาก เมื่อ  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นจำนวนบวก และ  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$  และ  $c \neq 1$  ดังนั้นการเปลี่ยนฐานของลอการิทึมต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{และจะได้ว่า} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

#### explanation

เมื่อกำหนดให้  $\log_a b = p$  เราจะได้  $a^p = b$

เนื่องจาก  $c > 0$  และ  $c \neq 1$  และสำหรับฐาน  $c$  เมื่อทำการนำลอการิทึมฐาน  $c$  ใส่เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า  $\log_c a^p = \log_c b$ ,  $p \log_c a = \log_c b$

จาก  $a \neq 1$  แล้ว  $\log_c a \neq 0$  ดังนั้นเราจึงได้  $p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

ด้วยวิธีการนี้ เราจะได้  $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$

## EXERCISE



◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ  $\log_8 32$

แปลง  $8 = 2^3$ ,  $32 = 2^5$  เป็นฐาน 2

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3}$$

5  
3

(log) 8 > 3 2 EXE

(2) จงหาค่าของ  $\log_{\sqrt{27}} \frac{1}{81}$

แปลง  $27 = 3^3$ ,  $81 = 3^4$  เป็นฐาน 3

$$\log_{\sqrt{27}} \frac{1}{81} = \frac{\log_3 \frac{1}{81}}{\log_3 \sqrt{27}} = \frac{\log_3 3^{-4}}{\log_3 \sqrt{3^3}} = \frac{\log_3 3^{-4}}{\log_3 3^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4}{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{3}$$

8  
3

(log) (1/x) 2 7 > > 1 (1/x) 8 1 EXE

(3) ทำให้  $\log_5 2 \cdot \log_8 25$  เป็นรูปอย่างง่าย

เปลี่ยนฐานของ  $\log_8 25$  เป็น 5

$$\log_5 2 \cdot \log_8 25 = \log_5 2 \cdot \frac{\log_5 25}{\log_5 8} = \log_5 2 \cdot \frac{\log_5 5^2}{\log_5 2^3} = \log_5 2 \cdot \frac{2}{3 \log_5 2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$

(log) 5 > 2 > (log) 8 > 2 5 EXE

$$\log_5(2) \log_8(25) = \frac{2}{3}$$

#### OTHER METHODS

เปลี่ยนฐานเป็น 2

$$\log_5 2 \cdot \log_8 25 = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5^2}{\log_2 2^3} = \frac{1}{\log_2 5} \cdot \frac{2 \log_2 5}{3} = \frac{2}{3}$$

## PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ  $\log_9 \frac{1}{27}$

**แปลง  $9 = 3^2, 27 = 3^3$  เป็นฐาน 3**

$$\log_9 \frac{1}{27} = \frac{\log_3 \frac{1}{27}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 \frac{1}{3^3}}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 3^{-3}}{\log_3 3^2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}$$

(log) 9 > 1 = 2 7 EXE

$$\log_9\left(\frac{1}{27}\right) = -\frac{3}{2}$$

(2) จงหาค่าของ  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

**แปลง  $\frac{1}{2} = 2^{-1}, \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$  เป็นฐาน 2**

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = \frac{\log_2 \sqrt{2}}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}{\log_2 2^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}$$

(log) 1 = 2 > > √ 2 EXE

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$$



(3) ทำให้  $\log_2 27 \cdot \log_3 16$  เป็นรูปอย่างง่าย

**เปลี่ยนฐานของ  $\log_3 16$  เป็น 2**

$$\log_2 27 \cdot \log_3 16 = \log_2 27 \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 3} = \log_2 3^3 \cdot \frac{\log_2 2^4}{\log_2 3} = 3 \log_2 3 \cdot \frac{4}{\log_2 3} = 3 \cdot 4 = 12$$

12

(log=) 2 > 2 7 > (log=) 3 > 1 6 (EXE)

$\log_2(27) \log_3(16)$   
12

## ADVANCED

### EXERCISE



◆ จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1)  $(\log_2 27 - \log_8 3)(\log_9 16 - \log_{81} 8)$

เปลี่ยนฐานเป็น 2

$$\begin{aligned} &= \left( \log_2 27 - \frac{\log_2 3}{\log_2 8} \right) \left( \frac{\log_2 16}{\log_2 9} - \frac{\log_2 8}{\log_2 81} \right) = \left( \log_2 3^3 - \frac{\log_2 3}{\log_2 2^3} \right) \left( \frac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2} - \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3^4} \right) \\ &= \left( 3 \log_2 3 - \frac{\log_2 3}{3} \right) \left( \frac{4}{2 \log_2 3} - \frac{3}{4 \log_2 3} \right) = \frac{8 \log_2 3}{3} \cdot \frac{5}{4 \log_2 3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

10  
3

( (log=) 2 > 2 7 > - (log=) 8 > 3 > )

( (log=) 9 > 1 6 > - (log=) 8 1 > 8 > ) (EXE)

$(\log_2(27) - \log_8(3))$   
10  
3

(2)  $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

เปลี่ยนฐานเป็น 10

$$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2^2}{\log_{10} 2} = \frac{2 \log_{10} 2}{\log_{10} 2} = 2$$

2

(log=) 2 > 3 > (log=) 3 > 4 (EXE)

$\log_2(3) \log_3(4)$   
2

## PRACTICE

◆ จงทำนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1)  $(\log_5 81 - \log_{25} 9)(\log_3 125 - \log_9 625)$

**เปลี่ยนฐานเป็น 5**

$$\begin{aligned}
 &= \left( \log_5 81 - \frac{\log_5 9}{\log_5 25} \right) \left( \frac{\log_5 125}{\log_5 3} - \frac{\log_5 625}{\log_5 9} \right) = \left( \log_5 3^4 - \frac{\log_5 3^2}{\log_5 5^2} \right) \left( \frac{\log_5 5^3}{\log_5 3} - \frac{\log_5 5^4}{\log_5 3^2} \right) \\
 &= \left( 4 \log_5 3 - \frac{2 \log_5 3}{2} \right) \left( \frac{3}{\log_5 3} - \frac{4}{2 \log_5 3} \right) = 3 \log_5 3 \cdot \frac{1}{\log_5 3} = 3
 \end{aligned}$$

3

( ( (log=) 5 > 8 1 > - (log=) 2 5 > 9 > )

( ( (log=) 3 > 1 2 5 > - (log=) 9 > 6 2 5 > ) EXE

|                             |
|-----------------------------|
| $(\log_5 81) - \log_{25} 9$ |
| 3                           |

(2)  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

**เปลี่ยนฐานเป็น 10**

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 4} \cdot \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 5} \cdot \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 6} \cdot \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 7} \\
 &= \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 2} = \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 2} = 3
 \end{aligned}$$

3

(log=) 2 > 3 > (log=) 3 > 4 > (log=) 4 > 5 > (log=) 5 > 6 > (log=) 6 > 7 > (log=) 7 > 8 EXE

|                                                         |
|---------------------------------------------------------|
| $\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6 \log_6 7 \log_7 8$ |
| 3                                                       |

# กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

## TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติต่าง ๆ และวิธีเขียนกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

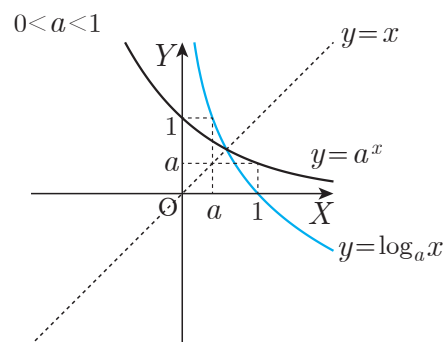
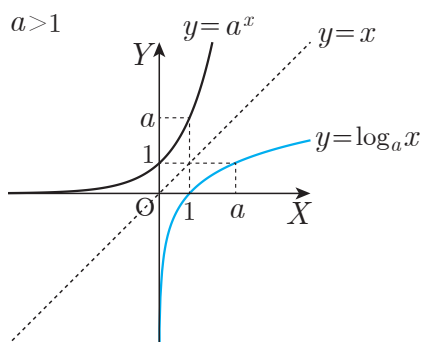
## STUDY GUIDE

### กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  จากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล  $y = a^x$  สำหรับจำนวนบวก  $x$  และ  $y$  ใด ๆ สามารถเป็นจำนวนได้เพียง 1 จำนวนเท่านั้น ซึ่งเราสามารถแสดงเป็น  $x = \log_a y$  ซึ่งแสดงให้เห็นว่า  $x$  คือฟังก์ชันของ  $y$  โดยการเปลี่ยน  $x$  และ  $y$  เราจะได้  $y = \log_a x$  โดยแสดงฟังก์ชันของ  $x$  ที่มีฐาน  $a$  ซึ่งจะเรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึม กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล  $y = a^x$  และกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม  $y = \log_a x$  นั้นสมมาตรกันตลอดเส้น  $y=x$  เนื่องจาก  $x$  และ  $y$  มีการเปลี่ยนแปลง

รายการต่อไปนี้แสดงสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันลอการิทึม

- (1) โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึม  $y = \log_a x$  คือ  $x > 0$  และเรนจ์คือจำนวนจริงทั้งหมด
- (2) กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล  $y = a^x$  และกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม  $y = \log_a x$  นั้นสมมาตรกันตลอดเส้น  $y=x$
- (3) กราฟเคลื่อนผ่านจุด  $(1, 0)$  และ  $(a, 1)$  และกลายเป็นเส้นโค้งที่มีแกน  $Y$  เป็นเส้นกำกับ
- (4) เมื่อ  $a > 1$  เส้นโค้งจะขึ้นไปทางขวา และเมื่อ  $0 < a < 1$  เส้นโค้งจะลงไปทางขวา



### การเลื่อนขนานและการสะท้อนกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  เราสามารถแปลกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม  $y = \log_a x$  ได้ตามที่แสดงด้านล่าง

#### การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานกับ  $p$  ตามแกน  $X \Rightarrow y = \log_a(x - p)$

การเลื่อนขนานกับ  $q$  ตามแกน  $Y \Rightarrow y = \log_a x + q$

#### การสะท้อน

การสะท้อนข้ามแกน  $X \Rightarrow y = \log_{\frac{1}{a}} x \quad (y = -\log_a x)$

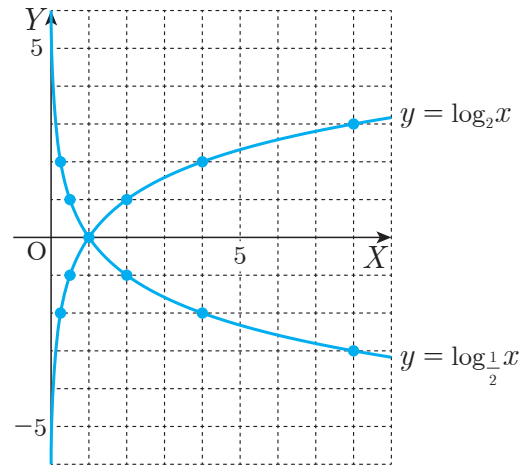
# EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 2 รายการด้านล่าง

[a] ฟังก์ชัน  $y = \log_2 x$

[b] ฟังก์ชัน  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

| $x$                            | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2  | 4  | 8  |
|--------------------------------|---------------|---------------|---|----|----|----|
| [a] $y = \log_2 x$             | -2            | -1            | 0 | 1  | 2  | 3  |
| [b] $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ | 2             | 1             | 0 | -1 | -2 | -3 |



(1) จงหาค่า  $y$  และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(2) จงวาดกราฟของ [a] และ [b]

(3) จงเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน [b] เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน [a]

จาก  $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x$  กราฟของ [a] และ [b] นั้นสมมาตรกันตลอดแกน  $X$

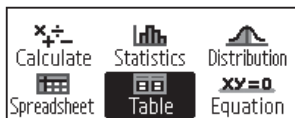
[b] สะท้อน [a] ผ่านแกน  $X$



check

ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบกราฟ

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\odot$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\odot$

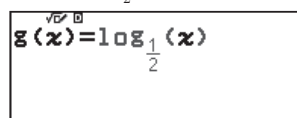


กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\odot$

เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\odot$

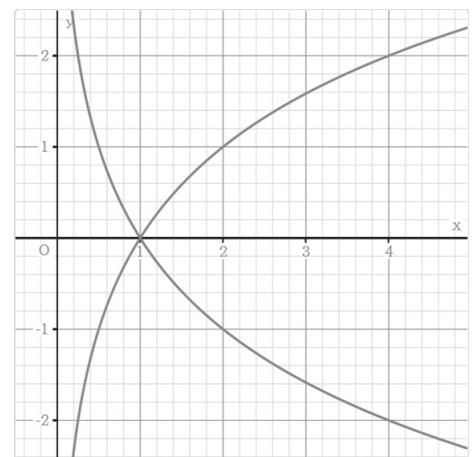
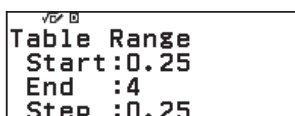
หลังจากป้อน  $f(x) = \log_2 x$  กด  $\odot$

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0.25, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):0.25] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\odot$



คุณสามารถวาดกราฟได้โดยการเขียนจุดต่าง ๆ จากตารางบนกระดาษกราฟ นอกจากนี้ สำหรับแต่ละค่าของ  $x$

เครื่องหมายค่าของ  $f(x)$  และ  $g(x)$  นั้นตรงข้ามกัน เป็นจำนวนลบหรือจำนวนบวก เราจึงทราบได้ว่ากราฟจะสมมาตรกันตลอดแกน  $X$

| $x$  | $f(x)$ | $g(x)$ |
|------|--------|--------|
| 0.25 | -2     | 2      |
| 0.5  | -1     | 1      |
| 1    | 0      | 0      |
| 2    | 1      | -1     |

| $x$  | $f(x)$ | $g(x)$ |
|------|--------|--------|
| 1.25 | 0.3219 | -0.321 |
| 1.5  | 0.5849 | -0.584 |
| 1.75 | 0.8073 | -0.807 |
| 2    | 1      | -1     |

| $x$  | $f(x)$ | $g(x)$ |
|------|--------|--------|
| 2.25 | 1.1699 | -1.169 |
| 2.5  | 1.3219 | -1.321 |
| 2.75 | 1.4594 | -1.459 |
| 3    | 1.5849 | -1.584 |

| $x$  | $f(x)$ | $g(x)$ |
|------|--------|--------|
| 3.25 | 1.7004 | -1.7   |
| 3.5  | 1.8073 | -1.807 |
| 3.75 | 1.9068 | -1.906 |
| 4    | 2      | -2     |

## PRACTICE

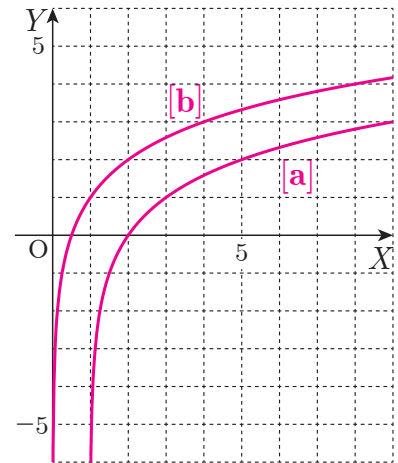
1 จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 2 รายการด้านล่าง

[a] ฟังก์ชัน  $y = \log_2(x-1)$  [b] ฟังก์ชัน  $y = \log_2 x + 1$

(1) วาดกราฟของแต่ละฟังก์ชัน

กราฟของ [a] คือเส้นโค้งที่เคลื่อนผ่านจุด (2, 0) และ (3, 1) ขึ้นไปทางขวา

กราฟของ [b] คือเส้นโค้งที่เคลื่อนผ่านจุด (1, 1) และ (2, 2) ขึ้นไปทางขวา



(2) จงเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน [a] เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน  $y = \log_2 x$

[a] กราฟของฟังก์ชัน  $y = \log_2 x$  เลื่อนขนานตามแกน X 1 หน่วย

(3) จงเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน [b] เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน  $y = \log_2 x$

[b] กราฟของฟังก์ชัน  $y = \log_2 x$  เลื่อนขนานตามแกน Y 1 หน่วย

check

ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบกราฟ

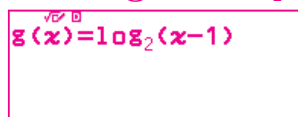
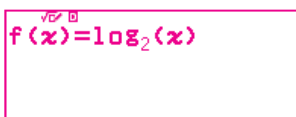
กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\odot$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\odot$



กด  $\odot$  เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด  $\odot$

เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด  $\odot$  หลังจาก ป้อน  $f(x) = \log_2 x$  กด  $\odot$

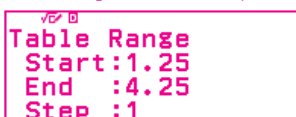
และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = \log_2(x-1)$



กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1.25, End (สิ้นสุด):4.25, Step (ขั้น):1]

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\odot$



คุณสามารถวาดกราฟได้โดยการเขียนจุดต่าง ๆ จากตารางบนกระดาษกราฟ นอกจาก  
นี้ ค่าของ  $g(x+1)$  เท่ากับค่าของ  $f(x)$  ดังนั้น เราจึงรู้ได้ว่ากราฟนั้นเลื่อนขนาน 1 หน่วย  
ตามแนวแกน X

|   | $x$  | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|------|--------|--------|
| 1 | 1.25 | 0.3219 | -2     |
| 2 | 2.25 | 1.1699 | 0.3219 |
| 3 | 3.25 | 1.7004 | 1.1699 |
| 4 | 4.25 | 2.0874 | 1.7004 |

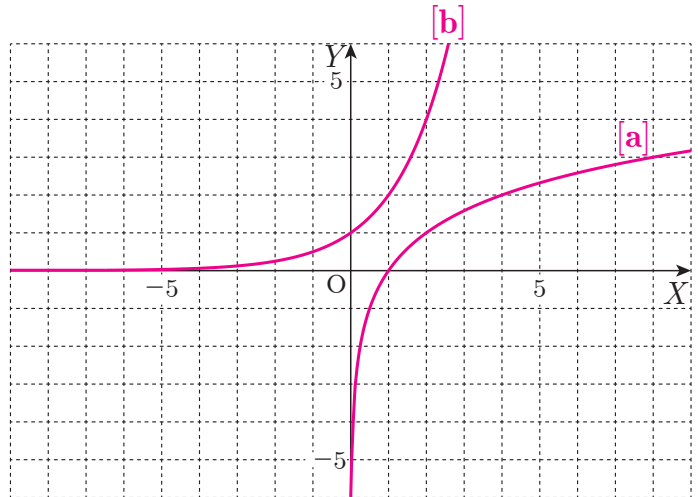
2 จงแก้โจทย์ต่อไปนี้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน 2 รายการด้านล่าง

[a] ฟังก์ชัน  $y = \log_2 x$  [b] ฟังก์ชัน  $y = 2^x$

(1) วาดกราฟของแต่ละฟังก์ชัน

กราฟของ [a] คือเส้นโค้งที่  
เคลื่อนผ่านจุด (1, 0) และ (2, 1)  
ขึ้นไปทางขวา

กราฟของ [b] คือเส้นโค้งที่  
เคลื่อนผ่านจุด (0, 1) และ (1, 2)  
ขึ้นไปทางขวา



(2) จงเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน [a] เมื่อเทียบกับฟังก์ชัน [b]

[a] สะท้อน [b] ตลอดเส้น  $y=x$

check

ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบกราฟ

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\odot$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\odot$



กด  $\odot$  เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด  $\odot$

เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด  $\odot$  หลังจากป้อน  $f(x) = \log_2 x$  กด  $\odot$

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = 2^x$

$f(x) = \log_2(x)$

$g(x) = 2^x$

กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):0.5, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):0.5]

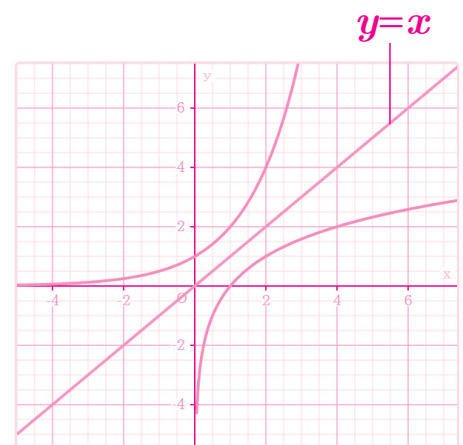
เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด  $\odot$

Table Range  
Start:0.5  
End :4  
Step :0.5

คุณสามารถวาดกราฟได้โดยการเขียนจุดต่าง ๆ จาก  
ตารางบนกระดาษกราฟ นอกจากนี้ ด้วยการวาดกราฟ  
ของ  $y=x$  เราจะเห็นว่ากราฟ 2 กราฟมีเส้นที่สมมาตร  
กัน

| x   | f(x)   | g(x)   |
|-----|--------|--------|
| 0.5 | -1     | 1.4142 |
| 1   | 0      | 2      |
| 1.5 | 0.5849 | 2.8284 |
| 2   | 1      | 4      |

| x   | f(x)   | g(x)   |
|-----|--------|--------|
| 2.5 | 1.3219 | 5.6568 |
| 3   | 1.5849 | 8      |
| 3.5 | 1.8073 | 11.313 |
| 4   | 2      | 16     |



# สมบัติต่าง ๆ และขนาดของฟังก์ชันลอการิทึม

## TARGET

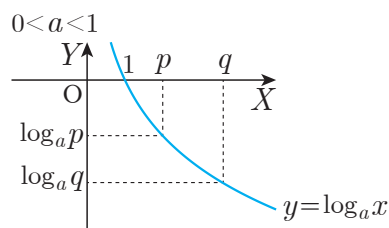
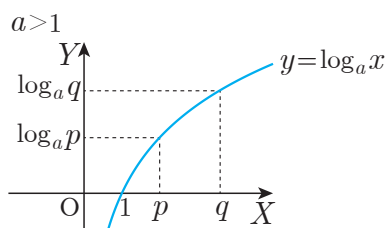
การทำความเข้าใจวิธีใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมเพื่อเปรียบเทียบขนาดของลอการิทึม

## STUDY GUIDE

### สมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันลอการิทึม

เมื่อ  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  ดังนั้นสำหรับฟังก์ชันลอการิทึม  $y = \log_a x$  สมบัติต่าง ๆ ต่อไปนี้จึงถูกต้อง

- (1) **กราฟเคลื่อนผ่านจุด  $(1, 0)$  และ  $(a, 1)$  และกลายเป็นเส้นโค้งที่มีแกน  $Y$  เป็นเส้นกำกับ**
- (2) **การสมมูล** หาก  $p = q (> 0)$  แล้ว  $\log_a p = \log_a q$
- (3) **ขนาด**
  - เมื่อ  $a > 1$  และหาก  $0 < p < q$  แล้ว  $\log_a p < \log_a q$   
(เนื่องจากค่าของ  $x$  เพิ่มขึ้น ค่าของ  $y$  จึงเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน)
  - เมื่อ  $0 < a < 1$  และหาก  $0 < p < q$  แล้ว  $\log_a p > \log_a q$   
(เนื่องจากค่าของ  $x$  เพิ่มขึ้น ค่าของ  $y$  จึงลดลง)



### ขนาดของลอการิทึม

#### การหาลอการิทึม

ด้วยการใช้สมบัติลอการิทึม เราสามารถหา นิพจน์  $\log_a a^k = \log_a l \dots$  (ii) จาก  $a^k = l \dots$  (i) ได้ การแปลงนิพจน์ (i) เป็นนิพจน์เช่นเดียวกับ (ii) นิพจน์ลอการิทึมที่มีฐานร่วม  $a$  จะเรียกว่า **หาค่าลอการิทึมที่มีฐาน  $a$**

#### การเปรียบเทียบขนาดของลอการิทึม

- (a) **ทำฐานให้เหมือนกัน** จากนั้นจึงเปรียบเทียบขนาดของแอนติลอการิทึม

**Ex.** เปรียบเทียบขนาดของ  $\log_3 5$  และ  $\log_3 6$

เนื่องจาก  $3 > 1$  หาก  $p < q$  ดังนั้นเราจะได้  $\log_a p < \log_a q$

เนื่องจาก  $5 < 6$  เราจะได้  $\log_3 5 < \log_3 6$

- (b) **เปรียบเทียบขนาดกับ 1** เพื่อประเมินขนาด

**Ex.** เปรียบเทียบขนาดของ  $\log_3 2$  และ  $\log_2 3$

ซึ่งเราจะได้  $\log_3 2 < \log_3 3 = 1, \log_2 3 > \log_2 2 = 1$

ดังนั้น เราจึงได้  $\log_3 2 < \log_2 3$

## EXERCISE

◆ ใช้เครื่องหมายอสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงขนาดของตัวเลขต่อไปนี้

(1)  $\log_2 7, \log_2 5, \log_2 9$

เนื่องจากฐาน  $2 > 1$  ขนาดของแอนติลอการิทึมและ  
ขนาดของลอการิทึมนั้นจึงตรงกัน

จาก  $5 < 7 < 9$  เราจะได้  $\log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 9$

$$\log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 9$$

(2)  $\log_{0.7} 2, \log_{0.7} 3, \log_{0.7} 4$

เนื่องจากฐาน  $0.7 < 1$  ขนาดของแอนติลอการิทึมและ  
ขนาดของลอการิทึมนั้นจึงกลับกัน

จาก  $2 < 3 < 4$  เราจะได้  $\log_{0.7} 4 < \log_{0.7} 3 < \log_{0.7} 2$

$$\log_{0.7} 4 < \log_{0.7} 3 < \log_{0.7} 2$$



### check

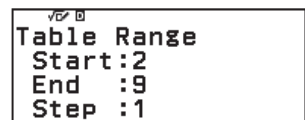
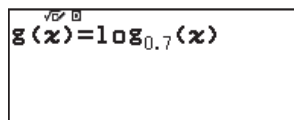
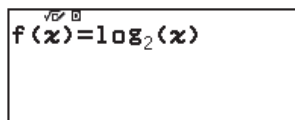
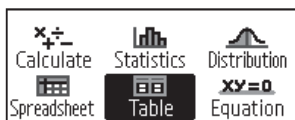
ใช้ตารางเพื่อตรวจสอบ

กด  $\odot$  เลือก [Table (ตาราง)] กด  $\text{OK}$  จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด  $\text{C}$

กด  $\odot$  เลือก [Define  $f(x)/g(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)/g(x)$ )] กด  $\text{OK}$  เลือก [Define  $f(x)$  (กำหนดค่า  $f(x)$ )] กด  $\text{OK}$  หลังจาก  
ป้อน  $f(x) = \log_2 x$  กด  $\text{EXE}$

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน  $g(x) = \log_{0.7} x$

กด  $\odot$  เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด  $\text{OK}$  หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):2, End (สิ้นสุด):9, Step (ขั้น):1] เลือก  
[Execute (ดำเนินการ)] กด  $\text{EXE}$



| x | f(x)   | g(x)   |
|---|--------|--------|
| 1 |        | -1.943 |
| 2 |        | -3.08  |
| 3 | 1.5849 | -3.886 |
| 4 |        | -4.512 |
| 5 | 2.3219 |        |

| x | f(x)   | g(x)   |
|---|--------|--------|
| 5 | 2.5849 | -5.023 |
| 6 |        | -5.455 |
| 7 | 2.8073 | -5.83  |
| 8 |        | -6.16  |
| 9 | 3.1699 |        |



สำหรับ  $f(x) = \log_2 x$  เนื่องจาก  $f(5) = 2.3219$ ,  $f(7) = 2.8073$  และ

$f(9) = 3.1699$  เราจึงสามารถยืนยัน  $\log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 9$  ได้

สำหรับ  $g(x) = \log_{0.7} x$  เนื่องจาก  $g(2) = -1.943$ ,  $g(3) = -3.08$  และ

$g(4) = -3.886$  เราจึงสามารถยืนยัน  $\log_{0.7} 4 < \log_{0.7} 3 < \log_{0.7} 2$  ได้

## PRACTICE

◆ ใช้เครื่องหมายอสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงขนาดของตัวเลขต่อไปนี้

(1)  $\log_{1.1} 1.4, \log_{1.1} 1.3, \log_{1.1} 1.2$

เนื่องจากฐาน  $1.1 > 1$  ขนาดของแอนติ  
ลอการิทึมและขนาดของลอการิทึม  
จึงตรงกัน

จาก  $1.2 < 1.3 < 1.4$  เราจะได้

$$\log_{1.1} 1.2 < \log_{1.1} 1.3 < \log_{1.1} 1.4$$

$$\log_{1.1} 1.2 < \log_{1.1} 1.3 < \log_{1.1} 1.4$$

(2)  $\log_{\frac{3}{7}} 8, \log_{\frac{3}{7}} 9, \log_{\frac{3}{7}} 10$

เนื่องจากฐาน  $\frac{3}{7} < 1$  ขนาดของแอนติ  
ลอการิทึมและขนาดของลอการิทึม  
จะกลับกัน

จาก  $8 < 9 < 10$  เราจะได้

$$\log_{\frac{3}{7}} 10 < \log_{\frac{3}{7}} 9 < \log_{\frac{3}{7}} 8$$

$$\log_{\frac{3}{7}} 10 < \log_{\frac{3}{7}} 9 < \log_{\frac{3}{7}} 8$$



## EXERCISE



◆ ใช้เครื่องหมายอสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงขนาดของตัวเลขต่อไปนี้

(1)  $\log_2 \sqrt[3]{125}, \frac{1}{2} \log_2 36, 2$

เนื่องจากฐาน  $2 > 1$  ทำให้ฐานเท่ากันกับ 2

$$\log_2 \sqrt[3]{125} = \log_2 (5^3)^{\frac{1}{3}} = \log_2 5, \frac{1}{2} \log_2 36 = \log_2 (6^2)^{\frac{1}{2}} = \log_2 6, 2 = 2 \log_2 2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$$

จาก  $4 < 5 < 6$  เราจะได้  $2 < \log_2 \sqrt[3]{125} < \frac{1}{2} \log_2 36$

$$2 < \log_2 \sqrt[3]{125} < \frac{1}{2} \log_2 36$$

(log) 2 > (1/x) 3 > 1 2 5 EXE

$$\log_2 (\sqrt[3]{125})$$

2.321928095

1 (log) 2 > (log) 2 > 3 6 EXE

$$\frac{1}{2} \log_2 (36)$$

2.584962501

(2)  $\log_3 \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 64, -1$

เนื่องจากฐาน  $3 > 1$  ทำให้ฐานเท่ากันกับ 3

$$\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 64 = \log_{\frac{1}{3}} (2^6)^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} 4 = \frac{\log_3 4}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 4}{\log_3 3^{-1}} = -\log_3 4 = \log_3 4^{-1} = \log_3 \frac{1}{4},$$

$$-1 = -\log_3 3 = \log_3 3^{-1} = \log_3 \frac{1}{3}$$

จาก  $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$  เราจะได้  $\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 64 < -1 < \log_3 \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 64 < -1 < \log_3 \frac{1}{2}$$

(log) 3 > 1 (1/x) 2 EXE

$$\log_3 \left( \frac{1}{2} \right)$$

-0.6309297536

1 (log) 3 > (log) 1 (log) 3 > 6 4 EXE

$$\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} (64)$$

-1.261859507

(3)  $\log_{0.3} 5, \log_2 5, \log_6 5$

ก่อนอื่นให้กำหนดขนาดของ 0 และ 1

ฐานของ  $\log_{0.3} 5$  น้อยกว่า 1 และแอนติลอการิทึมมากกว่า 1 ดังนั้นจึงเป็นจำนวนลบ

จาก  $\log_2 5 > \log_2 2 = 1, \log_6 5 < \log_6 6 = 1$  เราจะได้  $\log_{0.3} 5 < \log_6 5 < \log_2 5$

$$\log_{0.3} 5 < \log_6 5 < \log_2 5$$

(log) 0 . 3 > 5 EXE

$$\log_{0.3} (5)$$

-1.336772647

(log) 2 > 5 EXE

$$\log_2 (5)$$

2.321928095

(log) 6 > 5 EXE

$$\log_6 (5)$$

0.8982444017

## PRACTICE

◆ ใช้เครื่องหมายอสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงขนาดของตัวเลขต่อไปนี้

(1)  $\log_5 \sqrt[5]{243}, 1, \frac{1}{4} \log_5 256$

**เนื่องจากฐาน  $5 > 1$  ทำให้ฐานเท่ากันกับ 5**

$$\log_5 \sqrt[5]{243} = \log_5 (3^5)^{\frac{1}{5}} = \log_5 3, 1 = \log_5 5, \frac{1}{4} \log_5 256 = \log_5 (2^8)^{\frac{1}{4}} = \log_5 4$$

**จาก  $3 < 4 < 5$  เราจะได้  $\log_5 \sqrt[5]{243} < \frac{1}{4} \log_5 256 < 1$**

$$\log_5 \sqrt[5]{243} < \frac{1}{4} \log_5 256 < 1$$

(log) 5 > 1/4 5 > 2 4 3 EXE

$$\log_5 (\sqrt[5]{243})$$

0.6826061945

1 1/4 4 > (log) 5 > 2 5 6 EXE

$$\frac{1}{4} \log_5 (256)$$

0.8613531161

(2)  $\frac{1}{7} \log_{0.1} 128, -1, \log_{10} \frac{1}{5}$

**ทำให้ฐานเท่ากันกับ 10**

$$\frac{1}{7} \log_{0.1} 128 = \log_{\frac{1}{10}} (2^7)^{\frac{1}{7}} = \log_{\frac{1}{10}} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{1}{10}} = -\log_{10} 2 = \log_{10} 2^{-1} = \log_{10} \frac{1}{2}$$

$$-1 = -\log_{10} 10 = \log_{10} 10^{-1} = \log_{10} \frac{1}{10}$$

**จาก  $\frac{1}{10} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$  เราจะได้  $-1 < \log_{10} \frac{1}{5} < \frac{1}{7} \log_{0.1} 128$**

$$-1 < \log_{10} \frac{1}{5} < \frac{1}{7} \log_{0.1} 128$$

1 1/7 7 > (log) 0 . 1 > 1 2 8 EXE

$$\frac{1}{7} \log_{0.1} (128)$$

-0.3010299957

(log) 1 0 > 1 1/5 5 EXE

$$\log_{10} \left( \frac{1}{5} \right)$$

-0.6989700043

# สมการและอสมการลอการิทึม

## TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแก้โจทย์โดยใช้สมการและอสมการลอการิทึม

## STUDY GUIDE

### สมการลอการิทึม

เมื่อ  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $M > 0$  และ  $N > 0$  จากนั้นจึงแก้โจทย์โดยใช้สมการลอการิทึมดังต่อไปนี้

(1) ตรวจสอบว่าฐาน  $> 0$  (ฐาน  $\neq 1$ ) และแอนติลอการิทึม  $> 0$

(2) ใช้สมบัติลอการิทึมเพื่อเปลี่ยนรูปแบบเป็น

$$\log_a M = \log_a N$$

(3) ใช้ความสัมพันธ์ทางด้านขวาเพื่อแก้สมการ

(4) ตรวจสอบว่าคำตอบของ (3) นั้นตรงกับเงื่อนไขของ (1) หรือไม่

โปรดทราบว่าคำตอบของสมการเอกซ์โพเนนเชียลอาจอยู่ในรูปแบบลอการิทึม

$$\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$$

### อสมการลอการิทึม

เมื่อ  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $M > 0$  และ  $N > 0$  จากนั้นจึงแก้โจทย์โดยใช้สมการลอการิทึมดังต่อไปนี้

(1) กำหนดเงื่อนไขของฐานและแอนติ

ลอการิทึม และจัดเรียงลอการิทึม

(2) ใช้ความสัมพันธ์ทางด้านขวาเพื่อสร้าง

อสมการแอนติลอการิทึมจากขนาดของฐาน

(3) ตรวจสอบว่าคำตอบของ (2) นั้นตรงกับ

เงื่อนไขหรือไม่

โปรดทราบว่าคำตอบของอสมการเอกซ์โพเนน

เชียลอาจอยู่ในรูปแบบลอการิทึม

เมื่อ  $a > 1$

$$\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow 0 < M < N$$

เมื่อ  $0 < a < 1$

$$\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow 0 < N < M$$

## EXERCISE



① จงแก้สมการต่อไปนี้

(1)  $\log_3 x = -2$

แอนติลอการิทึม  $x > 0$

ในตอนนี้เราสามารถแปลง  $\log_3 x = -2$  เป็น  $\log_3 x = \log_3 3^{-2}$  เพื่อที่จะได้  $x = 3^{-2}$

ดังนั้น เราจึงได้  $x = \frac{1}{9}$  ซึ่งตรงกับเงื่อนไข  $x > 0$

$$x = \frac{1}{9}$$

(log) 3 > 1 = 9 EXE

$$\log_3 \left( \frac{1}{9} \right)$$

## OTHER METHODS

เราสามารถแก้โจทย์นี้ได้จากนิยามของลอการิทึม

จาก  $\log_3 x = -2$  เราจะได้  $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(2)  $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$

แอนติลอการิทึม  $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$  เป็น  $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$  เพื่อที่จะได้  $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

ดังนั้น เราจึงได้  $x = \frac{1}{8}$  ซึ่งตรงกับเงื่อนไข  $x > 0$

$x = \frac{1}{8}$

(log) 1  $\frac{1}{2}$  2 > > 1  $\frac{1}{2}$  8 EXE  $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)$  3

(3)  $2^x = 3$

นำลอการิทึมฐาน 2 ใส่เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ เนื่องจากเป็น  $\log_2 2^x = \log_2 3$  เราจะได้  $x = \log_2 3$

$x = \log_2 3$

คำนวณ  $2^{\log_2 3}$

2  $\log_2$  3 > 3 EXE  $2^{\log_2(3)}$  3

#### OTHER METHODS

เราสามารถแก้โจทย์นี้ได้จากนิยามของลอการิทึม

จาก  $2^x = 3$  เราจะได้  $x = \log_2 3$

## 2 จงแก้สมการต่อไปนี้

(1)  $\log_2 x < 3$

ฐาน  $2 > 1$  ดังนั้นแอนติลอการิทึมคือ  $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_2 x < 3$  เป็น  $\log_2 x < \log_2 2^3$  เพื่อที่จะได้  $x < 2^3$

ดังนั้น เราจึงได้  $x < 8$  ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของแอนติลอการิทึม  $0 < x < 8$

$0 < x < 8$

(2)  $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$

สำหรับฐาน  $0 < \frac{1}{3} < 1$  เราจะได้แอนติลอการิทึม  $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$  เป็น  $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$  เพื่อที่จะได้  $x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

ดังนั้น เราจึงได้  $x < 9$  ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของแอนติลอการิทึม  $0 < x < 9$

$0 < x < 9$

(3)  $3^x < 5$

นำลอการิทึมฐาน 3 ใส่เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ เนื่องจากเป็น  $\log_3 3^x < \log_3 5$  เราจะได้  $x < \log_3 5$

$x < \log_3 5$

## PRACTICE

1 จงแก้สมการต่อไปนี้

(1)  $\log_5 x = -3$

แอนติลอการิทึม  $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_5 x = -3$  เป็น  $\log_5 x = \log_5 5^{-3}$  เพื่อที่จะได้  $x = 5^{-3}$

ดังนั้น เราจึงได้  $x = \frac{1}{125}$  ซึ่งตรงกับเงื่อนไข  $x > 0$

$x = \frac{1}{125}$

(log=) 5 > 1 = 1 2 5 EXE

$\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$   
-3

(2)  $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = 4$

แอนติลอการิทึม  $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = 4$  เป็น  $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$  เพื่อที่จะได้

$x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$

ดังนั้น เราจึงได้  $x = \frac{1}{4}$  ซึ่งตรงกับเงื่อนไข  $x > 0$

$x = \frac{1}{4}$

(log=) 1 = 1/2 > 2 > 1 = 1 4 EXE

$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{4}\right)$   
4

(3)  $10^x = 2$

นำลอการิทึมฐาน 10 ใส่เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ เนื่องจากเป็น  $\log_{10} 10^x = \log_{10} 2$  เราจะได้  $x = \log_{10} 2$

$x = \log_{10} 2$

1 0 = (log=) 1 0 > 2 EXE

$\log_{10}(2)$   
2

2 จงแก้สมการต่อไปนี้

(1)  $\log_3 x < -2$

ฐาน  $3 > 1$  ดังนั้นแอนติลอการิทึมคือ  $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_3 x < -2$  เป็น  $\log_3 x < \log_3 3^{-2}$  เพื่อที่จะได้  $x < 3^{-2}$

ดังนั้น เราจึงได้  $x < \frac{1}{9}$  ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของแอนติลอการิทึม  $0 < x < \frac{1}{9}$

$$0 < x < \frac{1}{9}$$

(2)  $\log_{\frac{1}{6}} x > -1$

สำหรับฐาน  $0 < \frac{1}{6} < 1$  เราจะได้แอนติลอการิทึม  $x > 0$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_{\frac{1}{6}} x > -1$  เป็น  $\log_{\frac{1}{6}} x > \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$  เพื่อที่จะได้

$$x < \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$$

ดังนั้น เราจึงได้  $x < 6$  ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของแอนติลอการิทึม  $0 < x < 6$

$$0 < x < 6$$

(3)  $5^x < 7$

นำลอการิทึมฐาน 5 ใส่เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ เนื่องจากเป็น  $\log_5 5^x < \log_5 7$  เราจะได้  $x < \log_5 7$

$$x < \log_5 7$$

## EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงแก้สมการ  $\log_3(2x-5) = 2$

จากเงื่อนไขแอนติลอการิทึม  $2x-5 > 0$  เราจะได้  $x > \frac{5}{2}$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_3(2x-5) = 2$  เป็น  $\log_3(2x-5) = \log_3 3^2$  เพื่อที่จะได้  $2x-5 = 3^2$

ดังนั้น เราจึงได้  $x = 7$  ซึ่งตรงกับเงื่อนไข  $x > \frac{5}{2}$

$x = 7$

(2) เมื่อ  $2 \leq x \leq 8$  จงหาค่าที่น้อยที่สุดและมากที่สุดของฟังก์ชันของ  $x$ ,  $f(x) = 4 \log_2 x - 5$

จงหาลอการิทึมแต่ละด้านของ  $2 \leq x \leq 8$  เพื่อที่จะได้  $\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 8$  และ  $1 \leq \log_2 x \leq 3$

ดังนั้น เราจึงได้  $4 \cdot 1 - 5 \leq 4 \log_2 x - 5 \leq 4 \cdot 3 - 5$  และ  $-1 \leq f(x) \leq 7$

ดังนั้น เมื่อ  $x=8$  ค่าสูงสุดคือ 7 และเมื่อ  $x=2$  ค่าต่ำสุดคือ -1

เมื่อ  $x=8$  ค่าสูงสุดคือ 7 และเมื่อ  $x=2$  ค่าต่ำสุดคือ -1

## PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงแก้สมการ  $\log_2(x-1)(x-2) = 1$

จากเงื่อนไขแอนติลอการิทึม  $(x-1)(x-2) > 0$  เราจะได้  $x < 1, x > 2$

ในตอนนี้ เราสามารถแปลง  $\log_2(x-1)(x-2) = 1$  เป็น

$\log_2(x-1)(x-2) = \log_2 2$  เพื่อที่จะได้  $(x-1)(x-2) = 2$

ดังนั้น เราจึงได้  $x = 0, 3$  ซึ่งตรงกับเงื่อนไข  $x < 1, x > 2$

$x = 0, 3$

(2) เมื่อ  $3 \leq x \leq 9$  จงหาค่าที่น้อยที่สุดและมากที่สุดของฟังก์ชันของ  $x$ ,  $f(x) = 2 \log_3 x + 1$

จงหาลอการิทึมแต่ละด้านของ  $3 \leq x \leq 9$  เพื่อที่จะได้  $\log_3 3 \leq \log_3 x \leq \log_3 9$  และ

$1 \leq \log_3 x \leq 2$

ดังนั้น เราจึงได้  $2 \cdot 1 + 1 \leq 2 \log_3 x + 1 \leq 2 \cdot 2 + 1$  และ  $3 \leq f(x) \leq 5$

ดังนั้น เมื่อ  $x=9$  ค่าสูงสุดคือ 5 และเมื่อ  $x=3$  ค่าต่ำสุดคือ 3

เมื่อ  $x=9$  ค่าสูงสุดคือ 5 และเมื่อ  
 $x=3$  ค่าต่ำสุดคือ 3

# ลอการิทึมสามัญ

## TARGET

การทำความเข้าใจลอการิทึมสามัญและวิธีใช้

## STUDY GUIDE

### ลอการิทึมสามัญ

ลอการิทึมที่ใช้มากในการคำนวณคือ **ลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10** เราจึงกล่าวได้ว่าลอการิทึมดังกล่าวเป็น **ลอการิทึมสามัญ** โดยทั่วไปแล้ว จำนวนบวก  $N$  ใดๆ สามารถแสดงในรูปแบบ  $N = a \times 10^n$  ( $1 \leq a < 10$ ) โดยที่  $n$  เป็นจำนวนบวก การเขียน  $N$  ในรูปนี้สามารถนำมาช่วยในการหาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบางจำนวนได้จากค่าลอการิทึมที่ทราบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\log_{10} N = \log_{10} a + n$$



**Ex.** จาก  $26300 = 2.63 \times 10^4$  เราจะได้  $\log_{10} 26300 = \log_{10} 2.63 + 4$

โดยการคำนวณโดยเครื่องคิดเลข เนื่องจาก  $\log_{10} 2.63 = 0.4200$  เราจะได้  $\log_{10} 26300 = 4.4200$

### การใช้ลอการิทึมสามัญ

เราสามารถกำหนดจำนวนเป็นจำนวนที่ใหญ่มากหรือจำนวนตำแหน่งทศนิยมของจำนวนที่น้อยมาก ซึ่งตัวเลขที่ไม่ใช่ 0 จะปรากฏขึ้นในครั้งแรก

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของจำนวนบวก  $N$  คือจำนวนที่มีตัวเลข  $k$  หลัก

จำนวนเต็มต่ำสุดของ  $k$  หลัก  $\leq N < (k+1)$  หลัก คือค่าต่ำสุดของจำนวนเต็ม

ดังนั้น เราจึงได้  $10^{k-1} \leq N < 10^k$  โดยการหาลอการิทึมของทั้งสองข้าง เราจะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\text{จำนวนบวก } N \text{ มีจำนวน } k \text{ หลัก} \Leftrightarrow 10^{k-1} \leq N < 10^k \Leftrightarrow k-1 \leq \log_{10} N < k$$

**วิธีหาจำนวนตัวเลข  $N$  หลักของจำนวนเต็มบวก**

- (1) หาค่าของ  $\log_{10} N$
- (2) หาจำนวนเต็ม  $k$  ที่ตรงกับ  $k-1 \leq \log_{10} N < k$
- (3) ดังนั้น เราจึงรู้ว่าจำนวนบวก  $N$  คือตัวเลข  $k$  หลัก

นอกจากนี้ เมื่อตัวเลขที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏขึ้นเป็นครั้งแรกที่ทศนิยมตำแหน่งที่  $n$  ของจำนวนบวก  $N$  จึงเป็น

$$10^{-n} \leq N < 10^{-n+1}$$

โดยการหาลอการิทึมของทั้งสองข้าง เราจะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

**ตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งที่  $n$  ในจำนวนบวก  $N$**

$$\Leftrightarrow 10^{-n} \leq N < 10^{-n+1} \Leftrightarrow -n \leq \log_{10} N < -n+1$$

**วิธีหาตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ศูนย์ของเศษส่วนทศนิยมจำนวนบวก  $N$**

ตัวเลขหลักแรกที่ปรากฏในเศษส่วนทศนิยมที่ไม่ใช่ 0 จะเรียกว่าจำนวนแรกที่ไม่ใช่ศูนย์

- (1) หาค่าของ  $\log_{10} N$
- (2) หาจำนวนเต็ม  $n$  ที่ตรงกับ  $-n \leq \log_{10} N < -n+1$
- (3) ดังนั้น เราจึงพบว่าตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งที่  $n$  ในเศษส่วนทศนิยมจำนวนบวก  $N$



## EXERCISE



1 จงหาจำนวนหลักในจำนวนเต็มต่อไปนี้

(1)  $2^{30}$

$$\log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 9.031$$

จาก  $9 < \log_{10} 2^{30} < 10$ ,  $2^{30}$  คือจำนวนเต็ม 10 หลัก

### ตัวเลข 10 หลัก

log 1 0 > 2 3 0 EXE

$$\log_{10}(2^{30})$$

9.03089987

2 3 0 EXE

$$2^{30}$$

1073741824

(2)  $5^{40}$

$$\log_{10} 5^{40} = 40 \log_{10} 5 = 27.959$$

จาก  $27 < \log_{10} 5^{40} < 28$ ,  $5^{40}$  คือจำนวนเต็ม 28 หลัก

### ตัวเลข 28 หลัก

log 1 0 > 5 4 0 EXE

$$\log_{10}(5^{40})$$

27.95880017

5 4 0 EXE

$$5^{40}$$

9.094947018 × 10<sup>27</sup>

2 สำหรับ  $\left(\frac{1}{2}\right)^8$  ตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งใด

$$\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = -8 \log_{10} 2 = -2.408$$

จาก  $-3 < \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^8 < -2$  ตัวเลขหลักแรกที่ไม่ใช่ 0 ปรากฏที่ทศนิยมตำแหน่งที่ 3

### ทศนิยมตำแหน่งที่ 3

log 1 0 > ( 1 2 ) 8 EXE

$$\log_{10} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)$$

-2.408239965

( 1 2 ) 8 EXE

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

3.90625 × 10<sup>-3</sup>





เนื่องจาก  $\log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 9.0309$  จาก  $2^{30} = 10^{9.0309} = 10^{0.0309} \times 10^9 = 1.0737 \times 10^9$  เราทราบว่า  $2^{30}$  มี 10 หลัก และตัวเลขในตำแหน่งที่ 5 คือ 1, 0, 7, 3 และ 7

กด **OK** เลือก [Fix (คงที่)] กด **OK** เลือก [Fix4 (คงที่ 4)](4 หลัก) กด **OK** กด **AC**

② ③ ④ ⑤ ⑥

2<sup>30</sup> 1073741824.

เนื่องจาก  $\log_{10} 5^{40} = 40 \log_{10} 5 = 27.9588$

จาก  $5^{40} = 10^{27.9588} = 10^{0.9588} \times 10^{27} = 9.0949 \times 10^{27}$  เราทราบว่า  $5^{40}$  มี 28 หลัก และตัวเลขในตำแหน่งที่ 5 คือ 9, 0, 9, 4 และ 9

5 4 0 EXE

540  
9.094947018  $\times 10^{27}$