

การแบ่งภายในและการแบ่งภายนอก

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจวิธีหาพิกัดของจุดแบ่งภายในและจุดแบ่งภายนอกของส่วนของเส้นตรง

STUDY GUIDE

ระยะห่างระหว่างจุด 2 จุดบนเส้นจำนวน

บนเส้นจำนวน เรากล่าวได้ว่าเมื่อจำนวนจริง a สอดคล้องกับจุด P ดังนั้น a จึงเป็น **พิกัด** ของจุด P เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(a)$ และสามารถเขียนสัญลักษณ์แสดงระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด บนเส้นจำนวนได้ดังต่อไปนี้

(1) ระยะห่างจากจุดกำเนิด O ถึงจุด $P(a)$ คือ $OP = |a|$

(2) ระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด $A(a)$ และ $B(b)$ คือ $AB = |b - a|$

จุดแบ่งภายใน/จุดแบ่งภายนอกของส่วนของเส้นตรงบนเส้นจำนวน

โดยให้ m และ n เป็นจำนวนบวก

เมื่อจุด P อยู่บนส่วนของเส้นตรง AB โดยที่ $AP:PB = m:n$ จะได้ว่าจุด P **แบ่งภายใน** ส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็น $m:n$ และจุด P นั้นเป็น **จุดแบ่งภายใน** เมื่อ $m=n$ แล้วจุด P คือ **จุดกึ่งกลาง** ของส่วนของเส้นตรง AB

นอกจากนี้ ถ้าจุด Q เป็นส่วนขยายของส่วนของเส้นตรง AB โดยที่ $AQ:QB = m:n$ จะได้ว่าจุด Q **แบ่งภายนอก** ส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็น $m:n$ และจุด Q คือ **จุดแบ่งภายนอก** ในกรณีของการแบ่งภายนอก $m \neq n$

Ex บนเส้นจำนวน สำหรับ จุด 2 จุด คือ $A(3)$ และ $B(11)$ ที่ต่อด้วยส่วนของเส้นตรง AB เราสามารถหาพิกัดของจุดต่อไปนี้ได้

(1) จุด P แบ่งภายในส่วนของเส้นตรง AB เป็น 3:1

ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB คือ $AB = |11 - 3| = 8$

จาก $AP:PB = 3:1$ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AP คือ

$$AP = AB \times \frac{3}{3+1} = 8 \times \frac{3}{4} = 6$$

ดังนั้น เนื่องจากจุด P เลื่อนออกไป 6 ในทิศทางบวกจากจุด A บนส่วนของเส้นตรง AB เราจึงได้ $P(9)$

(2) จุด Q แบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง AB เป็น 3:1

จาก $AQ:QB = 3:1$ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AQ คือ

$$AQ = AB \times \frac{3}{3-1} = 8 \times \frac{3}{2} = 12$$

ดังนั้น เนื่องจากจุด Q เลื่อนออกไป 12 ในทิศทางบวกจากจุด A บนส่วนของเส้นตรง AB เราจึงได้ $Q(15)$

(3) จุด R แบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง AB เป็น 1:3

จาก $AR:RB = 1:3$ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AR คือ

$$AR = AB \times \frac{1}{3-1} = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก $AR < RB$ จุด R จึงเลื่อนในทิศทางลบจากจุด A

ดังนั้น เนื่องจากจุด R เลื่อนออกไป 4 ในทิศทางลบจากจุด A บนส่วนของเส้นตรง AB เราจึงได้ $R(-1)$

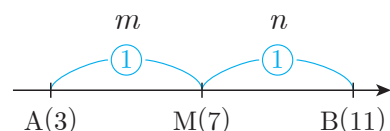
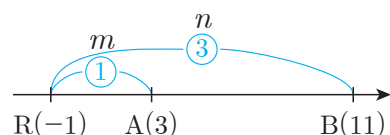
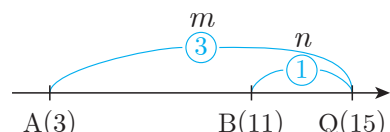
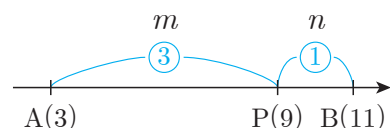
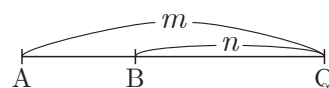
(4) จุดกึ่งกลาง M บนส่วนของเส้นตรง AB

จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB คือจุดที่แบ่งภายในส่วนของเส้นตรง AB เป็น 1:1

จาก $AM:MB = 1:1$ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AM คือ

$$AM = AB \times \frac{1}{1+1} = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

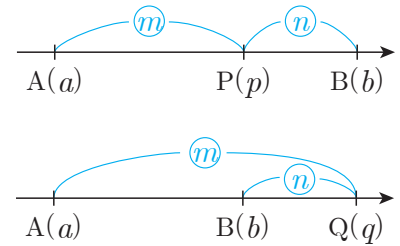
ดังนั้น เนื่องจากจุด M เลื่อนออกไป 4 ในทิศทางบวกจากจุด A บนส่วนของเส้นตรง AB เราจึงได้ $M(7)$



บนเส้นจำนวน เมื่อ จุด 2 จุด คือ $A(a)$ และ $B(b)$ เชื่อมต่อกันด้วยส่วนของเส้นตรง AB แล้ว $m:n$ ถูกแบ่งภายในด้วยจุด P และถูกแบ่งภายนอกด้วยจุด Q ในกรณีนี้ พิกัดของ P และ Q แสดงได้ดังต่อไปนี้

พิกัดของจุดแบ่งภายใน P $\frac{na + mb}{m + n}$

พิกัดของจุดแบ่งภายนอก Q $\frac{-na + mb}{m - n}$
(เมื่อ $m \neq n$)



สูตรการหาจุดแบ่งภายนอกก็คือสูตรการหาจุดแบ่งภายใน แต่ให้แทนที่ n ด้วย $-n$

explanation

พิกัดของจุดแบ่งภายใน P

$$AP:PB = m:n \rightarrow nAP = mPB \rightarrow n(p-a) = m(b-p) \rightarrow np - na = mb - mp \rightarrow mp + np = na + mb$$

$$\rightarrow (m+n)p = na + mb \rightarrow p = \frac{na + mb}{m + n}$$

พิกัดของจุดแบ่งภายนอก Q (เมื่อ $m > n$)

$$AQ:QB = m:n \rightarrow nAQ = mQB \rightarrow n(q-a) = m(q-b) \rightarrow nq - na = mq - mb \rightarrow mq - nq = -na + mb$$

$$\rightarrow (m-n)q = -na + mb \rightarrow q = \frac{-na + mb}{m - n}$$

เราจะได้ผลลัพธ์ที่คล้ายกันเมื่อ $m < n$

EXERCISE

◆ หาพิกัดของจุดต่อไปนี้บนเส้นจำนวน โดยที่ จุด 2 จุด คือ $A(3)$ และ $B(11)$ ต่อกันด้วยส่วนของเส้นตรง AB

(1) จุด P แบ่งภายในส่วนของเส้นตรง AB เป็น 3:1

$$\frac{1 \times 3 + 3 \times 11}{3 + 1} = 9$$

9

(2) จุด Q แบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง AB เป็น 3:1

$$\frac{-1 \times 3 + 3 \times 11}{3 - 1} = 15$$

15

(3) จุด R แบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง AB เป็น 1:3

$$\frac{-3 \times 3 + 1 \times 11}{1 - 3} = -1$$

-1

(4) จุดกึ่งกลาง M บนส่วนของเส้นตรง AB

$$\frac{1 \times 3 + 1 \times 11}{1 + 1} = 7$$

7



Ⓜ 3 Ⓢ . + 1 1 Ⓢ 0 ∨ Ⓢ 0 + Ⓢ .

$$\frac{3y+11x}{x+y}$$

⌘ ⌘ ⌘ ⌘ 3 ⌘ > 1 ⌘ ⌘ ⌘ ⌘

A=0	B=0
C=0	D=0
E=0	F=0
x=3	y=1
z=0	

$$\frac{3y+11x}{x+y}$$













A=0	B=0
C=0	D=0
E=0	F=0
x=3	y=-1
z=0	

$$\frac{3y+11x}{x+y}$$

A=0	B=0
C=0	D=0
E=0	F=0
x=1	y=-3
z=0	

$$\frac{3y+11x}{x+y}$$

⌕ Ⓟ Ⓟ Ⓟ 1 > 1 EXE ⏮ EXE

A=0	B=0
C=0	D=0
E=0	F=0
x=1	y=1
z=0	

$$\frac{3y+11x}{x+y}$$

	A	B	C	D
1	3			
2	3			
3	3			
4	1			

	A	B	C	D
1	3	11		
2	3	1		
3	3	-1		
4	1	-3		

 Calculate
  Statistics
  Distribution
 Spreadsheet
  Table
  Equation

	A	B	C
1	<u>3(A)</u>	<u>11(B)</u>	
2	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>(1)9</u>
3	<u>3</u>	<u>-1</u>	<u>(2)15</u>
4	<u>1</u>	<u>-3</u>	<u>(3)-1</u>

Fill Formula
Fill Value
Edit Cell
Available Memory

Fill Formula
Form =
Range :C2:C2
eConfirm

Fill Formula
Form = (B2*\$A\$1+A
Range :C2:C4
Confirm

	A	B	C	D
1	3	11		
2	3	1	9	
3	3	-1	15	
4	1	-3	-1	

$\equiv (B2 \times \$A\$1) + A2 \times \$B\1

PRACTICE

◆ หาพิกัดของจุดต่อไปนี้บนเส้นจำนวน โดยที่ จุด 2 จุด คือ A(2) และ B(6) ต่อกันด้วยส่วนของเส้นตรง AB

(1) จุด P แบ่งภายในส่วนของเส้นตรง AB เป็น 4:3

$$\frac{3 \times 2 + 4 \times 6}{4 + 3} = \frac{30}{7}$$

$$\frac{30}{7}$$

(2) จุด Q แบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง AB เป็น 5:1

$$\frac{-1 \times 2 + 5 \times 6}{5 - 1} = 7$$

7

(3) จุด R แบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง AB เป็น 3:5

$$\frac{-5 \times 2 + 3 \times 6}{3 - 5} = -4$$

-4

(4) จุดกึ่งกลาง M บนส่วนของเส้นตรง AB

$$\frac{1 \times 2 + 1 \times 6}{1 + 1} = 4$$

4

check

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$

$\odot$ 2 $\uparrow$. $\uparrow$ + $\uparrow$ 6 $\uparrow$ 0 $\downarrow$ $\uparrow$ 0 $\uparrow$ + $\uparrow$.

$$\frac{2y+6x}{x+y}$$

(1)

$\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$ 4 $\downarrow$ > 3 $\downarrow$ $\odot$ $\odot$

A=0 B=0
C=0 D=0
E=0 F=0
x=4 y=3
z=0

$$\frac{2y+6x}{x+y}$$

(2)

$\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$ 5 $\downarrow$ > -1 $\downarrow$ $\odot$ $\odot$

A=0 B=0
C=0 D=0
E=0 F=0
x=5 y=-1
z=0

$$\frac{2y+6x}{x+y}$$

(3)

$\odot$ $\odot$ $\odot$ 3 $\downarrow$ > -5 $\downarrow$ $\odot$ $\odot$

A=0 B=0
C=0 D=0
E=0 F=0
x=3 y=-5
z=0

$$\frac{2y+6x}{x+y}$$

(4)

$\odot$ $\odot$ $\odot$ 1 $\downarrow$ > 1 $\downarrow$ $\odot$ $\odot$

A=0 B=0
C=0 D=0
E=0 F=0
x=1 y=1
z=0

$$\frac{2y+6x}{x+y}$$

OTHER METHODS

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$

ป้อนข้อมูลในตารางด้านล่างตามลำดับจากเซลล์

A1

สูตรการคำนวณนั้นเหมือนกับในแบบฝึกหัด

ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องป้อนสูตร

	A	B	C	D
1	2	6		
2	4	3	4.2857	
3	5	-1	7	
4	3	-5	-4	

= (B4×\$A\$1+A4×\$B\$1

ค่าที่ป้อน () ค่าที่คำนวณได้ ()

	A	B	C
1	2(A)	6(B)	
2	4	3	(1)4.2857
3	5	-1	(2)7
4	3	-5	(3)-4

จุดบนระนาบ (1)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับระยะห่างระหว่างจุด จุดแบ่งภายใน และจุดแบ่งภายนอกบนระนาบพิกัดฉาก

STUDY GUIDE

ระยะห่างระหว่าง จุด 2 จุดบนระนาบพิกัดฉาก

ระยะห่างระหว่าง จุด 2 จุด

เราสามารถหาระยะห่างระหว่าง จุด 2 จุดบนระนาบพิกัดฉากได้โดยการใช้สูตรต่อไปนี้

(1) ระยะห่างระหว่างจุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(2) ระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด O และจุด $A(x_1, y_1)$ $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

explanation

บนระนาบพิกัดฉาก มีจุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$ ซึ่งจะได้ $x_1 \neq x_2$ และ $y_1 \neq y_2$

เพื่อหาจุด $C(x_2, y_1)$ เนื่องจาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส เราสามารถหาอนุพันธ์

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$\text{และ จาก } AC^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2, BC^2 = |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$$

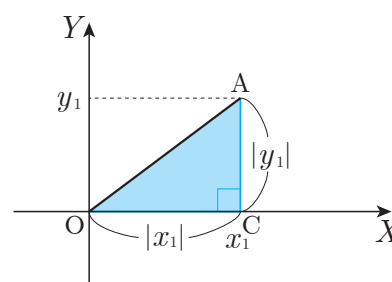
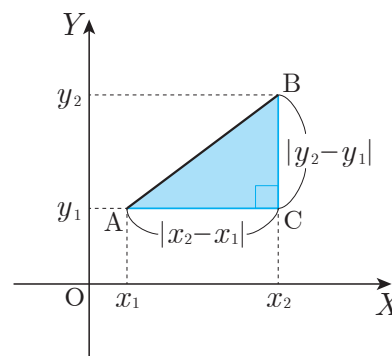
$$\text{เราจะได้ } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{เนื่องจาก } (x_2 - x_1)^2 = \{-(x_1 - x_2)\}^2 = (-1)^2(x_1 - x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2$$

สามารถลบค่าของพิกัด A และ B ตัวใดตัวหนึ่งออกได้

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด O และจุด $A(x_1, y_1)$

สามารถหาอนุพันธ์ได้เป็น $x_2=0, y_2=0$



จุดแบ่งภายใน/ภายนอกของส่วนของเส้นตรงบนระนาบ

เมื่อ จุด 2 จุด คือ $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เชื่อมต่อกันด้วยส่วนของเส้นตรง AB แล้ว $m:n$ ถูกแบ่งภายในด้วยจุด P และ $m:n$ ถูกแบ่งภายนอกด้วยจุด Q เราสามารถหาจุดแบ่งภายในและจุดแบ่งภายนอกได้โดยการใช้สูตรต่อไปนี้

(1) พิกัดของจุดแบ่งภายใน P $P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$

(2) พิกัดของจุดแบ่งภายนอก Q $Q\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$

explanation

เราสามารถวาดเส้นตั้งฉากจากจุด A, B และ P แต่ละจุดไปที่แกน X และกำหนดให้จุดตัดกับแกน X เป็น A', B' และ P'

จากสมบัติของอัตราส่วนของเส้นขนานต่อส่วนของเส้นตรง เราจะได้

$$AP':B'P'=AP:BP=m:n$$

ดังนั้น จุด P' จึงแบ่งภายในส่วนของเส้นตรง A'B' เป็น m:n

พิกัด x ของจุด A', B' และ P' คือ x_1 , x_2 และ x ตามลำดับ

จากสูตรการหาจุดแบ่งภายในของส่วนของเส้นตรงบนเส้นจำนวน เรา

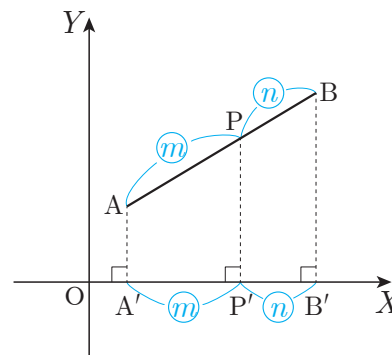
$$\text{จะได้ } x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

โดยการพิจารณาจากพิกัด y ด้วยวิธีการเดียวกัน เราจะได้ $y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$

ดังนั้น พิกัดของจุดแบ่งภายใน P คือ $P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$

เราสามารถหาจุดแบ่งภายนอกได้ด้วยวิธีการเดียวกัน

โดย พิกัดของจุดกึ่งกลาง โดยที่ $m=1$ และ $n=1$ นั้นหาอนุพันธ์ได้เป็น $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$



EXERCISE

◆ กำหนดให้จุด 2 จุด คือ A(1, 5) และ B(4, 9) อยู่บนระนาบพิกัดฉาก จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด O และจุด A

$$OA = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

(2) หาระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{26}$$

5

(3) หาพิกัดของจุด P ที่แบ่งภายในส่วนของเส้นตรง AB เป็น 3:2

$$\left(\frac{2 \times 1 + 3 \times 4}{3 + 2}, \frac{2 \times 5 + 3 \times 9}{3 + 2}\right) = \left(\frac{14}{5}, \frac{37}{5}\right)$$

$$\left(\frac{14}{5}, \frac{37}{5}\right)$$

(4) หาพิกัดของจุด Q ที่แบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง AB เป็น 5:3

$$\left(\frac{-3 \times 1 + 5 \times 4}{5 - 3}, \frac{-3 \times 5 + 5 \times 9}{5 - 3}\right) = \left(\frac{17}{2}, 15\right)$$

$$\left(\frac{17}{2}, 15\right)$$

(5) หาพิกัดของจุดกึ่งกลาง M บนส่วนของเส้นตรง AB

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{5+9}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 7\right)$$

$$\left(\frac{5}{2}, 7\right)$$



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ปุ่มกำหนดค่าตัวแปรเพื่อคำนวณพิกัด x และพิกัด y ของจุดต่าง ๆ

(3) กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

ป้อนพิกัดของจุดที่แบ่งภายในส่วนของเส้นตรงเป็น 3:2

$\odot$ $\odot$ $\uparrow$ $\odot$ $+$ $\odot$ $\uparrow$ $\odot$ $\vee$ $\odot$ $+$ $\odot$ EXE

$$\frac{2A+3B}{3+2}$$

พิกัด x $\odot$ $\odot$ $\odot$ $>$ $\odot$ EXE

พิกัด y $\odot$ $\odot$ $\odot$ $>$ $\odot$ EXE

$$\frac{2A+3B}{3+2} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{2A+3B}{3+2} = \frac{37}{5}$$

(4) ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อนสูตรสำหรับการแบ่งภายนอกเป็น 5:3 และแทนค่าพิกัดของแต่ละจุด

OTHER METHODS

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

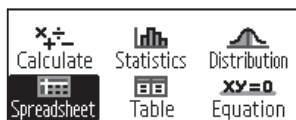
ป้อนข้อมูลในตารางด้านขวาตามลำดับจากเซลล์ A1

หลังจากป้อน [A1:1, A2:5, A3:3, A4:5 และ A5:1] ตามลำดับแล้ว ให้กด EXE

เลื่อนไปที่ [B1]

หลังจากป้อน [B1:4, B2:9, B3:2, B4:-3 และ B5:1] ตามลำดับแล้ว ให้กด EXE

เลื่อนไปที่ [C1]



	A	B	C	D
1	1	4		
2	5	9		
3	3	2		
4	5	-3		

ค่าที่ป้อน ()		ค่าที่คำนวณได้ ()		
	A	B	C	D
1	<u>1(A_x)</u>	<u>4(B_x)</u>	<u>(1)OA</u>	
2	<u>5(A_y)</u>	<u>9(B_y)</u>	<u>(2)AB</u>	
3	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>(3)x</u>	<u>(3)y</u>
4	<u>5</u>	<u>-3</u>	<u>(4)x</u>	<u>(4)y</u>
5	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>(5)x</u>	<u>(5)y</u>

(1) กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด OK หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) $=\sqrt{((A1)^2 + (A2)^2)}$] แล้วให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C1:C1] แล้ว

ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด OK

เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [C2]

Fill Formula
Form $=\sqrt{((A1)^2 + (A2)^2)}$
Range :C1:C1
 $\odot$ Confirm

	A	B	C	D
1	1	4	5.099	
2	5	9		
3	3	2		
4	5	-3		

(2) กด $\odot$ เลือก [Fill formula (ป้อนสูตร)] กด OK หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) $=\sqrt{((B1 - A1)^2 + (B2 - A2)^2)}$] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C2:C2] แล้ว

ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด OK

เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [C3]

Fill Formula
Form $=\sqrt{((B1 - A1)^2 + (B2 - A2)^2)}$
Range :C2:C2
 $\odot$ Confirm

	A	B	C	D
1	1	4	5.099	
2	5	9	5	
3	3	2		
4	5	-3		

(3) - (5)

พิกัด x กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด OK หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) $=\frac{(B3 \times \$A\$1 + A3 \times \$B\$1)}{(A3 + B3)}$] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C3:C5] แล้ว

ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด OK

เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [D3]

Fill Formula
Form $=\frac{(B3 \times \$A\$1 + A3 \times \$B\$1)}{(A3 + B3)}$
Range :C3:C5
 $\odot$ Confirm

	A	B	C	D
2	5	9	5	
3	3	2	2.8	
4	5	-3	8.5	
5	1	1	2.5	

พิกัด y กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด OK หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) $=\frac{(B3 \times \$A\$2 + A3 \times \$B\$2)}{(A3 + B3)}$] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):D3:D5] แล้ว

ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด OK

เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [A1] เพื่อใช้ในแบบฝึกหัด

Fill Formula
Form $=\frac{(B3 \times \$A\$2 + A3 \times \$B\$2)}{(A3 + B3)}$
Range :D3:D5
 $\odot$ Confirm

	A	B	C	D
2	5	9	5	
3	3	2	2.8	7.4
4	5	-3	8.5	15
5	1	1	2.5	7

PRACTICE

กำหนดให้จุด 2 จุด คือ A(2, 7) และ B(6, 13) อยู่บนระนาบพิกัดฉาก จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด O และจุด A

$$OA = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

$$\sqrt{53}$$

(2) หาระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B

$$AB = \sqrt{(6-2)^2 + (13-7)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$2\sqrt{13}$$

(3) หาพิกัดของจุด P ที่แบ่งภายในส่วนของเส้นตรง AB เป็น 4:1

$$\left(\frac{1 \times 2 + 4 \times 6}{4+1}, \frac{1 \times 7 + 4 \times 13}{4+1} \right) = \left(\frac{26}{5}, \frac{59}{5} \right)$$

(4) หาพิกัดของจุด Q ที่แบ่งภายนอกส่วนของเส้นตรง AB เป็น 3:5

$$\left(\frac{-5 \times 2 + 3 \times 6}{3-5}, \frac{-5 \times 7 + 3 \times 13}{3-5} \right) = (-4, -2)$$

check

(3) กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

$\left(\frac{1 \times 2 + 4 \times 6}{4+1}, \frac{1 \times 7 + 4 \times 13}{4+1} \right)$

$$\frac{A+4B}{4+1}$$

พิกัด x

$\left(\frac{1 \times 2 + 4 \times 6}{4+1}, \frac{1 \times 7 + 4 \times 13}{4+1} \right)$

$$\frac{A+4B}{4+1} = \frac{26}{5}$$

พิกัด y

$\left(\frac{1 \times 2 + 4 \times 6}{4+1}, \frac{1 \times 7 + 4 \times 13}{4+1} \right)$

$$\frac{A+4B}{4+1} = \frac{59}{5}$$

(4) ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อนสูตรสำหรับการแบ่งภายนอกเป็น 3:5 และแทนค่าพิกัดของแต่ละจุด

OTHER METHODS

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด OK

ป้อนข้อมูลในตารางด้านล่างตามลำดับจาก เซลล์ A1

สูตรการคำนวณนั้นเหมือนกับในแบบฝึกหัด ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องป้อนสูตร

โปรดทราบว่าพิกัดจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB นั้นคำนวณที่เซลล์ C5 และ D5

	A	B	C	D
1	2	6	7.2801	
2	7	13	7.2111	
3	4	1	5.2	11.8
4	3	-5	-4	-2

$$= \sqrt{(A1)^2 + (A2)^2}$$

	A	B	C	D
2	7	13	7.2111	
3	4	1	5.2	11.8
4	3	-5	-4	-2
5	1	1	4	10

$$= (B5 \times A\$2 + A5 \times B\$2)$$

ค่าที่ป้อน () ค่าที่คำนวณได้ ()

	A	B	C	D
1	<u>2(A_x)</u>	<u>6(B_x)</u>	<u>(1)OA</u>	
2	<u>7(A_y)</u>	<u>13(B_y)</u>	<u>(2)AB</u>	
3	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>(3)x</u>	<u>(3)y</u>
4	<u>3</u>	<u>-5</u>	<u>(4)x</u>	<u>(4)y</u>

จุดบัพนระนาบ (2)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจสมบัติของรูปทรงบัพนระนาบพิกัดฉาก

STUDY GUIDE

รูปทรงบัพนระนาบพิกัดฉาก

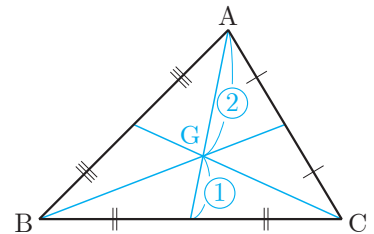
จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยม

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมกับจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามเรียกว่า **เส้นมัธยฐาน** ของรูปสามเหลี่ยม เส้นมัธยฐาน 3 เส้นของรูปสามเหลี่ยมมาบรรจบกันที่จุด 1 จุด ซึ่งเรียกว่า **จุดเซนทรอยด์** ของรูปสามเหลี่ยม

จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมคือจุดที่เส้นแต่ละเส้นแบ่งภายในเป็น 2:1

สำหรับ $\triangle ABC$ ที่มีจุดยอดอยู่ 3 จุด คือ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ และ $C(x_3, y_3)$

เราสามารถหาพิกัดของจุดเซนทรอยด์ G ได้ดังต่อไปนี้



$$\text{พิกัดของจุดเซนทรอยด์ } G \quad G \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

explanation

พิกัดของจุดกึ่งกลาง M บนด้าน BC คือ $M \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$

จุดเซนทรอยด์ G แบ่งภายในส่วนของเส้นตรง AM เป็น 2:1

ดังนั้น พิกัดของจุดเซนทรอยด์ G คือ

$$G \left(\frac{1 \cdot x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{2 + 1}, \frac{1 \cdot y_1 + 2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}}{2 + 1} \right) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

จุดที่สมมาตรกับจุดต่าง ๆ (จุดสมมาตร)

เมื่อ 2 จุด $P(p_1, p_2)$ และ $Q(q_1, q_2)$ สมมาตรกับจุด $A(a, b)$ บนระนาบพิกัดฉาก พิกัดจุดกึ่งกลาง A ของส่วนของเส้นตรง PQ นั้นสามารถหาได้ดังต่อไปนี้

$$a = \frac{p_1 + q_1}{2}, b = \frac{p_2 + q_2}{2}$$

EXERCISE

- กำหนดให้จุด 3 จุด คือ A(4, 8), B(2, 1) และ C(9, 3) อยู่บนระนาบพิกัดฉาก โดยที่ G คือจุดเซนทรอยด์ของ $\triangle ABC$ และจุด D สมมาตรกับจุด B รอบจุด A จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาพิกัดของจุด G

$$\left(\frac{4+2+9}{3}, \frac{8+1+3}{3} \right) = (5, 4)$$

(5, 4)

(2) หาพิกัดของจุด D

โดยให้พิกัดของจุด D เป็น (x, y) แล้วให้จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง BD เป็น A

$$\text{ดังนั้นจาก } 4 = \frac{2+x}{2}, 8 = \frac{1+y}{2} \text{ เราจะได้ } x=6 \text{ และ } y=15$$

นั่นคือ D(6, 15)

(6, 15)

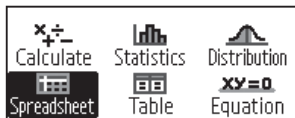


check

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$ ป้อนข้อมูลในตารางด้านขวาตามลำดับจากเซลล์ A1

หลังจากป้อน [A1:4, A2:2 และ A3:9] ตามลำดับแล้ว ให้กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [B1]

หลังจากป้อน [B1:8, B2:1 และ B3:3] ตามลำดับแล้ว ให้กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [A4]



	A	B	C	D
1	4	8		
2	2	1		
3	9	3		
4				

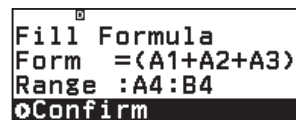
	ค่าที่ป้อน ()	ค่าที่คำนวณได้ ()
	A	B
1	$4(A_x)$	$8(A_y)$
2	$2(B_x)$	$1(B_y)$
3	$9(C_x)$	$3(C_y)$
4	$(1)x$	$(1)y$
5	$(2)x$	$(2)y$

(1) กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$ หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) = $\frac{(A1 + A2 + A3)}{3}$] แล้วให้กด $\odot$

หลังจากป้อน [Range (ช่วง): A4:B4] แล้ว

ให้กด $\odot$ เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [A5]



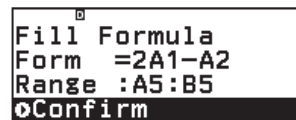
	A	B	C	D
2	2	1		
3	9	3		
4	5	4		
5				

(2) กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$ หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) = $2A1 - A2$] ให้กด $\odot$

หลังจากป้อน [Range (ช่วง): A5:B5] แล้ว

ให้กด $\odot$ เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [A1] เพื่อใช้ในรูปแบบฝึกหัด



	A	B	C	D
2	2	1		
3	9	3		
4	5	4		
5	6	15		

PRACTICE

- กำหนดให้ จุด 3 จุด คือ $A(-3, 2)$, $B(5, -1)$ และ $C(2, 9)$ อยู่บนระนาบพิกัดฉาก โดยที่ G คือจุดเซนทรอยด์ของ $\triangle ABC$ และจุด D สมมาตรกับจุด C รอบจุด B จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาพิกัดของจุด G

$$\left(\frac{-3+5+2}{3}, \frac{2-1+9}{3} \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3} \right)$$

(2) หาพิกัดของจุด D

ให้พิกัดของจุด D เป็น (x, y) แล้วให้จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง CD เป็น B

ดังนั้นจาก $5 = \frac{2+x}{2}$, $-1 = \frac{9+y}{2}$ เราจะได้ $x=8$ และ $y=-11$

นั่นคือ $D(8, -11)$

$(8, -11)$

check

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$

ป้อนข้อมูลในตารางด้านขวาตามลำดับจากเซลล์ $A1$

(1) สูตรการคำนวณนั้นเหมือนกับในแบบฝึกหัด

ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องป้อนสูตร

(2) ป้อน [Form (รูปแบบ)]= $2A2-B3$], [Range (ช่วง): $A5:B5$]

ลงในเซลล์ $A5$ ใหม่อีกครั้ง

	A	B	C	D
1	-3	2		
2	5	-1		
3	2	9		
4	1.3333	3.3333		

= $(B1+B2+B3)/3$

	A	B	C	D
2	5	-1		
3	2	9		
4	1.3333	3.3333		
5	8	-11		

= $2B2-B3$

ค่าที่ป้อน ()		
ค่าที่คำนวณได้ ()		
	A	B
1	$-3(A_x)$	$2(A_y)$
2	$5(B_x)$	$-1(B_y)$
3	$2(C_x)$	$9(C_y)$
4	$(1)x$	$(1)y$
5	$(2)x$	$(2)y$

สมการเส้นตรง

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจสมการเส้นตรงบนระนาบพิกัดฉาก

STUDY GUIDE

สมการเส้นตรง

รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง

เส้นบนระนาบพิกัดฉากแสดงในรูปสมการเชิงเส้น $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$) ของ x และ y

หาก $b \neq 0$ แสดงว่าเส้นมีความชัน $-\frac{a}{b}$ และจุดตัด $-\frac{c}{b}$

หาก $b = 0$ แสดงว่าเส้นตั้งฉากกับแกน X

การหาคำตอบของสมการเส้นตรง

เส้นบนระนาบพิกัดฉากสามารถระบุได้ด้วยความชันและจุดที่เส้นเลื่อนผ่าน ซึ่งสามารถหาได้ดังต่อไปนี้

EXTRA Info.

กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น

$y = mx + n$ ($m \neq 0$) คือเส้นที่มีความชัน m และจุดตัด n

(1) เส้นที่ผ่านจุด $A(x_1, y_1)$ ที่มีความชัน m $y - y_1 = m(x - x_1)$
เมื่อ $x = x_1$ เส้นตั้งฉากกับแกน X

(2) เส้นที่ผ่านจุด 2 จุดที่ต่างกัน $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ คือ
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

เมื่อ $x_1 = x_2$ เส้นตั้งฉากกับแกน X เป็น $x = x_1$

explanation

(1) สำหรับเส้นที่มีความชัน m สมการคือ $y = mx + n$

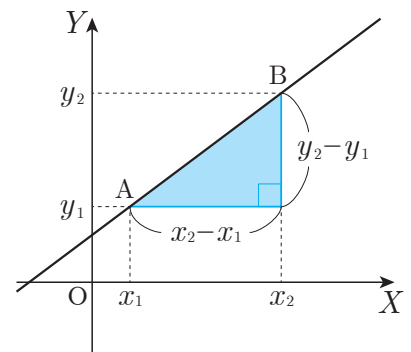
ซึ่งผ่านจุด $A(x_1, y_1)$ ดังนั้น $y_1 = mx_1 + n$, $n = y_1 - mx_1$

ดังนั้น จาก $y = mx + y_1 - mx_1$ เราจะได้ $y - y_1 = m(x - x_1)$

(2) ความชัน m ของเส้นที่ผ่านจุด 2 จุดที่ต่างกัน $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$

$$\text{คือ } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ดังนั้น เราจึงสามารถใช้ (1) สำหรับ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ได้



EXERCISE

① หาสมการสำหรับเส้นต่อไปนี้ โดยกำหนดให้เส้นผ่านจุด A(2, 5)

(1) เส้นที่มีความชัน 3

$$y-5=3(x-2), y=3x-1$$

(2) เส้นที่ตั้งฉากกับแกน x

ซึ่งผ่านจุด A(2, 5) ดังนั้น $x=2$

$$y=3x-1$$

$$x=2$$

② หาสมการสำหรับเส้นที่ผ่านจุด 2 จุดต่อไปนี้ A และ B

(1) A(2, 1), B(6, 9)

$$y-1=\frac{9-1}{6-2}(x-2), y=2x-3$$

$$y=2x-3$$

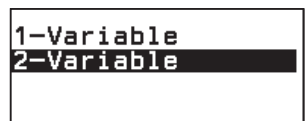
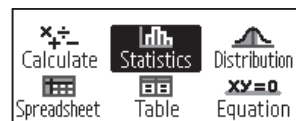


check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันสถิติเพื่อแสดงเส้นที่ผ่านจุด 2 จุด

กด $\odot$ เลือก [Statistics (สถิติ)] กด $\odot$

เลือก [2-Variable (ตัวแปร)] กด $\odot$

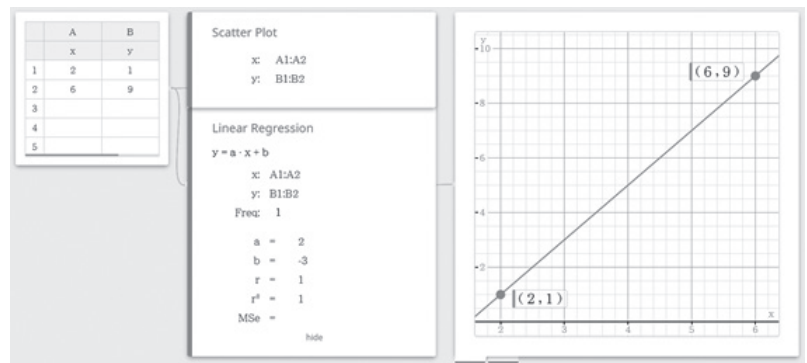


ป้อนพิกัด x ของจุด 2 จุด A และ B ในคอลัมน์ x ของตาราง และป้อนพิกัด y ของจุด 2 จุด A และ B ในคอลัมน์ y ตามลำดับ

② $\odot$ 6 $\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$ 1 $\odot$ 9 $\odot$

	x	y
1	2	1
2	6	9
3		
4		

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



$r=1$ ของ [Linear Regression (การถดถอยเชิงเส้น)] แสดงว่านิพจน์ทางคณิตศาสตร์ถูกต้อง

(2) A(4, -5), B(4, 7)

$$x_1=x_2=4 \text{ ดังนั้น } x=4$$

$$x=4$$

PRACTICE

① หาสสมการสำหรับเส้นต่อไปนี้ โดยกำหนดให้เส้นผ่านจุด A(-3, -2)

(1) เส้นที่มีความชัน -4

$$y - (-2) = -4\{x - (-3)\}$$

$$y = -4x - 14$$

$$y = -4x - 14$$

(2) เส้นที่ตั้งฉากกับแกน x

ซึ่งผ่านจุด A(-3, -2) ดังนั้น $x = -3$

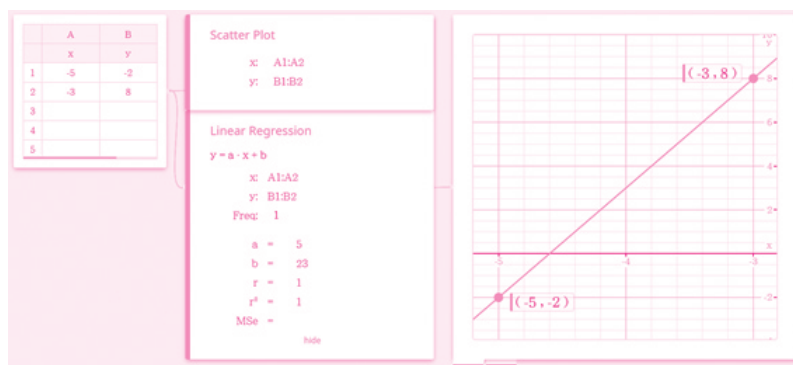
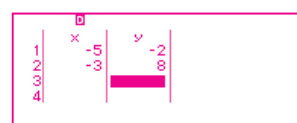
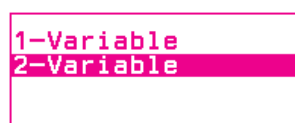
$$x = -3$$

② หาสสมการสำหรับเส้นที่ผ่านจุด 2 จุดต่อไปนี้ A และ B

(1) A(-5, -2), B(-3, 8)

$$y - (-2) = \frac{8 - (-2)}{-3 - (-5)}\{x - (-5)\}, y = 5x + 23$$

$$y = 5x + 23$$



(2) A(-2, 1), B(-2, -6)

$$x_1 = x_2 = -2 \text{ ดังนั้น } x = -2$$

$$x = -2$$

นอกจากนี้ วิธีเปลี่ยนตำแหน่งนิพจน์ตัวอักษรทั้งหมดของเส้นไปทางด้านซ้ายและแสดงในรูป $ax + by + c = 0$ เช่น

$$y = -3x + 7 \leftrightarrow 3x + y - 7 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x - 5 \leftrightarrow x - 2y - 10 = 0$$

ความสัมพันธ์ของเส้นตรง 2 เส้น (1)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจความสัมพันธ์แบบขนานและตั้งฉากกันของเส้นตรง 2 เส้น

STUDY GUIDE

ความสัมพันธ์แบบขนานและตั้งฉากของเส้นตรง 2 เส้น

เงื่อนไขที่เส้นตรง 2 เส้น $y=m_1x+n_1$ และ $y=m_2x+n_2$ ขนานหรือตั้งฉากกันมีดังต่อไปนี้

(i) เส้นตรง 2 เส้นขนานกัน $\Leftrightarrow m_1=m_2$

(ii) เส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกัน $\Leftrightarrow m_1m_2=-1$

Ex เส้นตรง 2 เส้น $y=2x-5$ และ $y=2x+8$ ทั้งสองเส้นมีความชัน เป็น 2 ดังนั้นจึงขนานกัน

เส้นตรง 2 เส้น $y=3x+2$ และ $y=-\frac{1}{3}x+7$ ตั้งฉากกันเนื่องจากผลคูณของความชันคือ $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

นอกจากนี้ เมื่อ $n_1=n_2$ ในข้อ (i) เส้น 2 เส้นเหมือนกัน ดังนั้นจึงถือว่าขนานกัน

EXERCISE

① หาสมการสำหรับเส้นตรงต่อไปนี้ โดยกำหนดให้เส้นผ่านจุด A (1, 2)

(1) เส้นตรงขนานกับเส้นตรง $y=4x-3$

ความชันของเส้นตรงที่ขนานกันเท่ากับความชันของเส้นตรง $y=4x-3$ ดังนั้นความชันจึงเป็น 4

เส้นตรงผ่านจุด A(1, 2) ดังนั้นเราสามารถหาสมการเส้นตรง $y-2=4(x-1)$, $y=4x-2$

$$\underline{y=4x-2}$$

(2) เส้นตรงตั้งฉากกับเส้นตรง $y=4x-3$

ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากคือ m ดังนั้น $4m = -1$, $m = -\frac{1}{4}$

เส้นตรงผ่านจุด A(1, 2) ดังนั้นเราสามารถหาสมการเส้นตรง

$$y-2 = -\frac{1}{4}(x-1); y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$\underline{y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}}$$



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันตารางเพื่อตรวจสอบความสัมพันธ์ของตำแหน่งบนเส้นตรง

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x)=4x-2$ แล้ว ให้กด EXE

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-1, End (สิ้นสุด):2, Step (ขั้น):1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ คุณยังสามารถใช้ขั้นตอนในข้อ (i) ถึง (iii) ต่อไปนี้เพื่อเปลี่ยนการตั้งค่ากราฟที่แสดงได้

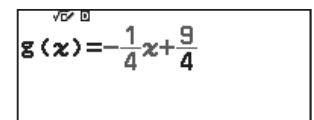
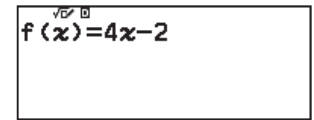
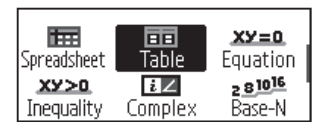
(i) ตั้งค่าแผนงานฟังก์ชัน แล้วตั้งค่าเครื่องหมายฟังก์ชัน

[Add Graph Function (เพิ่มฟังก์ชันกราฟ)]

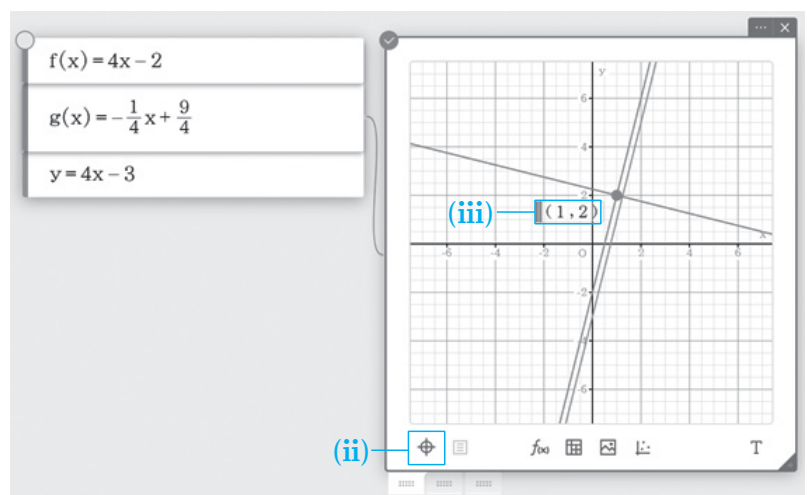
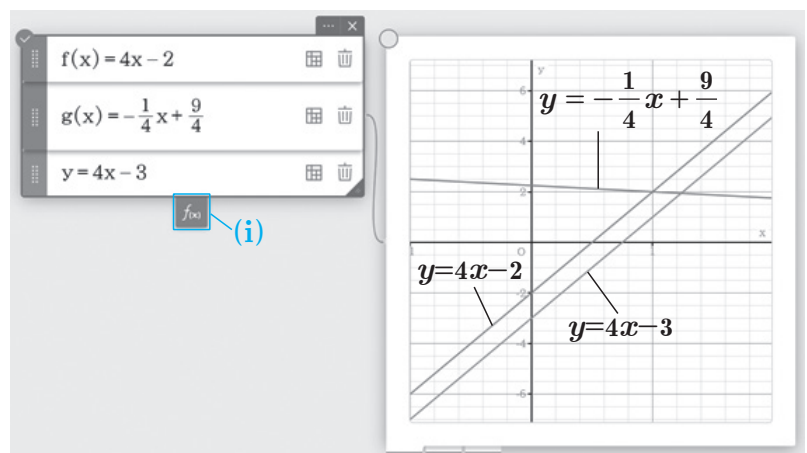
ในแผนงานฟังก์ชันที่เพิ่ม ให้ป้อน $y=4x-3$

(ii) ตั้งค่าแผนงานกราฟ ตั้งค่าเครื่องหมายซูม [Zoom (ขยาย)] ตั้งค่า [Default Zoom (การซูมเริ่มต้น)]

(iii) ตั้งค่าเส้นบนแผนงานกราฟ แล้วตั้งค่าจุดตัดของเส้น 2 เส้นเพื่อแสดงพิกัดของจุดตัด



x	$f(x)$	$g(x)$
-1	-6	2.5
0	-2	2.25
1	2	2
2	6	1.75



ในคู่มือฉบับนี้ เราจะดำเนินการกับกราฟต่อไปใน ClassPad.net เพื่อแสดงภาพและศึกษากราฟ

PRACTICE

① หาสมการเส้นตรงต่อไปนี้ โดยกำหนดให้เส้นตรงผ่านจุด A (3, 6)

(1) เส้นตรง $y = -\frac{1}{3}x + 1$ และเส้นขนาน

ความชันของเส้นขนานเท่ากับความชันของเส้นตรง $y = -\frac{1}{3}x + 1$ ดังนั้นจึงเป็น $-\frac{1}{3}$

เส้นตรงผ่านจุด A(3, 6) ดังนั้นเราสามารถหาสมการ $y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 3), y = -\frac{1}{3}x + 7$

$$y = -\frac{1}{3}x + 7$$

(2) เส้นตรง $y = -\frac{1}{3}x + 1$ และเส้นตั้งฉาก

ความชันของเส้นที่ตั้งฉากคือ m ดังนั้น $-\frac{1}{3}m = -1, m = 3$

เส้นผ่านจุด A(3, 6) ดังนั้นเราสามารถหาสมการ $y - 6 = 3(x - 3), y = 3x - 3$

$$y = 3x - 3$$

check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = -\frac{1}{3}x + 7$ แล้ว ให้กด EXE

ป้อน $g(x) = 3x - 3$ ด้วยวิธีการเดียวกัน

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

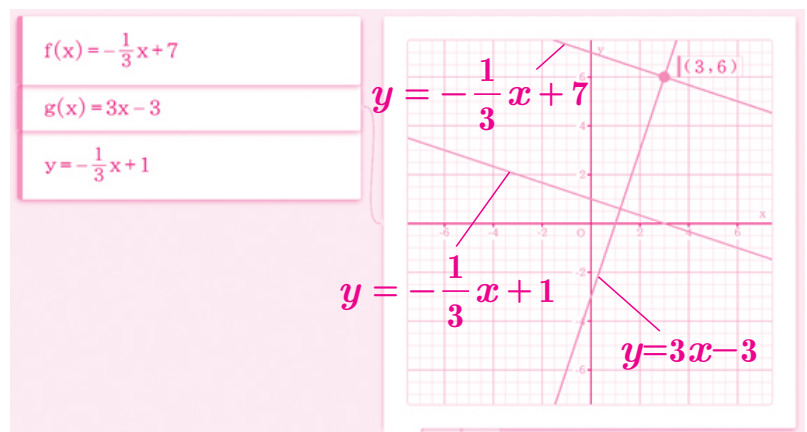
หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -1, End (สิ้นสุด): 6, Step (ขั้น): 1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ ให้แตะแผ่นงานฟังก์ชัน และป้อน $y = -\frac{1}{3}x + 1$

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้แตะแผ่นงานกราฟ หลังจากตั้งค่าการซูมแล้ว แสดงพิกัดจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้น



ความสัมพันธ์แบบขนานและตั้งฉากของเส้นตรง 2 เส้น (ทั่วไป)

เมื่อ $a_1b_1a_2b_2 \neq 0$ เงื่อนไขที่เส้นตรง 2 เส้น $a_1x+b_1y+c_1=0$ และ $a_2x+b_2y+c_2=0$ ขนานหรือตั้งฉากกันมีดังต่อไปนี้

$$(I) \text{ เส้นตรง 2 เส้นขนานกัน } \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad (a_1:b_1 = a_2:b_2)$$

$$(II) \text{ เส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกัน } \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

explanation

โดยการแก้โจทย์ $a_1x+b_1y+c_1=0$ สำหรับ y เราจะได้ $y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$

โดยการแก้โจทย์ $a_2x+b_2y+c_2=0$ สำหรับ y เราจะได้ $y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$

หากเส้นตรง 2 เส้นขนานกัน ความชันของทั้งสองเส้นจะเท่ากัน ดังนั้นจาก $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ เราจะได้ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

หากเส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกัน ผลคูณความชันของทั้งสองเส้นคือ -1 ดังนั้นจาก $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$ เราจะได้ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

EXERCISE

2] หาสมการเส้นตรงต่อไปนี้ โดยกำหนดให้เส้นผ่านจุด A (1, 2)

(1) เส้นตรง $4x-y-3=0$ และเส้นขนาน

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของเส้นขนานนั้นได้สัดส่วนกันโดยตรง เราจึงพบว่าสมการของเส้นตรงคือ $4x-y+c=0$

ซึ่งผ่านจุด A(1, 2) ดังนั้น $4 \cdot 1 - 2 + c = 0$, $c = -2$

นั่นคือ $4x-y-2=0$

$$\underline{4x - y - 2 = 0}$$

(2) เส้นตั้งฉากกับเส้นตรง $y=4x-3$

เมื่อพิจารณาสัมประสิทธิ์ของ x และ y ของเส้นตั้งฉาก เราพบว่าสมการของเส้นตรงคือ $x+4y+c=0$

ซึ่งผ่านจุด A(1, 2) ดังนั้น $1 + 4 \cdot 2 + c = 0$, $c = -9$

นั่นคือ $x+4y-9=0$

$$\underline{x + 4y - 9 = 0}$$

PRACTICE

② หาสมการเส้นตรงต่อไปนี้อย่างกำหนดให้เส้นตรงผ่านจุด A (3, 5)

(1) เส้นตรง $3x+2y+1=0$ และเส้นขนาน

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของเส้นขนานนั้นได้สัดส่วนกันโดยตรง เราจึงพบว่าสมการของเส้นตรงคือ $3x+2y+c=0$

ซึ่งผ่านจุด A(3, 5) ดังนั้น $3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + c = 0$, $c = -19$

นั่นคือ $3x+2y-19=0$

$$3x+2y-19=0$$

(2) เส้นตรง $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ และเส้นตั้งฉาก

เมื่อพิจารณาสัมประสิทธิ์ของ x และ y ของเส้นตั้งฉาก เราพบว่าสมการของเส้นตรงคือ $2x-3y+c=0$

ซึ่งผ่านจุด A(3, 5) ดังนั้น $2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + c = 0$, $c = 9$

นั่นคือ $2x-3y+9=0$

$$2x-3y+9=0$$

check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$ แล้ว ให้กด EXE

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = \frac{2}{3}x + 3$

กด $\odot\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -5, End (สิ้นสุด): 7, Step (ขั้น): 1]

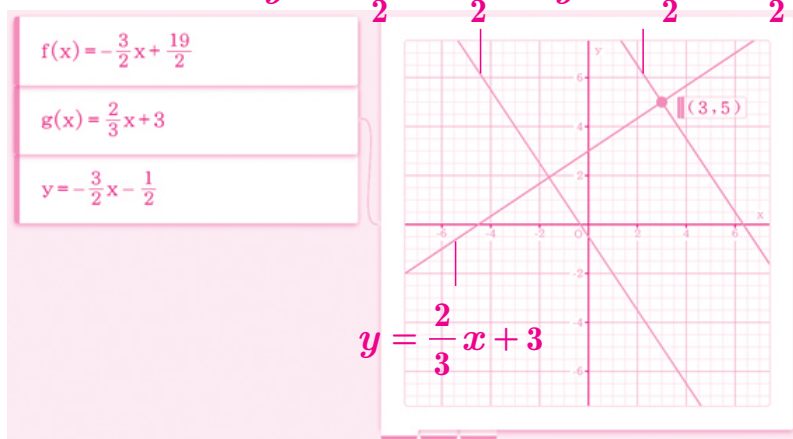
แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ ให้แตะแผ่นงานฟังก์ชัน และป้อน $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้แตะแผ่นงานกราฟ หลังจากตั้งค่าการซูมแล้ว แสดงพิกัดจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้น

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$$



ความสัมพันธ์ของเส้นตรง 2 เส้น (2)

TARGET

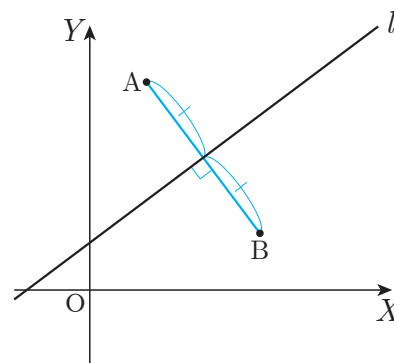
เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับจุดสมมาตรรอบเส้นตรง

STUDY GUIDE

จุดสมมาตรรอบเส้นตรง

จุด 2 จุด คือ A และ B จะสมมาตรกันรอบเส้น l เมื่อข้อ (i) และ (ii) ดังต่อไปนี้

- (i) เส้น AB ตั้งฉากกับเส้น l
- (ii) จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB อยู่บนเส้น l



EXERCISE

- ◆ กำหนดให้เส้นตรง l คือ $y=3x$ จงหาพิกัดของจุด B ที่สมมาตรกับจุด $A(-1, 2)$ โดยอ้างอิงจากเส้น l โดยให้ (p, q) เป็นพิกัดของจุด B

ความชันของเส้นตรง l คือ 3 ดังนั้นความชันของเส้นตรง AB คือ $\frac{q-2}{p-(-1)} = \frac{q-2}{p+1}$

$$AB \perp l \text{ ดังนั้น } 3 \cdot \frac{q-2}{p+1} = -1, p+3q=5 \quad \dots(i)$$

พิกัดจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB คือ $\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q+2}{2}\right)$

เนื่องจากพิกัดดังกล่าวอยู่บนเส้นตรง l เราจึงสามารถแทนที่ใน $y=3x$ สำหรับ $\frac{q+2}{2} = 3 \cdot \frac{p-1}{2}, 3p-q=5 \quad \dots(ii)$

โดยการแก้สมการ (i) และ (ii) เราจะได้ $p=2$ และ $q=1$ ดังนั้นพิกัดของจุด B คือ $(2, 1)$

(2, 1)



check

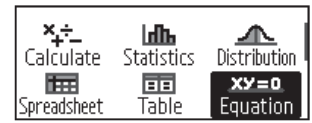
บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันสมการเพื่อแก้ระบบสมการ และตรวจสอบ

ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งบนกราฟ

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$

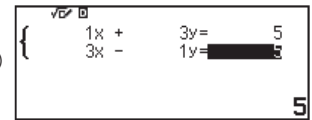
เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)] กด $\odot$

เลือก [2 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว)] กด $\odot$



ป้อน
$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

① EXE ③ EXE ⑤ EXE ③ EXE - ① EXE ⑤ EXE



แสดงคำตอบของระบบสมการและตรวจสอบค่า

ตอบดังกล่าว

EXE EXE



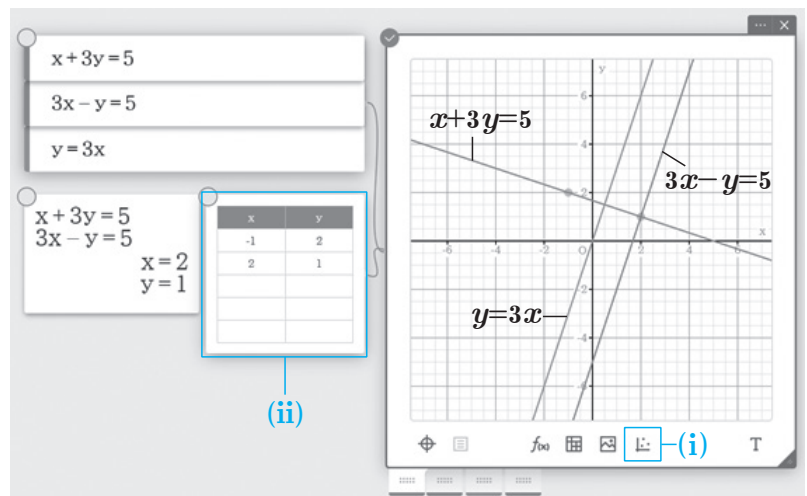
กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ คุณยังสามารถใช้ขั้นตอนในข้อ (i) และ (ii) ต่อไปนี้เพื่อเปลี่ยนการตั้งค่ากราฟที่แสดงได้

(i) ตั้งค่าแผนงานกราฟ แล้วแตะที่เครื่องหมายพิกัด (กำหนดจุด)

(ii) บนแผนงานพิกัดที่เพิ่ม ให้ป้อน $(-1, 2)$ และ $(2, 1)$

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ตั้งค่าแผนงานฟังก์ชัน และหลังจากป้อน $y=3x$ แล้ว ให้ตั้งค่าการซูม



PRACTICE

กำหนดให้เส้นตรง l คือ $y=2x-5$ จงหาพิกัดของจุด B ที่สมมาตรกับจุด A(4, -3) โดยอ้างอิงจากเส้น l

ให้ (p, q) เป็นพิกัดของจุด B

ความชันของเส้นตรง l คือ 2 ดังนั้นความชันของเส้นตรง AB คือ $\frac{q - (-3)}{p - 4} = \frac{q + 3}{p - 4}$

$$AB \perp l \text{ ดังนั้น } 2 \cdot \frac{q + 3}{p - 4} = -1, p + 2q = -2 \cdots (i)$$

พิกัดจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB คือ $\left(\frac{p + 4}{2}, \frac{q - 3}{2}\right)$

เนื่องจากพิกัดดังกล่าวอยู่บนเส้นตรง l เราจึงสามารถแทนที่ใน $y=2x-5$

$$\text{สำหรับ } \frac{q - 3}{2} = 2 \cdot \frac{p + 4}{2} - 5, 2p - q = -1 \cdots (ii)$$

โดยการแก้สมการ (i) และ (ii) เราจะได้ $p = -\frac{4}{5}, q = -\frac{3}{5}$

ดังนั้นพิกัดของจุด B คือ $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

$$\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$ เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)]

กด $\odot$ เลือก [2 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว)] กด $\odot$

① EXE ② EXE $-$ ② EXE ② EXE $-$ ① EXE $-$ ① EXE

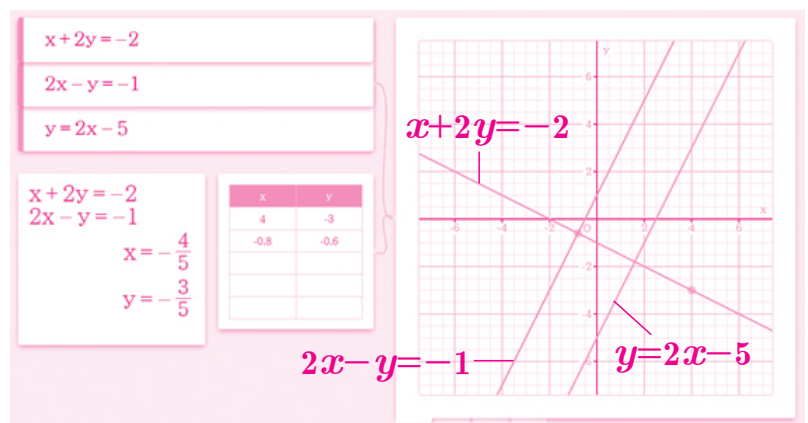
$$\begin{cases} 1x + 2y = -2 \\ 2x - 1y = -1 \end{cases}$$

$x = -\frac{4}{5}$

$y = -\frac{3}{5}$

กด $\uparrow$ $\otimes$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ ให้แต่ละแผ่นงานกราฟและป้อน (4, -3) และ (-0.8, -0.6) ในแผ่นงานพิกัดด้วยวิธีการเดียวกัน ให้แต่ละแผ่นงานฟังก์ชัน และหลังจากป้อน $y=2x-5$ แล้ว ให้ตั้งค่าการซูม



ความสัมพันธ์ของเส้นตรง 2 เส้น (3)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจสมการของเส้นตรง 2 เส้นที่ตัดกัน

STUDY GUIDE

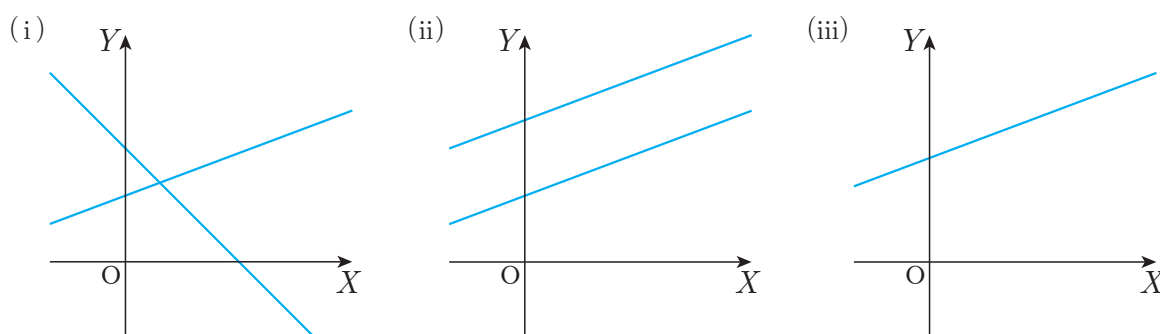
ความสัมพันธ์ของเส้นตรง 2 เส้นและการแก้ระบบสมการ

ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของเส้นตรง 2 เส้นสามารถแยกออกได้เป็น 3 กรณีต่อไปนี้ตามคำตอบของระบบสมการของเส้นตรง 2 เส้น

(i) เส้นตรง 2 เส้นตัดกันที่จุด 1 จุด $\Leftrightarrow$ ระบบสมการมีเพียง 1 คำตอบ

(ii) เส้นตรง 2 เส้นขนานกัน $\Leftrightarrow$ ระบบสมการไม่มีคำตอบ

(iii) เส้นตรง 2 เส้นทับกัน $\Leftrightarrow$ ระบบสมการมีคำตอบไม่จำกัด



เส้นตรง 2 เส้น $ax+by+c=0$ และ $a'x+b'y+c'=0$ ที่ตัดกันที่จุด 1 จุดนั้นแสดงด้วยสมการต่อไปนี้

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \quad (k \text{ คือค่าคงตัว})$$

EXERCISE

1 เลือกคำตอบที่ถูกต้อง ของการแก้ระบบสมการในข้อ (1) ถึง (3)

A...มีเพียง 1 คำตอบเท่านั้น B...ไม่มีคำตอบ C...มีคำตอบไม่จำกัด

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

โดยการแก้สมการ $2x+y=5$ สำหรับ y เราจะได้ $y=-2x+5$

โดยการแก้สมการ $3x-y=7$ สำหรับ y เราจะได้ $y=3x-7$

เส้นตรงที่กำหนดโดยสมการ 2 สมการนั้นมีความชันต่างกัน เส้นตรงดังกล่าวจึงไม่ขนานกัน

ดังนั้น ระบบสมการจึงมีเพียง 1 คำตอบเท่านั้น

A



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันสมการเพื่อหาว่าระบบสมการมีคำตอบหรือไม่

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$ เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)]

กด $\odot$ เลือก [2 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว)] กด $\odot$

② EXE ① EXE ⑤ EXE ③ EXE - ① EXE ⑦ EXE EXE EXE

$\begin{cases} 2x + & 1y = & 5 \\ 3x - & 1y = & 7 \end{cases}$	$x = \frac{12}{5}$	$y = \frac{1}{5}$
--	--------------------	-------------------

$$(2) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$$

โดยการแก้สมการ $2x-3y=1$ สำหรับ y เราจะได้ $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

โดยการแก้สมการ $4x-6y=3$ สำหรับ y เราจะได้ $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

เส้นตรงที่กำหนดโดยสมการ 2 สมการนั้นมีความชันเหมือนกัน เส้นตรงดังกล่าวจึงขนานกัน
ดังนั้นระบบสมการจึงไม่มีคำตอบ

B

check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)]

กด OK เลือก [2 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว)] กด OK

The calculator screen displays a system of two linear equations in two variables. The first equation is $2x - 3y = 1$ and the second equation is $4x - 6y = 3$. The calculator has determined that there is no solution to this system, displaying "No Solution" on the right side of the screen.

คุณสามารถยืนยันได้ว่าระบบสมการไม่มีคำตอบ (ไม่มีคำตอบ)

$$(3) \begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

โดยการแก้สมการ $5x+2y=3$ สำหรับ y เราจะได้ $y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

โดยการแก้สมการ $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}$ สำหรับ y เราจะได้ $y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

สมการ 2 สมการนั้นเหมือนกัน เส้นตรง 2 เส้นจึงทับกัน

ดังนั้น ระบบสมการจึงมีคำตอบไม่จำกัด

C

check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)]

กด OK เลือก [2 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว)] กด OK

The calculator screen displays a system of two linear equations in two variables. The first equation is $5x + 2y = 3$ and the second equation is $0.8333x + 0.3333y = 0.5$. The calculator has determined that there are infinite solutions to this system, displaying "Infinite Solution" on the right side of the screen.

คุณสามารถยืนยันได้ว่าระบบสมการมีคำตอบไม่จำกัด (คำตอบไม่จำกัด)

② กำหนดให้เส้นตรง 2 เส้น $2x - y - 1 = 0$ และ $x - y + 2 = 0$ นั้นตัดกัน จงหาสมการที่ตรงกับเงื่อนไขต่อไปนี้

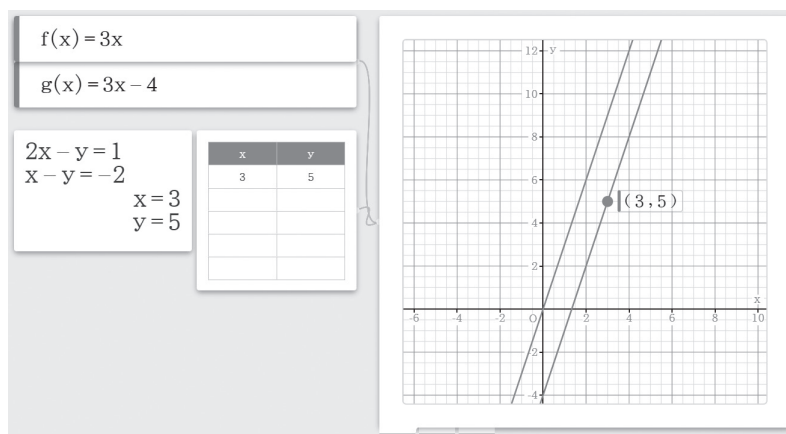
(1) ขนานกับเส้นตรง $y = 3x$

โดยการแก้ $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ เราจะได้ $x = 3$ และ $y = 5$ ดังนั้นพิกัดจุดตัดของเส้น 2 เส้นคือ $(3, 5)$

เนื่องจากความชันของเส้น $y = 3x$ คือ 3 ความชันของเส้นที่ขนานกันจึงเป็น 3 ด้วยเช่นกัน

ดังนั้น สมการของเส้นที่เราหาได้จึงผ่านจุด $(3, 5)$ ที่มีความชัน 3 ซึ่งจะได้ $y - 5 = 3(x - 3)$ ดังนั้น $y = 3x - 4$

$y = 3x - 4$



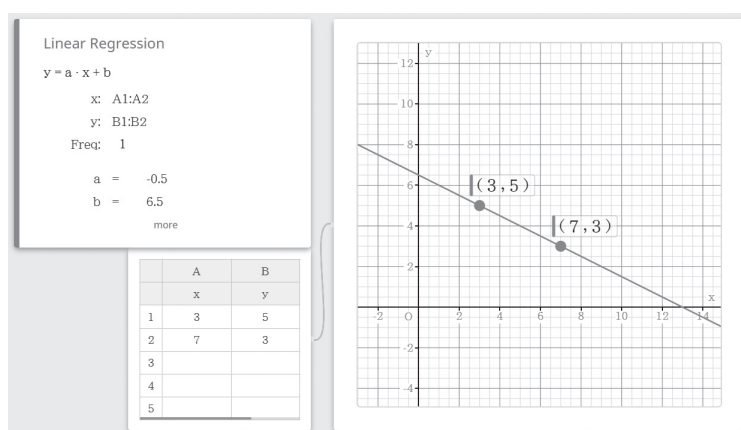
(2) ผ่านจุด $(7, 3)$

สมการของเส้นตรงหนึ่งเส้นที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้น $2x - y - 1 = 0$ และ $x - y + 2 = 0$ สามารถแสดงได้ในรูป $2x - y - 1 + k(x - y + 2) = 0$ (k คือค่าคงตัว)

ซึ่งผ่านจุด $(7, 3)$ ดังนั้น $2 \cdot 7 - 3 - 1 + k(7 - 3 + 2) = 0$, $k = -\frac{5}{3}$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่เราหาได้คือ $2x - y - 1 - \frac{5}{3}(x - y + 2) = 0$ แล้ว $x + 2y - 13 = 0$

$x + 2y - 13 = 0$



③ กำหนดให้ระบบสมการ $\begin{cases} 4x + 5y - 1 = 0 \\ ax + 5y + c = 0 \end{cases}$ ไม่มีคำตอบ จงหาเงื่อนไขที่ตรงกับ a และ c

ระบบสมการไม่มีคำตอบเมื่อเส้นตรง 2 ที่แสดงโดยสมการนั้นขนานกันแต่ไม่ทับกัน

ดังนั้น $a = 4$ และ $c \neq -1$

$a = 4$ และ $c \neq -1$

PRACTICE

1 เลือกคำตอบที่ถูกต้อง ของการแก้ระบบสมการในข้อ (1) ถึง (3)

A...มีเพียง 1 คำตอบเท่านั้น B...ไม่มีคำตอบ C...มีคำตอบไม่จำกัด

$$(1) \begin{cases} 5x + 6y = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

โดยการแก้สมการ $5x+6y=2$ สำหรับ y เราจะได้ $y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$

โดยการแก้สมการ $2x-3y=4$ สำหรับ y เราจะได้ $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

เส้นตรงที่กำหนดโดยสมการ 2 สมการนั้นมีความชันต่างกัน เส้นตรงดังกล่าวจึงไม่ขนานกัน

ดังนั้น ระบบสมการจึงมีเพียง 1 คำตอบเท่านั้น

A

check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$ เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)]

กด $\odot$ เลือก [2 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว)] กด $\odot$

5 EXE 6 EXE 2 EXE 2 EXE - 3 EXE 4 EXE EXE EXE

$\begin{cases} 5x + 6y = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$	$x = \frac{10}{9}$	$y = -\frac{16}{27}$
4		

$$(2) \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 8y = 3 \end{cases}$$

โดยการแก้สมการ $3x+4y=1$ สำหรับ y เราจะได้ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

โดยการแก้สมการ $6x+8y=3$ สำหรับ y เราจะได้ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$

เส้นตรงที่กำหนดโดยสมการ 2 สมการนั้นมีความชันเหมือนกัน เส้นตรงดังกล่าวจึงขนานกัน

ดังนั้นระบบสมการจึงไม่มีคำตอบ

B

$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 8y = 3 \end{cases}$	No Solution
3	

$$(3) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

หารทั้งสองข้างของสมการ $3x - 6y = 9$ ด้วย 3 จะได้ $x - 2y = 3$
 สมการ 2 สมการนั้นเหมือนกัน เส้น 2 เส้นจึงทับกัน
 ดังนั้น ระบบสมการจึงมีคำตอบไม่จำกัด

C

$\begin{cases} 1x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 1x - 2y = 3 \\ 1x - 2y = 3 \end{cases}$
9	Infinite Solution

2 กำหนดให้เส้นตรง 2 เส้น $3x + y - 2 = 0$ และ $x + y - 4 = 0$ นั้นตัดกัน จงหาสมการที่ตรงกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) ขนานกับเส้นตรง $y = 2x$

โดยการแก้ $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$ เราจะได้ $x = -1$ และ $y = 5$

ดังนั้นพิกัดจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้นคือ $(-1, 5)$

เนื่องจากความชันของเส้น $y = 2x$ คือ 2

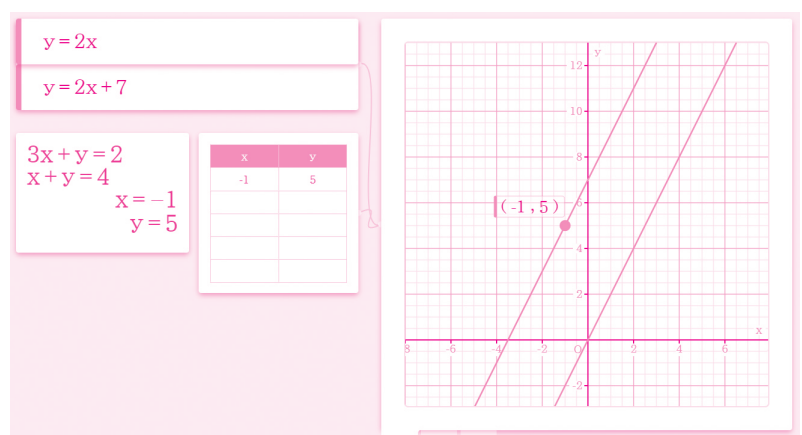
ความชันของเส้นที่ขนานกันจึงเป็น 2 ด้วยเช่นกัน

ดังนั้น สมการของเส้นที่เราหาได้จึงผ่านจุด $(-1, 5)$ ที่มีความชัน 2

ซึ่งจะได้ $y - 5 = 2\{x - (-1)\}$

ดังนั้น $y = 2x + 7$

$$y = 2x + 7$$



(2) ผ่านจุด (2, 8)

สมการของเส้นตรงหนึ่งเส้นที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้น $3x+y-2=0$ และ $x+y-4=0$ สามารถแสดงได้ในรูป

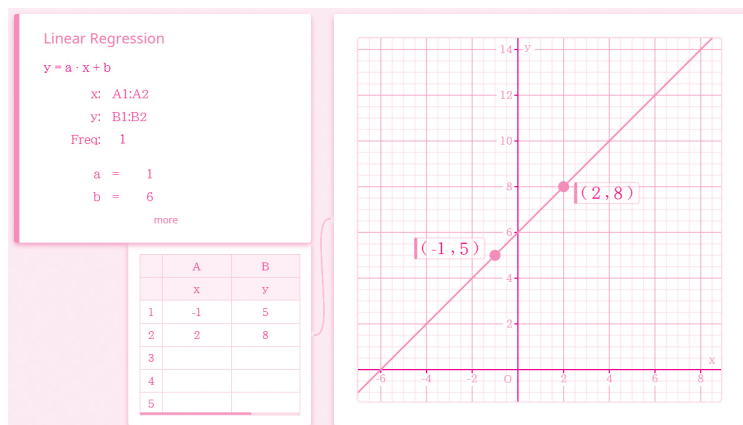
$$3x+y-2+k(x+y-4)=0 \quad (k \text{ คือค่าคงตัว})$$

ซึ่งผ่านจุด (2, 8) ดังนั้น $3 \cdot 2 + 8 - 2 + k(2 + 8 - 4) = 0$, $k = -2$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่เราต้องการหาคือ $3x+y-2-2(x+y-4)=0$

ซึ่งจะได้ $x-y+6=0$

$$x - y + 6 = 0$$



3 กำหนดให้ระบบสมการ $\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ ax + 4y + 3 = 0 \end{cases}$ มีเพียง 1 คำตอบเท่านั้น จงหาเงื่อนไขที่ตรงกับ a

ระบบสมการมีเพียง 1 คำตอบเท่านั้นเมื่อเส้น 2 เส้นที่แสดงโดยสมการนั้นไม่ขนานกัน

ดังนั้น จาก $3 \cdot 4 - a \cdot 2 \neq 0$ เราจะได้ $a \neq 6$

$$a \neq 6$$

ระยะห่างระหว่างจุดและเส้นตรง

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับระยะห่างระหว่างจุดและเส้นตรง

STUDY GUIDE

ระยะห่างระหว่างจุดและเส้น

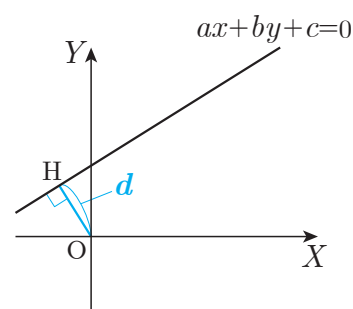
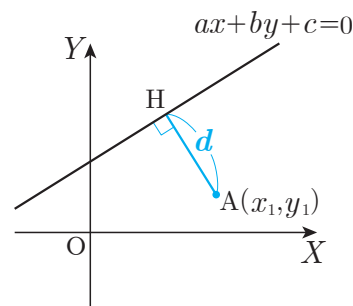
เมื่อเรากำหนดให้ H เป็นจุดตัดของเส้นตั้งฉากที่วาดจากจุด A ไปที่เส้น l แล้วความยาว d ของ AH นั้นจะเรียกว่า **ระยะห่าง** ระหว่างจุด A และเส้นตรง l ซึ่งเราสามารถหาได้ดังต่อไปนี้

- (1) d คือระยะห่างระหว่าง $A(x_1, y_1)$ และเส้นตรง $ax+by+c=0$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- (2) d คือระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด O และเส้นตรง $ax+by+c=0$

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



explanation

โดยให้จุดเป็น $A(x_1, y_1)$ และ $H(x_2, y_2)$ ซึ่งจะได้ $d = AH = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \dots (i)$

เนื่องจากเส้นตรง AH ตั้งฉากกับเส้นตรง $ax+by+c=0$ เราจะได้ $bx-ay+c'=0 \dots (ii)$

ซึ่งผ่านจุด $A(x_1, y_1)$ ดังนั้นเราจะได้ $bx_1-ay_1+c'=0, c'=-bx_1+ay_1$

โดยการแทนสมการนี้ลงในข้อ (ii) เราจะได้ $bx-ay-bx_1+ay_1=0$ ดังนั้น $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

เส้นตรง AH ผ่าน $H(x_2, y_2)$ ดังนั้นเราจะได้ $b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0 \dots (iii)$

เนื่องจากจุด $H(x_2, y_2)$ คือจุดบนเส้น $ax+by+c=0$ เราจะได้ $ax_2+by_2+c=0$

โดยการแปลงสมการนี้ เราจะได้ $a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+ax_1+by_1+c=0 \dots (iv)$

โดยการแก้ระบบสมการ (iii) และ (iv) สำหรับ x_2-x_1 และ y_2-y_1 แล้วเราจะได้

$$x_2 - x_1 = -\frac{a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}, y_2 - y_1 = -\frac{b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

แทนที่สมการเหล่านี้ลงในข้อ (i) สำหรับ

$$d = \sqrt{\left[-\frac{a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[-\frac{b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}\right]^2} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

หากจุด A คือจุดกำเนิด แล้ว $x_1=0$ และ $y_1=0$ ดังนั้น $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

EXERCISE

◆ หาระยะห่างระหว่างจุดและเส้นตรงต่อไปนี้

(1) จุด (2, 3) และเส้นตรง $5x-4y+8=0$

$$d = \frac{|5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 8|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{41}} = \frac{6\sqrt{41}}{41}$$

$$\frac{6\sqrt{41}}{41}$$

(2) จุดกำเนิดและเส้นตรง $2x+3y-9=0$

$$d = \frac{|-9|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$$

$$\frac{9\sqrt{13}}{13}$$

(3) จุด (1, -5) และเส้นตรง $y=2x+3$

โดยการแปลง $y=2x+3$ เราจะได้ $2x-y+3=0$

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-5) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{5}$$



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ตัวแปรเพื่อคำนวณระยะห่างระหว่างจุดและเส้นตรง

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$

ป้อนสูตรสำหรับระยะห่างระหว่างจุดและเส้นตรง



$$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(1) ในหน้าจอตัวแปร ให้ป้อน $[A=5, B=-4, C=8, x=2$ และ $y=3]$ แล้วคำนวณ



A=5	B=-4
C=8	D=0
E=0	F=0
x=2	y=3
z=0	

$$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{6\sqrt{41}}{41}$$

(2) ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $[A=2, B=3, C=-9, x=0$ และ $y=0]$ แล้วคำนวณ



A=2	B=3
C=-9	D=0
E=0	F=0
x=0	y=0
z=0	

$$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$$

(3) ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $[A=2, B=-1, C=3, x=1$ และ $y=-5]$ แล้วคำนวณ



A=2	B=-1
C=3	D=0
E=0	F=0
x=1	y=-5
z=0	

$$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2\sqrt{5}$$

PRACTICE

◆ หาระยะห่างระหว่างจุดและเส้นตรงต่อไปนี้

(1) จุด $(-1, -3)$ และเส้น $6x-3y+2=0$

$$d = \frac{|6 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) + 2|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(2) จุดกำเนิดและเส้นตรง $3x+4y-10=0$

$$d = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

$$2$$

(3) จุด $(3, 4)$ และเส้นตรง $y=-5x+7$

โดยการแปลง $y=-5x+7$ เราจะได้ $5x+y-7=0$

$$d = \frac{|5 \cdot 3 + 1 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{26}}{13}$$

$$\frac{6\sqrt{26}}{13}$$

check

สูตรการคำนวณนั้นเหมือนกับในแบบฝึกหัด ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องป้อนสูตร

(1)

$\left(\frac{2}{3}\right)$ 6 EXE > - 3 EXE > 2 EXE $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ - 1 EXE > - 3 EXE $\left(\frac{2}{3}\right)$ EXE

A=6	B=-3
C=2	D=0
E=0	F=0
X=-1	Y=-3
Z=0	

$\sqrt{A^2+B^2}$
$\frac{\sqrt{5}}{3}$

(2)

$\left(\frac{2}{3}\right)$ 3 EXE > 4 EXE > - 1 0 EXE $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ 0 EXE > 0 EXE $\left(\frac{2}{3}\right)$ EXE

A=3	B=4
C=-10	D=0
E=0	F=0
X=0	Y=0
Z=0	

$\sqrt{A^2+B^2}$
2

(3)

$\left(\frac{2}{3}\right)$ 5 EXE > 1 EXE > - 7 EXE $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ 3 EXE > 4 EXE $\left(\frac{2}{3}\right)$ EXE

A=5	B=1
C=-7	D=0
E=0	F=0
X=3	Y=4
Z=0	

$\sqrt{A^2+B^2}$
$\frac{6\sqrt{26}}{13}$

สมการวงกลม (1)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจสมการวงกลม

STUDY GUIDE

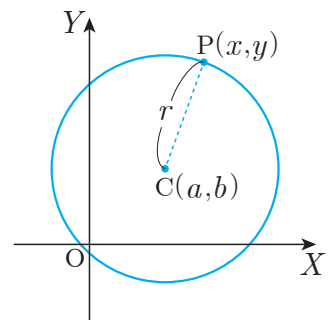
สมการวงกลม

เราสามารถใช้สมการต่อไปนี้เพื่อแสดงวงกลมบนระนาบพิกัดฉากได้

- (1) สมการของวงกลมที่มีรัศมี $r(r>0)$ มีจุดศูนย์กลางอยู่บนจุด $C(a, b)$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
- (2) สมการของวงกลมที่มีรัศมี r มีจุดศูนย์กลางอยู่บนจุดกำเนิด O

$$x^2 + y^2 = r^2$$



นอกจากนี้ ในเชิงกราฟ วงกลม (1) คือวงกลม (2) ที่แปลขนานกับ a บนแกน X และแปลขนานกับ b บนแกน Y

explanation

โดยให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุดที่ไม่เจาะจง P บนเส้นรอบวง

แสดง $CP=r$ ในพิกัดเป็น $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างเพื่อจะได้ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

หากจุด C คือจุดกำเนิด แล้ว $a=0$ และ $b=0$ ดังนั้น $x^2 + y^2 = r^2$

proof

สามารถคำนวณวงกลมในเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ได้โดยการแก้สมการสำหรับ y

$x^2 + y^2 = 1, y^2 = 1 - x^2$ ดังนั้น $y = \sqrt{1 - x^2}$ หรือ $y = -\sqrt{1 - x^2}$

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ แล้ว ให้กด EXE

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -1, End (สิ้นสุด): 1, Step (ขั้น): 1] แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

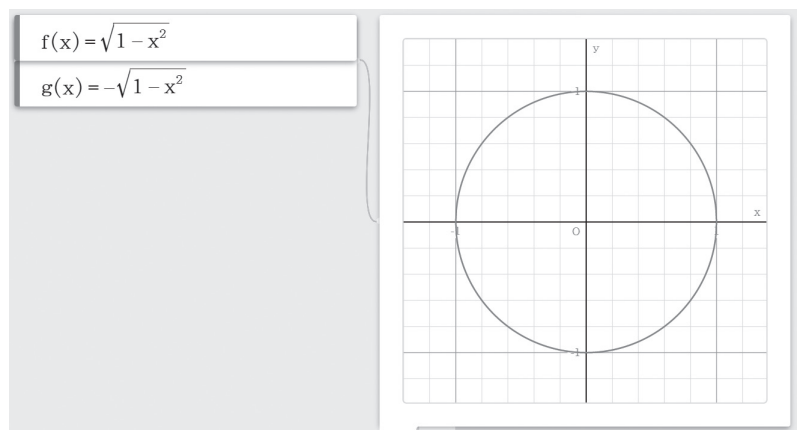
กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ด เพื่อแสดงกราฟ

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

	x	$f(x)$	$g(x)$
1	-1	0	0
2	0	1	-1
3	1	0	0
4			

-1



EXERCISE

① หาสมการของวงกลมต่อไปนี้

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, 2)$ และรัศมีคือ 3

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2, (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

(2) จุดศูนย์กลางคือจุดกำเนิดและรัศมีคือ $\sqrt{5}$

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2, x^2 + y^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

② แก้อสมการเกี่ยวกับสมการ $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 6$ ต่อไปนี้

(1) สมการนี้แสดงรูปทรงใด

ซึ่งสามารถแปลงเป็น $\{x - (-3)\}^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{6})^2$ ได้

ดังนั้นจึงเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3, 2)$ และรัศมีคือ $\sqrt{6}$

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3, 2)$ และรัศมีคือ $\sqrt{6}$

(2) รูปทรงในข้อ (1) แปลงจากรูปทรงที่แสดงโดยสมการ $x^2 + y^2 = 6$ ได้อย่างไร

รูปทรงแปลขนานบนแกน X กับ -3 และบนแกน Y กับ 2

PRACTICE

① หาสมการของวงกลมต่อไปนี้

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, -5)$ และรัศมีคือ $\sqrt{2}$

$$(x-4)^2 + \{y - (-5)\}^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 2$$

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 2$$

(2) จุดศูนย์กลางคือจุดกำเนิดและรัศมีคือ 4

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

② แก้อสมการเกี่ยวกับสมการ $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 8$ ต่อไปนี้

(1) สมการนี้แสดงรูปทรงใด

ซึ่งสามารถแปลงเป็น $\{x - (-2)\}^2 + \{y - (-5)\}^2 = (2\sqrt{2})^2$ ได้

ดังนั้นจึงเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, -5)$ และรัศมีคือ $2\sqrt{2}$

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, -5)$ และรัศมีคือ $2\sqrt{2}$

(2) รูปทรงในข้อ (1) แปลงจากรูปทรงที่แสดงโดยสมการ $x^2 + y^2 = 8$ ได้อย่างไร

รูปทรงแปลขนานบนแกน X กับ -2 และบนแกน Y กับ -5

สมการวงกลม (2)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

STUDY GUIDE

รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

แปลงสมการวงกลม $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม)

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0, x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

โดยกำหนดให้ $-2a = l$, $-2b = m$ และ $a^2 + b^2 - r^2 = n$

รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมนั้นสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \quad (\text{เมื่อ } l^2 + m^2 - 4n > 0)$$

รูปแบบของนิพจน์นี้เรียกว่า **รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม**

นอกจากนี้ เนื่องจาก $r^2 > 0$ โดยใช้ $-2a = l$ และ $-2b = m$ ใน $a^2 + b^2 - r^2 = n$

เราสามารถแก้โจทย์สำหรับ r^2 ได้

$$\text{ดังนั้นจาก } r^2 = a^2 + b^2 - n = \left(-\frac{l}{2}\right)^2 + \left(-\frac{m}{2}\right)^2 - n = \frac{l^2 + m^2 - 4n}{4} > 0$$

เราจะได้ $l^2 + m^2 - 4n > 0$

เมื่อสมการวงกลมนั้นถูกกำหนดโดย $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ เราสามารถหาจุดศูนย์กลางและรัศมีวงกลมได้

โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อแปลงเป็น $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

EXTRA Info.

การแปลงต่อไปนี้เรียกว่าการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

EXERCISE

- ① สมการ $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$ แสดงรูปทรงใด

โดยการแปลงสมการนี้ เราจะได้

$$(x-2)^2 - 4 + (y+5)^2 - 25 - 7 = 0, (x-2)^2 + (y+5)^2 = 6^2$$

ดังนั้น เราจึงได้วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, -5)$ และรัศมีคือ 6

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, -5)$ และรัศมีคือ 6

- ② หาสมการวงกลมที่ผ่านจุด 3 จุด $A(-4, 6)$, $B(-5, 5)$ และ $C(4, 2)$

โดยให้สมการวงกลมเป็น $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$

ซึ่งผ่าน $A(-4, 6)$ ดังนั้น $(-4)^2 + 6^2 - 4l + 6m + n = 0, -4l + 6m + n = -52 \quad \dots(i)$

ซึ่งผ่าน $B(-5, 5)$ ดังนั้น $(-5)^2 + 5^2 - 5l + 5m + n = 0, -5l + 5m + n = -50 \quad \dots(ii)$

ซึ่งผ่าน $C(4, 2)$ ดังนั้น $4^2 + 2^2 + 4l + 2m + n = 0, 4l + 2m + n = -20 \quad \dots(iii)$

โดยการแก้ระบบสมการ (i), (ii) และ (iii) เราจะได้ $l=2, m=-4, n=-20$

ดังนั้น เราจึงหาได้ว่าสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

วงกลมที่เราหาได้ในส่วนนี้เรียกว่า **วงกลมล้อมรอบ**ของ $\triangle ABC$ และจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้เรียกว่า **ศูนย์กลางวงล้อม**

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$$



check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$ เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)]กด $\odot$ เลือก [3 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัว)] กด $\odot$
 $\ominus$ 4 EXE 6 EXE 1 EXE $\ominus$ 5 2 EXE $\ominus$ 5 EXE 5 EXE 1 EXE $\ominus$ 5 0 EXE 4 EXE 2 EXE 1 EXE $\ominus$ 2 0 EXE

$$\begin{cases} -4x + 6y + 1z = -4 \\ -5x + 5y + 1z = -4 \\ 4x + 2y + 1z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} + 6y + 1z = 52 \\ + 5y + 1z = 50 \\ + 2y + 1z = 20 \end{cases}$$

$$\text{EXE} \text{ EXE} \text{ EXE} \quad x = \quad 2$$

$$\text{EXE} \text{ EXE} \text{ EXE} \quad y = \quad -4$$

$$\text{EXE} \text{ EXE} \text{ EXE} \quad z = \quad -20$$

PRACTICE

- 1 สมการ $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$ แสดงรูปทรงใด

โดยการแปลงสมการนี้ เราจะได้

$$(x+3)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 + 21 = 0, (x+3)^2 + (y-4)^2 = 2^2$$

ดังนั้น เราจึงได้วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3, 4)$ และรัศมีคือ 2

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3, 4)$ และรัศมีคือ 2

- 2 หาสมการวงกลมที่ผ่านจุด 3 จุด A(2, 4), B(5, 3) และ C(6, 2)

โดยให้สมการวงกลมเป็น $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$

ซึ่งผ่าน A(2, 4) ดังนั้น $2^2 + 4^2 + 2l + 4m + n = 0, 2l + 4m + n = -20 \dots (i)$

ซึ่งผ่าน B(5, 3) ดังนั้น $5^2 + 3^2 + 5l + 3m + n = 0, 5l + 3m + n = -34 \dots (ii)$

ซึ่งผ่าน C(6, 2) ดังนั้น $6^2 + 2^2 + 6l + 2m + n = 0, 6l + 2m + n = -40 \dots (iii)$

โดยการแก้ระบบสมการ (i), (ii) และ (iii) เราจะได้ $l = -4, m = 2, n = -20$

ดังนั้น เราจึงหาได้ว่าสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$

check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$ เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)]กด $\odot$ เลือก [3 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัว)] กด $\odot$
 $\odot$ 2 EXE 4 EXE 1 EXE $\ominus$ 2 0 EXE 5 EXE 3 EXE 1 EXE $\ominus$ 3 4 EXE 6 EXE 2 EXE 1 EXE $\ominus$ 4 0 EXE EXE EXE

$$\begin{cases} + 4y + 1z = 20 \\ + 3y + 1z = 34 \\ + 2y + 1z = 40 \end{cases}$$

$$\text{EXE} \text{ EXE} \text{ EXE} \quad x = \quad -4$$

$$\text{EXE} \text{ EXE} \text{ EXE} \quad y = \quad 2$$

$$\text{EXE} \text{ EXE} \text{ EXE} \quad z = \quad -20$$

วงกลมและเส้นตรง (1)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลมและเส้นตรง

STUDY GUIDE

ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลมและเส้นตรง

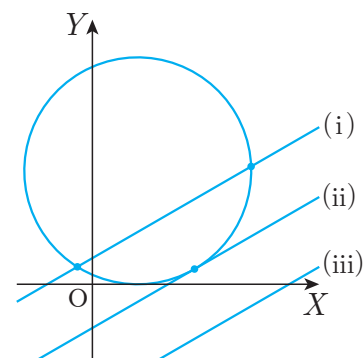
จุดตัดบนวงกลมและเส้นตรง

เมื่อย่างกลมและเส้นตรงมีจุดตัดกัน พิกัดของจุดเหล่านั้นคือรากจริงของระบบสมการของวงกลมและเส้นตรง

จากจำนวนคำตอบของสมการกำลังสองที่หาได้โดยการตัด y ออกจากระบบสมการของวงกลม

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ และเส้น $y = mx + n$ เราจึงทราบข้อมูลต่อไปนี้

- (i) รากของคำตอบที่เป็นจำนวนจริง 2 จำนวน
ที่ต่างกัน $\Rightarrow$ ตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน
- (ii) รากของคำตอบที่ซ้ำกัน
 $\Rightarrow$ เส้นสัมผัสที่จุด 1 จุด
- (iii) ไม่มีรากของคำตอบที่เป็นจำนวนจริง
 $\Rightarrow$ ไม่มีจุดตัด



ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลมและเส้นตรง

สามารถใช้วิธีการต่อไปนี้เพื่อกำหนดความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลมและเส้นตรงได้

- (i) กำหนดจำนวนคำตอบของสมการกำลังสองเพื่อหาพิกัดของจุดร่วม
- (ii) ใช้ผลต่างของวงกลมที่มีรัศมี r และระยะห่าง d จากจุดศูนย์กลางของวงกลมถึงเส้น

ข้อมูลต่อไปนี้เป็นการสรุปความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลมและเส้นตรง

ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลมและเส้นตรง	ตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน	เส้นสัมผัส	ไม่มีจุดตัด
จำนวนจุดร่วม	2	1	0
รากของคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของระบบสมการ	รากของคำตอบที่เป็นจำนวนจริง 2 รากที่ต่างกัน	รากของคำตอบที่ซ้ำกัน	ไม่มีรากของคำตอบที่เป็นจำนวนจริง
เครื่องหมายดิสคริมิแนนต์ D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
ผลต่างของ d และ r	$d < r$	$d = r$	$d > r$

EXERCISE

1 จงหาพิกัดจุดตัดของเส้นตรงและวงกลมด้านล่าง

(1) $x^2 + y^2 = 1, y = x + 1$

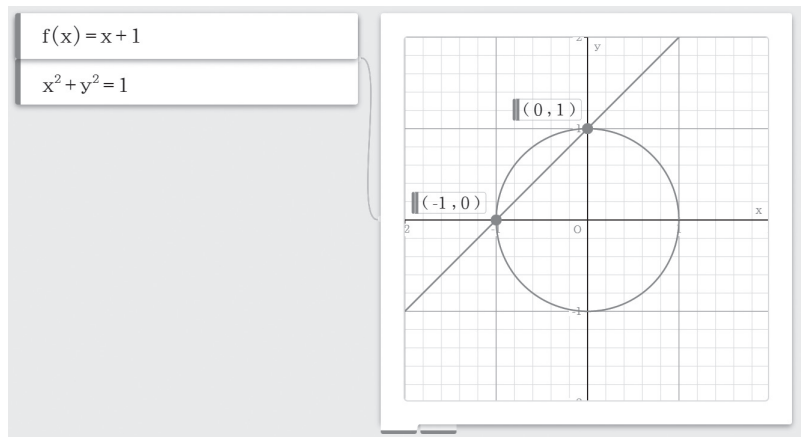
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \cdots (i) \\ y = x + 1 \cdots (ii) \end{cases}$$

แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ $x^2 + (x + 1)^2 = 1, 2x^2 + 2x = 0, 2x(x + 1) = 0, x = 0, -1$

โดยการแทนที่สมการนี้ใน (ii) เมื่อ $x=0$ แล้ว $y=1$ และเมื่อ $x=-1$ แล้ว $y=0$

ดังนั้น พิกัดของจุดตัดคือ $(0, 1)$ และ $(-1, 0)$

$(0, 1), (-1, 0)$



(2) $x^2 + y^2 = 8, x + y - 4 = 0$

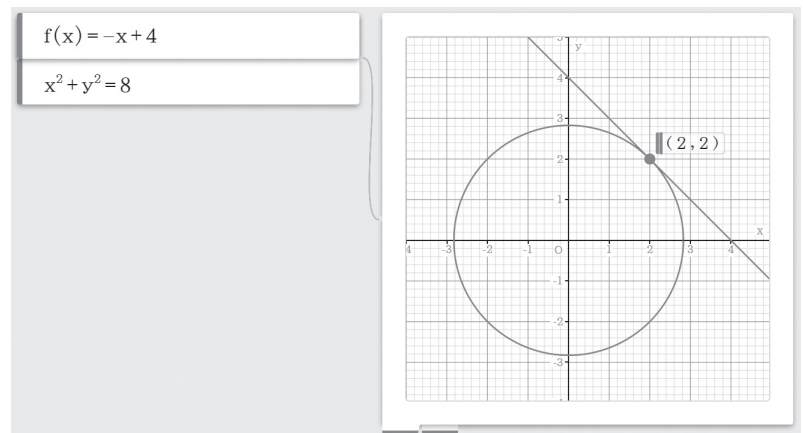
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \cdots (i) \\ x + y - 4 = 0 \cdots (ii) \end{cases}$$

โดยการแปลง (ii) และแทนที่ใน (i) เราจะได้ $x^2 + (-x + 4)^2 = 8, 2x^2 - 8x + 8 = 0, (x - 2)^2 = 0, x = 2$

โดยการแทนที่สมการนี้ใน (ii) เมื่อ $x=2$ แล้ว $y=2$

ดังนั้น พิกัดของจุดตัดคือ $(2, 2)$

$(2, 2)$



2 หาจำนวนจุดตัดของเส้นตรงและวงกลมด้านล่าง

(1) $x^2 + y^2 = 3, y = -3x + 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \cdots (i) \\ y = -3x + 1 \cdots (ii) \end{cases}$$

แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ $x^2 + (-3x + 1)^2 = 3, 5x^2 - 3x - 1 = 0$

โดยให้หาค่าของ D ซึ่งจะได้ $D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 29 > 0$

ดังนั้น วงกลมและเส้นตรงจึงตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน

2

EXTRA Info.

จำนวนของคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ สามารถ

กำหนดได้โดยใช้ดิสคริมีแนนต์ $D = b^2 - 4ac$

$D > 0 \rightarrow$ มีรากของคำตอบที่เป็นจำนวนจริง 2 รากที่ต่างกัน (ตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน)

$D = 0 \rightarrow$ มีรากของคำตอบที่ซ้ำกัน (คือเส้นสัมผัส)

$D < 0 \rightarrow$ ไม่มีรากของคำตอบที่เป็นจำนวนจริง (ไม่มีจุดตัด)



check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$ เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด $\odot$ เลือก $[ax^2+bx+c]$ กด $\odot$

5 EXE $\ominus$ 3 EXE $\ominus$ 1 EXE EXE EXE

ax^2+bx+c $5x^2 - 3x - 1$	$ax^2+bx+c=0$ $x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{10}$	$ax^2+bx+c=0$ $x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{10}$
-----------------------------	--	--

OTHER METHODS

โดยการแปลง (ii) เราจะได้ $3x + y - 1 = 0 \cdots (iii)$

วงกลมในข้อ (i) มีรัศมี $\sqrt{3}$ และพิกัดของจุดศูนย์กลางคือ $(0, 0)$

ระยะห่าง d ระหว่างจุด $(0, 0)$ และเส้นตรงในข้อ (iii) คือ $d = \frac{|-1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$$r - d = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{10\sqrt{3} - \sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{300} - \sqrt{10}}{10} > 0$$

ดังนั้น เนื่องจาก $d < r$ วงกลมและเส้นตรงจึงตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน

$\times \div$ Calculate $\square \square \square$ Spreadsheet $\bar{\square}$ Statistics $\square \square$ Table $\square$ Distribution $xy=0$ Equation	$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{10}}{10}$ $\frac{-\sqrt{10} + 10\sqrt{3}}{10}$	Standard Decimal ENG Notation Sexagesimal $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{10}}{10}$ 1.415823042
--	--	--

$$(2) \quad x^2 + y^2 = 10, x - 3y + 10 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \cdots (i) \\ x - 3y + 10 = 0 \cdots (ii) \end{cases}$$

วงกลมในข้อ (i) มีรัศมี $\sqrt{10}$ และพิกัดของจุดศูนย์กลางคือ $(0, 0)$

ระยะห่าง d ระหว่างจุด $(0, 0)$ และเส้นตรงในข้อ (ii) คือ $d = \frac{|10|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$

$$r - d = \sqrt{10} - \sqrt{10} = 0$$

ดังนั้น เนื่องจาก $d=r$ วงกลมและเส้นตรงจึงเป็นเส้นสัมผัส

1

$$(3) \quad x^2 + y^2 = 20, y = -x + 8$$

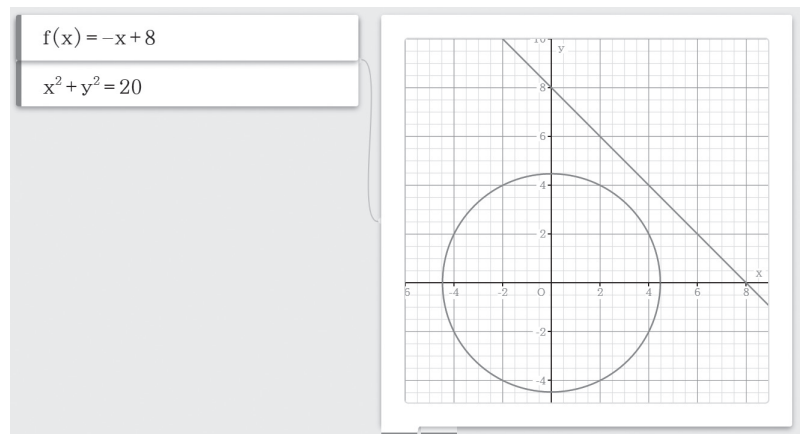
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \cdots (i) \\ y = -x + 8 \cdots (ii) \end{cases}$$

แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ $x^2 + (-x + 8)^2 = 20, x^2 - 8x + 22 = 0$

โดยให้ดิสคริมีแนนต์นี้เป็น D ซึ่งจะได้ $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22 = -24 < 0$

ดังนั้น วงกลมและเส้นตรงจึงไม่มีจุดตัด

0



check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$ เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด $\odot$ เลือก $[ax^2+bx+c]$ กด $\odot$

ax^2+bx+c $1x^2 - 8x + 22$ 22	$ax^2+bx+c=0$ $x_1 = 4 + \sqrt{6}i$	$ax^2+bx+c=0$ $x_2 = 4 - \sqrt{6}i$
-----------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

คำตอบคือจำนวนจินตภาพเนื่องจากมีหน่วยจินตภาพ i จึงกล่าวได้ว่าระบบสมการไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

3 จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

- (1) กำหนดให้วงกลม $x^2 + y^2 = 4$ และเส้น $y = -x + m$ มีจุดที่สัมผัสกัน จงหาค่า m

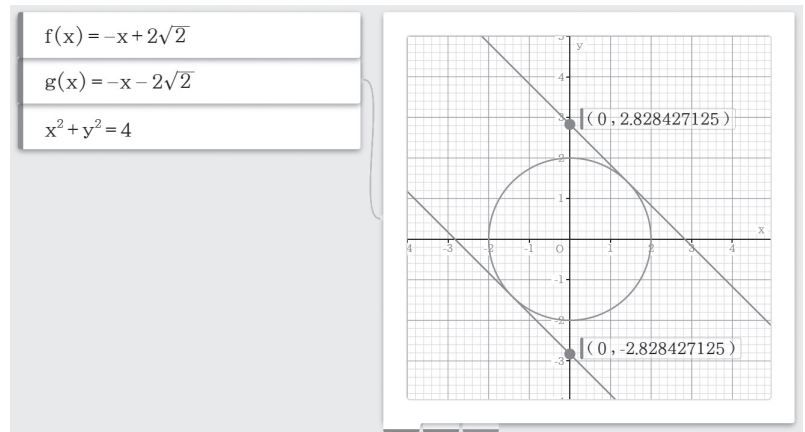
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \cdots (i) \\ y = -x + m \cdots (ii) \end{cases}$$

แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ $x^2 + (-x + m)^2 = 4, 2x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$

โดยให้ดิสคริมิแนนต์นี้เป็น D ซึ่งจะได้ $\frac{D}{4} = (-m)^2 - 2 \cdot (m^2 - 4) = -m^2 + 8$

เนื่องจากวงกลมและเส้นนั้นสัมผัสกันที่ $D=0$ เราจะได้ $-m^2 + 8 = 0, m = \pm 2\sqrt{2}$

$$m = \pm 2\sqrt{2}$$



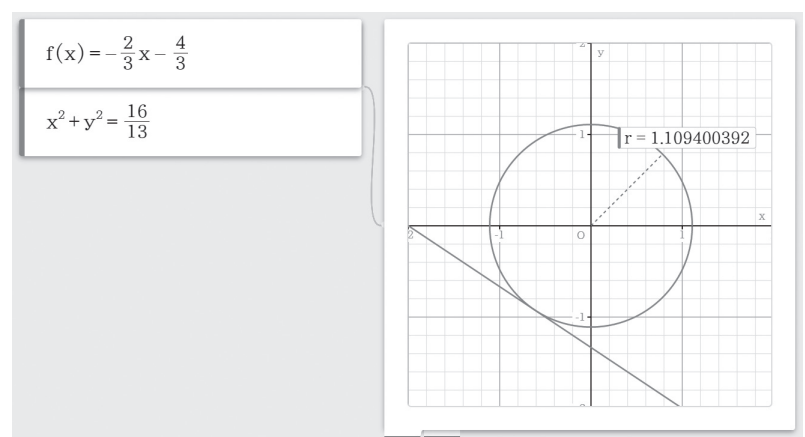
- (2) กำหนดให้วงกลม $x^2 + y^2 = r^2$ และเส้น $2x + 3y + 4 = 0$ มีจุดที่สัมผัสกัน จงหาค่าของรัศมี r

พิกัดจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$

ระยะห่าง d ระหว่างจุด $(0, 0)$ และเส้นตรงคือ $d = \frac{|4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$

เนื่องจากวงกลมและเส้นนั้นสัมผัสกันที่ $d=r$ เราจะได้ $r = \frac{4\sqrt{13}}{13}$

$$r = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$



PRACTICE

1 จงหาพิกัดจุดตัดของเส้นตรงและวงกลมด้านล่าง

(1) $x^2 + y^2 = 5, y = x - 1$

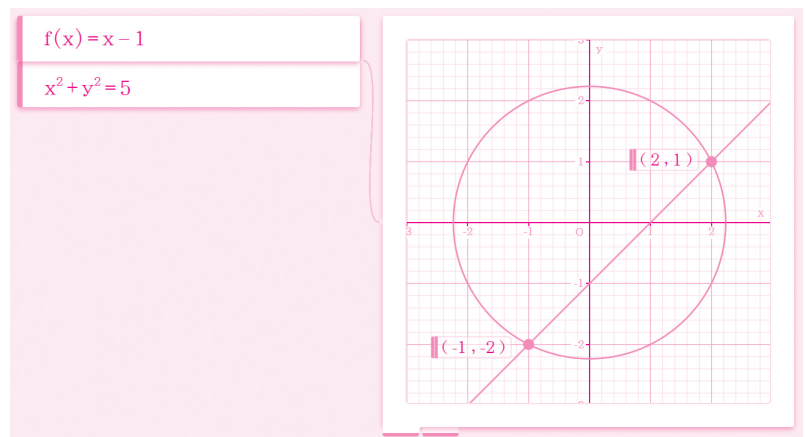
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \cdots (i) \\ y = x - 1 \cdots (ii) \end{cases}$$

แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ

$$x^2 + (x - 1)^2 = 5, x^2 - x - 2 = 0, (x + 1)(x - 2) = 0, x = -1, 2$$

โดยการแทนที่สมการนี้ใน (ii) เมื่อ $x = -1$ แล้ว $y = -2$ และเมื่อ $x = 2$ แล้ว $y = 1$
 ดังนั้น พิกัดของจุดตัดคือ $(-1, -2), (2, 1)$

$(-1, -2), (2, 1)$



(2) $x^2 + y^2 = 50, x + y + 10 = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \cdots (i) \\ x + y + 10 = 0 \cdots (ii) \end{cases}$$

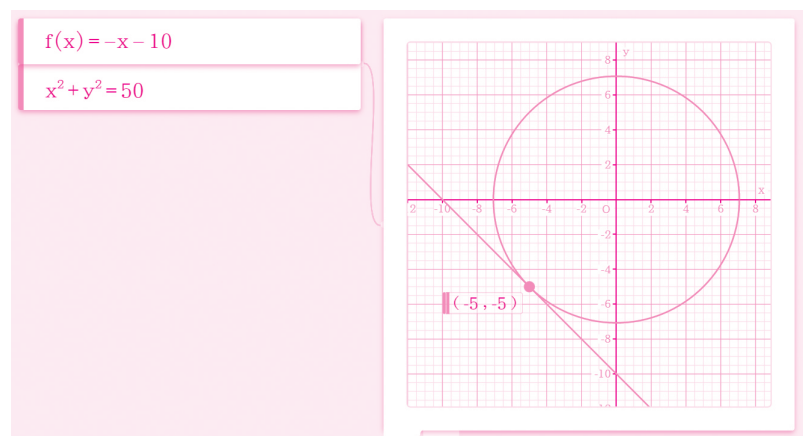
โดยการแปลง (ii) และแทนที่ใน (i) เราจะได้

$$x^2 + (-x - 10)^2 = 50, x^2 + 10x + 25 = 0, (x + 5)^2 = 0, x = -5$$

โดยการแทนที่สมการนี้ใน (ii) เมื่อ $x = -5$ แล้ว $y = -5$

ดังนั้น พิกัดของจุดตัดคือ $(-5, -5)$

$(-5, -5)$



2 หาจำนวนจุดตัดของเส้นตรงและวงกลมด้านล่าง

(1) $x^2 + y^2 = 6, y = 2x + 3$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \cdots (i) \\ y = 2x + 3 \cdots (ii) \end{cases}$$

แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ $x^2 + (2x + 3)^2 = 6, 5x^2 + 12x + 3 = 0$

โดยให้ดิสคริมีแนนต์นี้เป็น D ซึ่งจะได้ $D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 84 > 0$

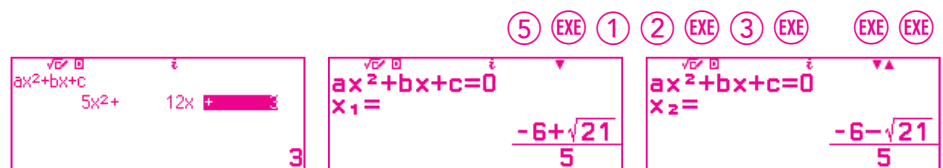
ดังนั้น วงกลมและเส้นจึงตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน

2

check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$ เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด $\odot$

เลือก $[ax^2+bx+c]$ กด $\odot$



(2) $x^2 + y^2 = 1, 3x + 4y + 10 = 0$

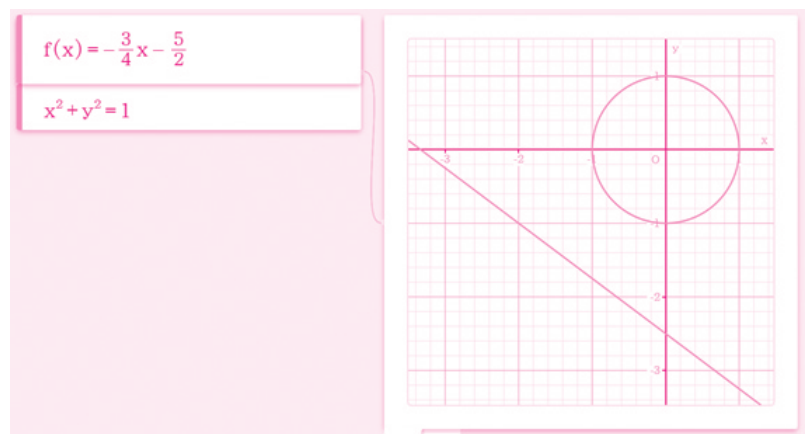
วงกลมมีรัศมี 1 และพิกัดของจุดศูนย์กลางคือ (0, 0)

ระยะห่าง d ระหว่างจุด (0, 0) และเส้นตรงคือ $d = \frac{|10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$

$$r - d = 1 - 2 = -1 < 0$$

ดังนั้น เนื่องจาก $d > r$ วงกลมและเส้นตรงจึงไม่มีจุดตัด

0



(3) $x^2 + y^2 = 10, y = 3x - 10$

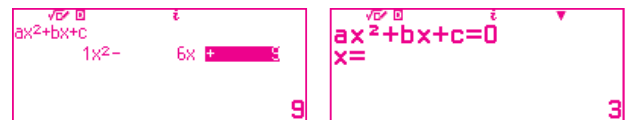
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \cdots (i) \\ y = 3x - 10 \cdots (ii) \end{cases}$$

แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ $x^2 + (3x - 10)^2 = 10, x^2 - 6x + 9 = 0$

โดยให้ดิสคริมีแนนต์นี้เป็น D ซึ่งจะได้ $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$

ดังนั้น วงกลมและเส้นตรงจึงสัมผัสกัน

1



③ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

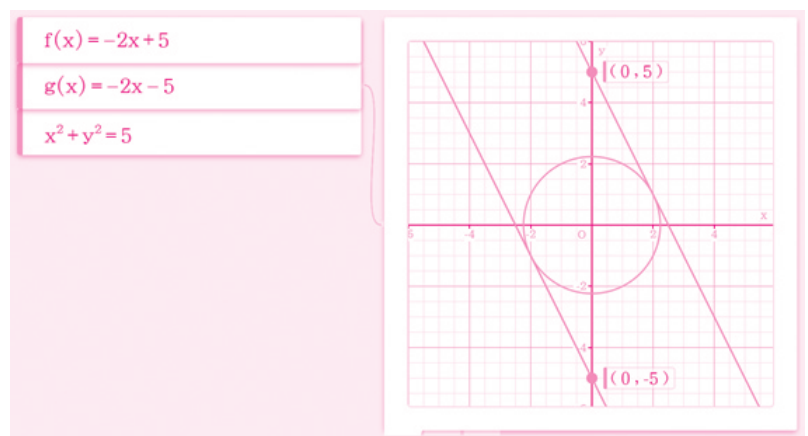
(1) กำหนดให้วงกลม $x^2 + y^2 = 5$ และเส้น $y = -2x + m$ มีจุดที่สัมผัสกัน จงหาค่า m

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \cdots (i) \\ y = -2x + m \cdots (ii) \end{cases}$$

แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ $x^2 + (-2x + m)^2 = 5, 5x^2 - 4mx + m^2 - 5 = 0$

โดยให้ดิสคริมีแนนต์นี้เป็น D ซึ่งจะได้ $\frac{D}{4} = (-2m)^2 - 5 \cdot (m^2 - 5) = -m^2 + 25$

เนื่องจากวงกลมและเส้นตรงนั้นสัมผัสกันที่ $D=0$ เราจะได้ $-m^2 + 25 = 0, m = \pm 5$
 $m = \pm 5$



(2) กำหนดให้วงกลม $x^2 + y^2 = r^2$ และเส้น $3x - 2y - 26 = 0$ มีจุดที่สัมผัสกัน จงหาค่าของรัศมี r

พิกัดจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$

ระยะห่าง d ระหว่างจุด $(0, 0)$ และเส้นตรงคือ $d = \frac{|-26|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$

เนื่องจากวงกลมและเส้นตรงนั้นสัมผัสกันที่ $d=r$ เราจะได้ $r = 2\sqrt{13}$

$$r = 2\sqrt{13}$$

วงกลมและเส้นตรง (2)

TARGET

การทำความเข้าใจสมการเส้นสัมผัสบนวงกลม

STUDY GUIDE

สมการเส้นสัมผัสวงกลม

เราสามารถใช้สมการต่อไปนี้เพื่อแสดงว่าเส้นเป็นเส้นสัมผัสวงกลมได้

(1) สมการสำหรับเส้นสัมผัสที่จุด $P(x_1, y_1)$ บนวงกลม

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x_1x + y_1y = r^2$$

(2) สมการสำหรับเส้นสัมผัสที่จุด $P(x_1, y_1)$ บนวงกลม

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

explanation

เส้นสัมผัสผ่านจุด $P(x_1, y_1)$

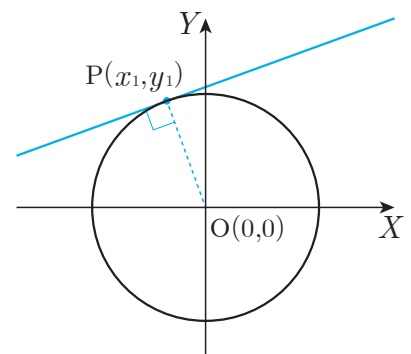
เนื่องจากจุด $P(x_1, y_1)$ อยู่บนวงกลม $x^2 + y^2 = r^2$ เราจะได้ $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

นอกจากนี้ หากเรากำหนดให้ m คือความชันของเส้นสัมผัส และเส้นสัมผัสตั้งฉากกับเส้น OP แล้วเราจะได้

$$(\text{ความชันของเส้น } OP) \cdot m = -1 \text{ ดังนั้น } \frac{y_1}{x_1} \cdot m = -1, m = -\frac{x_1}{y_1}$$

สมการเส้นสัมผัสคือ

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1), y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1), y_1y + x_1x = x_1^2 + y_1^2 = r^2$$



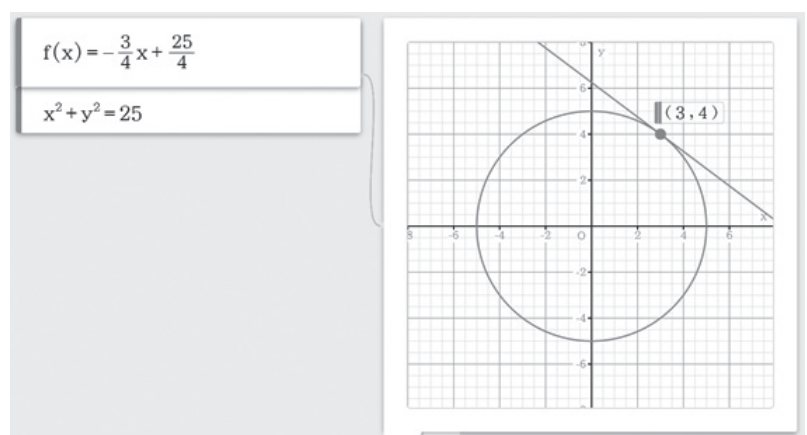
EXERCISE

◆ หาสมาการเส้นสัมผัสที่จุด P บนเส้นรอบวง ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) วงกลม $x^2 + y^2 = 25$ และจุด $P(3, 4)$

สมการเส้นสัมผัสที่เราหาได้คือ $3x + 4y = 25$

$$\underline{3x + 4y = 25}$$



(2) วงกลม $x^2 + y^2 = 4$ และจุด $P(-2, 0)$

สมการเส้นสัมผัสที่เราหาได้คือ $-2x + 0 \cdot y = 4$, $x = -2$

$$\underline{x = -2}$$

(3) วงกลม $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ และจุด $P(2, 5)$

สมการเส้นสัมผัสที่เราหาได้คือ $(2-1)(x-1) + (5-2)(y-2) = 10$, $x + 3y - 17 = 0$

$$\underline{x + 3y - 17 = 0}$$

PRACTICE

◆ หาสมการเส้นสัมผัสที่จุด P บนเส้นรอบวง ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) วงกลม $x^2 + y^2 = 40$ และจุด $P(2, 6)$

สมการเส้นสัมผัสที่เราหาได้คือ $2x + 6y = 40$

$$2x + 6y = 40$$

(2) วงกลม $x^2 + y^2 = 9$ และจุด $P(0, -3)$

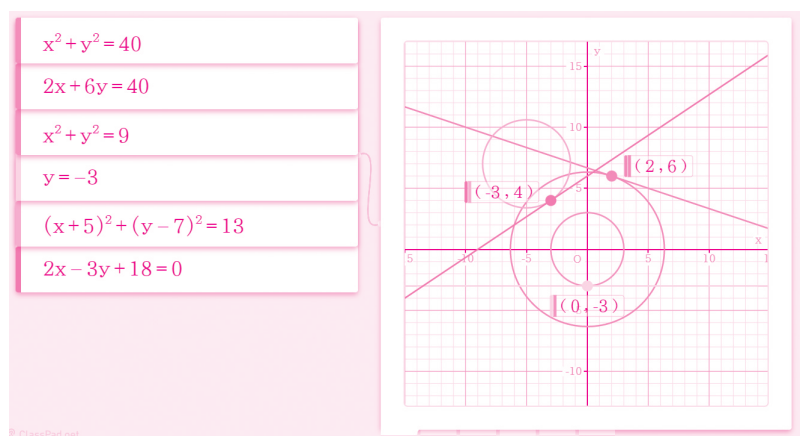
สมการเส้นสัมผัสที่เราหาได้คือ $0 \cdot x - 3y = 9$, $y = -3$

$$y = -3$$

(3) วงกลม $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 13$ และจุด $P(-3, 4)$

สมการเส้นสัมผัสที่เราหาได้คือ $(-3+5)(x+5) + (4-7)(y-7) = 13$, $2x - 3y + 18 = 0$

$$2x - 3y + 18 = 0$$



วงกลม 2 วง (1)

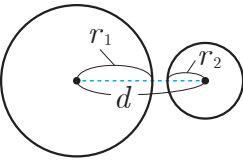
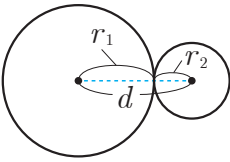
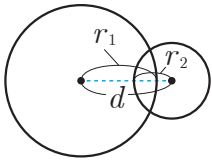
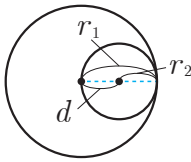
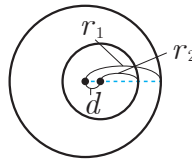
TARGET

การทำความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลม 2 วง

STUDY GUIDE

ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลม 2 วง

เราสามารถจำแนกรัศมี r_1 และ r_2 ($r_1 > r_2$) ของวงกลม 2 วงและระยะห่าง d ระหว่างจุดศูนย์กลาง 2 จุดของวงกลมได้ดังต่อไปนี้

(1) $d > r_1 + r_2$	(2) $d = r_1 + r_2$	(3) $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	(4) $d = r_1 - r_2$	(5) $d < r_1 - r_2$
วงกลมอยู่นอกวงกลมอีกรวงหนึ่ง	วงกลมสัมผัสกันภายนอก	วงกลมตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน	วงกลมสัมผัสกันภายใน	วงกลมอยู่ในวงกลมอีกรวงหนึ่ง
				

EXERCISE

1 กำหนดความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลม 2 วงด้านล่าง

(1) วงกลม $x^2 + y^2 = 9$... (i) และวงกลม $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$... (ii)

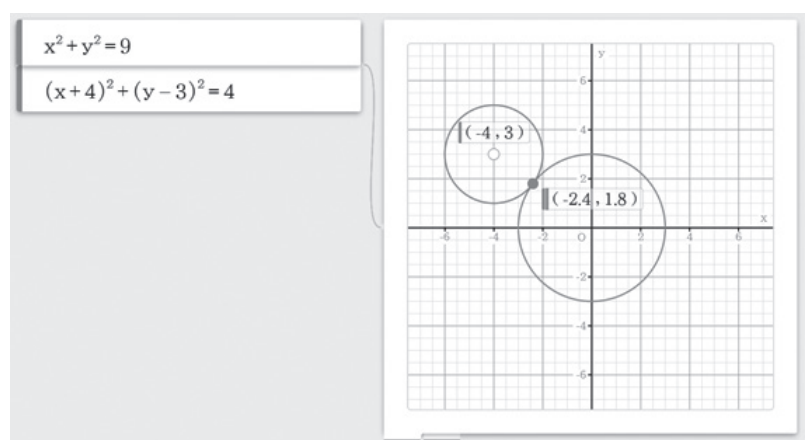
วงกลม (i) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ $r_1=3$ และวงกลม (ii) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-4, 3)$ และรัศมีคือ $r_2=2$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงคือ $d = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

ผลรวมของรัศมีวงกลม 2 เส้นคือ $r_1 + r_2 = 3 + 2 = 5$

ดังนั้น เนื่องจาก $d = r_1 + r_2$ วงกลม 2 วงจึงสัมผัสกันภายนอก

วงกลม 2 วงสัมผัสกันภายนอก



(2) วงกลม $x^2 + y^2 = 40$... (i) และวงกลม $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$... (ii)

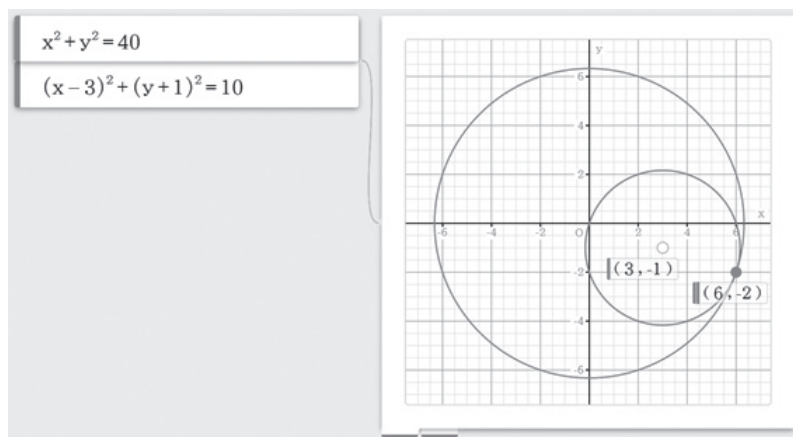
วงกลม (i) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ $r_1 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ และวงกลม (ii) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3, -1)$ และรัศมีคือ $r_2 = \sqrt{10}$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงคือ $d = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

ผลต่างของรัศมีวงกลม 2 เส้นคือ $r_1 - r_2 = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

ดังนั้น เนื่องจาก $d = r_1 - r_2$ วงกลม 2 วงจึงสัมผัสกันภายใน

วงกลม 2 วงสัมผัสกันภายใน



(3) วงกลม $x^2 + y^2 = 4$... (i) และวงกลม $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1$... (ii)

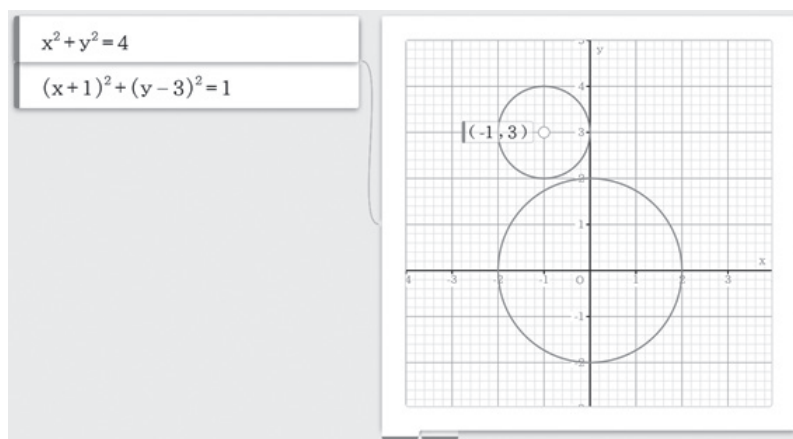
วงกลม (i) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ $r_1 = 2$ และวงกลม (ii) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1, 3)$ และรัศมีคือ $r_2 = 1$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงคือ $d = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

ผลรวมของรัศมีวงกลม 2 เส้นคือ $r_1 + r_2 = 2 + 1 = 3$

ดังนั้น เนื่องจาก $d > r_1 + r_2$ วงกลม (ii) จึงอยู่นอกวงกลม (i)

วงกลม (ii) อยู่นอกวงกลม (i)



② หาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, 6)$ และสัมผัสกันที่ภายนอกวงกลม $x^2 + y^2 = 5$

โดยให้ r_2 เป็นรัศมีวงกลมที่ต้องการหา

วงกลม $x^2 + y^2 = 5$ มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ $r_1 = \sqrt{5}$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงคือ $d = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

กำหนดให้วงกลม 2 วงสัมผัสกันภายนอก $d = r_1 + r_2$ ดังนั้นเราจะได้ $3\sqrt{5} = \sqrt{5} + r_2, r_2 = 2\sqrt{5}$

ดังนั้น เราจึงหาได้ว่าสมการวงกลมคือ $(x-3)^2 + (y-6)^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 20$$

PRACTICE

1 กำหนดความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของวงกลม 2 วงด้านล่าง

(1) วงกลม $x^2 + y^2 = 16$... (i) และวงกลม $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 1$... (ii)

วงกลม (i) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ $r_1=4$ และวงกลม (ii) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, -3)$ และรัศมีคือ $r_2=1$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงคือ $d = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

ผลรวมของรัศมีวงกลม 2 เส้นคือ $r_1+r_2=4+1=5$

ดังนั้น เนื่องจาก $d=r_1+r_2$ วงกลม 2 วงจึงสัมผัสกันภายนอก

วงกลม 2 วงสัมผัสกันภายนอก

(2) วงกลม $x^2 + y^2 = 4$... (i) และวงกลม $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$... (ii)

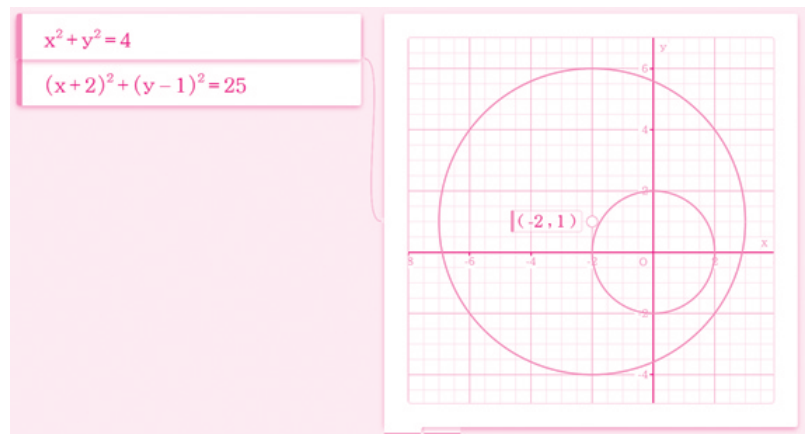
วงกลม (i) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ $r_1=2$ และวงกลม (ii) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, 1)$ และรัศมีคือ $r_2=5$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงคือ $d = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

ผลต่างของรัศมีวงกลม 2 เส้นคือ $r_2-r_1=5-2=3$

ดังนั้น เนื่องจาก $d < r_2-r_1$ วงกลม (i) จึงอยู่ด้านในวงกลม (ii)

วงกลม (i) อยู่ด้านในวงกลม (ii)



(3) วงกลม $x^2 + y^2 = 9$... (i) และวงกลม $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$... (ii)

วงกลม (i) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ $r_1=3$ และวงกลม (ii) (1, 2) และรัศมีคือ $r_2=1$

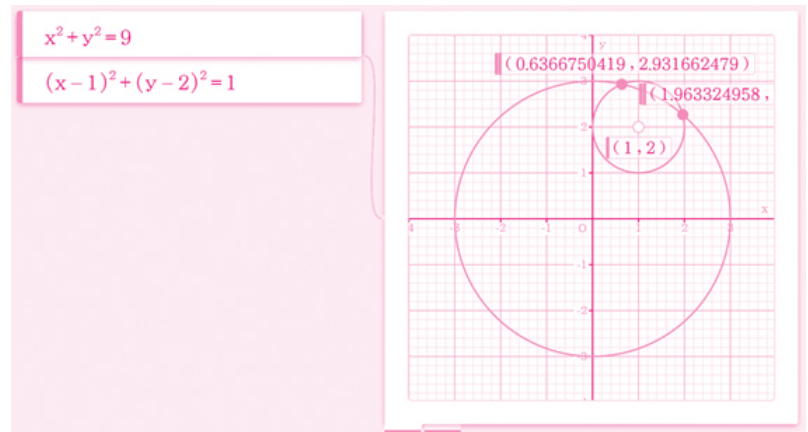
ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงคือ $d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

ผลต่างของรัศมีวงกลม 2 เส้นคือ $r_1 - r_2 = 3 - 1 = 2$

ผลรวมของรัศมีวงกลม 2 เส้นคือ $r_1 + r_2 = 3 + 1 = 4$

ดังนั้น เนื่องจาก $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ จึงตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน

วงกลม 2 วงตัดกันที่จุด 2 จุดที่ต่างกัน



② หาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, -4)$ และสัมผัสกันที่ภายนอกวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

โดยให้ r_2 เป็นรัศมีวงกลมที่ต้องการหา

วงกลม $x^2 + y^2 = 1$ มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ $r_1=1$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงคือ $d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

กำหนดให้วงกลม 2 วงสัมผัสกันภายนอก แล้ว $d = r_1 + r_2$ เราจะได้ $5 = 1 + r_2$ ดังนั้น $r_2 = 4$

ดังนั้น เราจึงหาได้ว่าสมการวงกลมคือ $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 4^2 = 16$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 16$$

วงกลม 2 วง (2)

TARGET

การทำความเข้าใจเกี่ยวกับรูปทรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง

STUDY GUIDE

วงกลมหรือเส้นที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง

เมื่อวงกลม 2 วงมีจุดร่วมกัน พิกัดของจุดร่วมคือรากของคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของระบบสมการของวงกลม 2 วง กำหนดให้วงกลม 2 วง $x^2 + y^2 + l_1x + m_1y + n_1 \dots (i)$ และ $x^2 + y^2 + l_2x + m_2y + n_2 \dots (ii)$ ซึ่งตัดกันที่จุด 2 จุด วงกลมหรือเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง (i) และ (ii) สามารถแสดงได้โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$(x^2 + y^2 + l_1x + m_1y + n_1) + k(x^2 + y^2 + l_2x + m_2y + n_2) = 0$$

(k คือค่าคงตัว)

EXERCISE

◆ แก้อิทธิเกี่ยวกับวงกลม 2 วง $x^2 + y^2 = 25 \dots (i)$ และ $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2 \dots (ii)$ ต่อไปนี้

(1) หาสมการสำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุดตัด 2 จุดของวงกลม 2 วง

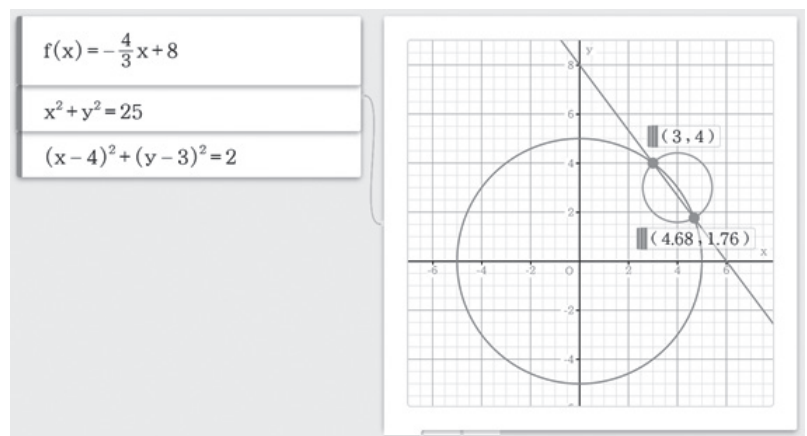
กำหนดให้ k คือค่าคงตัว แล้ว $(x^2 + y^2 - 25) + k\{(x-4)^2 + (y-3)^2 - 2\} = 0 \dots (iii)$ แสดงรูปทรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง

กำหนดให้ (iii) คือเส้นตรง และสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^2, y^2 คือ 0 แล้ว $k = -1$

แทนที่สมการนี้ในข้อ (iii) และเราสามารถเรียงใหม่ได้

$$(x^2 + y^2 - 25) - \{(x-4)^2 + (y-3)^2 - 2\} = 0, (x^2 + y^2 - 25) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23) = 0, 4x + 3y - 24 = 0$$

$$\underline{4x + 3y - 24 = 0}$$



(2) หาสมการสำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุดตัด 2 จุดของวงกลม 2 วงและจุด (3, 1)

เนื่องจาก (iii) ผ่านจุด (3, 1) และโดยการแทนที่ $x=3$ และ $y=1$ ใน (iii) เราจะได้ $-15 + k \cdot 3 = 0, k = 5$

แทนที่สมการนี้ในข้อ (iii) และเราสามารถเรียงใหม่ได้

$$(x^2 + y^2 - 25) + 5\{(x-4)^2 + (y-3)^2 - 2\} = 0, 6x^2 + 6y^2 - 40x - 30y + 90 = 0, x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x - 5y + 15 = 0$$

$$\underline{x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x - 5y + 15 = 0}$$

PRACTICE

◆ แก้อิทธิพลเกี่ยวกับวงกลม 2 วง $x^2 + y^2 = 5$... (i) และ $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$... (ii) ต่อไปนี้

(1) หาสมการสำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุดตัด 2 จุดของวงกลม 2 วง

กำหนดให้ k คือค่าคงตัว แล้ว $(x^2 + y^2 - 5) + k\{(x+2)^2 + (y+2)^2 - 9\} = 0$... (iii)

แสดงรูปทรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง

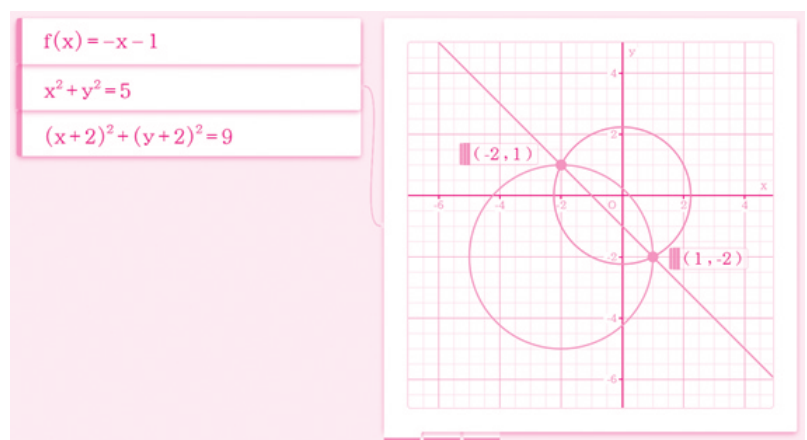
กำหนดให้ (iii) คือเส้นตรง และสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^2, y^2 คือ 0 แล้ว $k = -1$

แทนที่สมการนี้ในข้อ (iii) และเราสามารถเรียงใหม่ได้

$$(x^2 + y^2 - 5) - \{(x+2)^2 + (y+2)^2 - 9\} = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 5) - (x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1) = 0, x + y + 1 = 0$$

$$x + y + 1 = 0$$



(2) หาสมการสำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุดตัด 2 จุดของวงกลม 2 วงและจุด $(-2, -2)$

เนื่องจาก (iii) ผ่านจุด $(-2, -2)$ และโดยการแทนที่ $x = -2$ และ $y = -2$ ใน (iii) เรา

$$\text{จะได้ } 3 + k \cdot (-9) = 0, k = \frac{1}{3}$$

แทนที่สมการนี้ในข้อ (iii) และเราสามารถเรียงใหม่ได้

$$(x^2 + y^2 - 5) + \frac{1}{3} \{(x+2)^2 + (y+2)^2 - 9\} = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y - 16 = 0, x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$$

โลเคและสมการ (1)

TARGET

การทำความเข้าใจโลเคและวิธีหาโลเค

STUDY GUIDE

โลเค

เซตของจุดทั้งหมดที่ตรงกับเงื่อนไขอย่างใดอย่างหนึ่งเพื่อกำหนดรูปร่างจะเรียกว่า **โลเค** ของจุดที่ตรงกับเงื่อนไขเหล่านั้น เราใช้ขั้นตอนต่อไปนี้เพื่อหาโลเค

- (1) แสดงเงื่อนไขสำหรับจุด P ในสูตรสำหรับ x และ y โดยที่พิกัดของจุด P ที่ตรงกับเงื่อนไขก็คือ (x, y)
- (2) หารูปทรงที่แสดงโดยสูตรในข้อ (1)
- (3) ยืนยันว่าจุด P บนรูปทรงที่หาได้นั้นตรงกับเงื่อนไขที่กำหนด

EXERCISE

- ◆ หาโลเคของจุด P ที่มีระยะห่างเท่ากันจากจุด 2 จุด A(-1, 2) และ B(3, -4)

โดยให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุด P

เนื่องจากจุด P มีระยะห่างเท่ากันจากจุด 2 จุด A และ B เราจึงทราบว่า $AP=BP$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $AP^2 = BP^2 \dots(i)$

$$AP^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$$

$$BP^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25$$

โดยการแทนที่สมการนี้ใน (i) เราจะได้

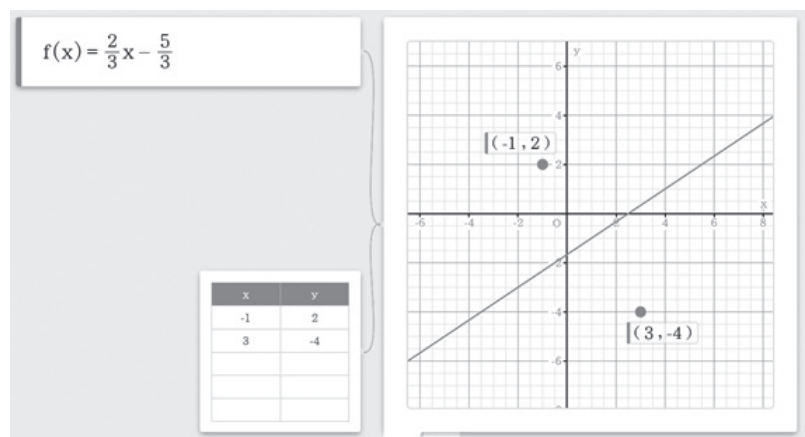
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25, 8x - 12y - 20 = 0, 2x - 3y - 5 = 0$$

ดังนั้น จุด P จึงอยู่บนเส้น $2x-3y-5=0 \dots(ii)$

ในทางกลับกัน จุด P(x, y) บนเส้น (ii) นั้นตรงกับเงื่อนไข

ดังนั้น โลเคของจุด P คือเส้น $2x-3y-5=0$

เส้น $2x-3y-5=0$



PRACTICE

- ◆ หาโลโคของจุด P ที่มีระยะห่างเท่ากันจากจุด 2 จุด A $(-2, -3)$ และ B $(1, 4)$

โดยให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุด P

เนื่องจากจุด P มีระยะห่างเท่ากันจากจุด 2 จุด A และ B เราจึงทราบว่า $AP=BP$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $AP^2 = BP^2 \dots(i)$

$$AP^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13$$

$$BP^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 8y + 17$$

โดยการแทนที่สมการนี้ใน (i) เราจะได้

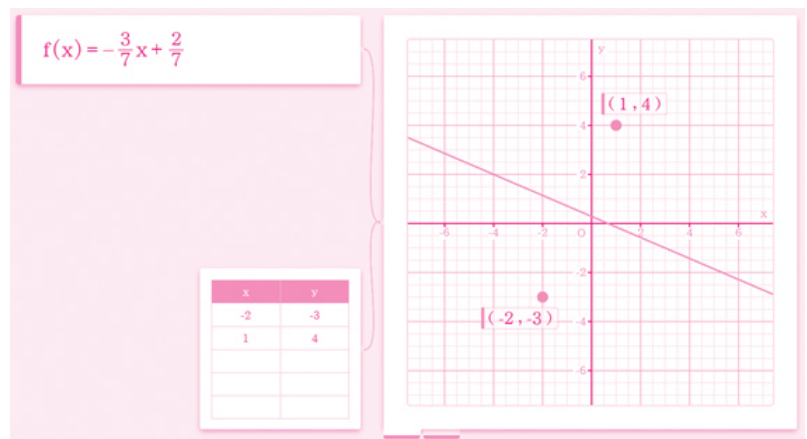
$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = x^2 + y^2 - 2x - 8y + 17, 6x + 14y - 4 = 0, 3x + 7y - 2 = 0$$

ดังนั้น จุด P จึงอยู่บนเส้น $3x+7y-2=0 \dots(ii)$

ในทางกลับกัน จุด P (x, y) บนเส้น (ii) นั้นตรงกับเงื่อนไข

ดังนั้น โลโคของจุด P คือเส้น $3x+7y-2=0$

เส้น $3x+7y-2=0$



โลเคและสมการ (2)

TARGET

การทำความเข้าใจโลเคของจุดที่สัมพันธ์กับจุดขยับ

STUDY GUIDE

วิธีหาโลเคของจุดขยับ

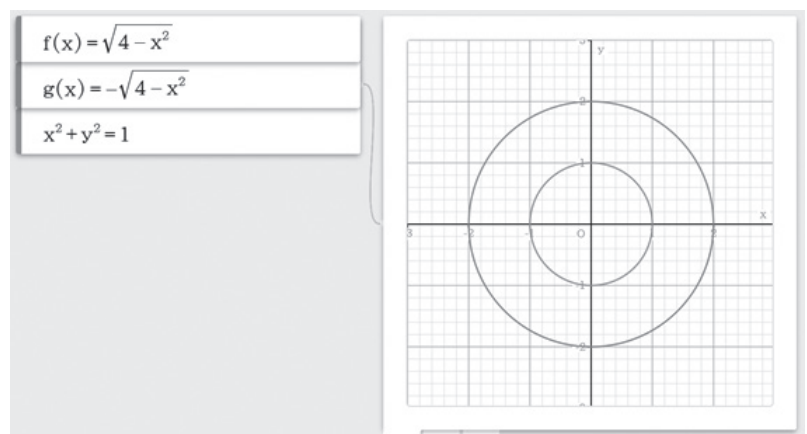
เราใช้ขั้นตอนต่อไปนี้อย่างต่อเนื่องเพื่อหาโลเคของจุดขยับ

- (1) ใช้ s และ t เพื่อแสดงเงื่อนไขสำหรับจุดขยับ $Q(s, t)$
- (2) หาโลเคของจุด $P(x, y)$ โดยการแสดง s และ t ในสูตรของ x และ y ที่สัมพันธ์กับ P และ Q
- (3) ตัด s และ t ออกจากนิพจน์ในข้อ (1) และ (2) เพื่อหานิพจน์เชิงสัมพันธ์ของ x และ y
- (4) หารูปทรงที่แสดงโดยสมการในข้อ (3)
- (5) ในทางกลับกัน ให้ยืนยันว่าจุด P บนรูปทรงนั้นตรงกับเงื่อนไขที่กำหนด

EXERCISE

- 1 กำหนดให้จุด Q ขยับบนวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ จงหาโลเคของจุดกึ่งกลาง P ของส่วนของเส้นตรง OQ ที่ต่อกับจุดกำเนิด O และจุด Q
- โดยให้พิกัดของจุด Q เป็น (s, t) และเนื่องจากจุด Q อยู่บน $x^2 + y^2 = 4$ เราจึงได้ $s^2 + t^2 = 4 \dots(i)$
- โดยให้พิกัดของจุด P เป็น (x, y) และเนื่องจากจุด P คือจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง OQ เราจึงได้ $x = \frac{s}{2}, y = \frac{t}{2}$
- โดยเฉพาะ $s=2x, t=2y \dots(ii)$
- แทนที่ (ii) ใน (i) สำหรับ $(2x)^2 + (2y)^2 = 4, 4x^2 + 4y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$
- ดังนั้น จุด P จึงอยู่บนวงกลม $x^2 + y^2 = 1 \dots(iii)$
- ในทางกลับกัน จุด $P(x, y)$ บนวงกลม (iii) นั้นตรงกับเงื่อนไข
- ดังนั้น โลเคของจุด P คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ 1

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีคือ 1



- ② กำหนดให้ค่าของจำนวนจริง a มีการเปลี่ยนแปลง จงหาโลเคของจุดยอดของพาราโบลา

$$y = x^2 - 2ax + 3a^2 + 4a - 1$$

เพื่อหาพิกัดของจุดยอดของพาราโบลา ต้องทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์เพื่อแปลงสมการ

$$y = (x - a)^2 - a^2 + 3a^2 + 4a - 1 = (x - a)^2 + 2a^2 + 4a - 1$$

โดยให้พิกัดจุดยอดของพาราโบลาเป็น $P(x, y)$ ซึ่งจะได้ $x = a \dots (i)$ และ $y = 2a^2 + 4a - 1 \dots (ii)$

แทนที่ (i) ใน (ii) สำหรับ $y = 2x^2 + 4x - 1$

ดังนั้น จุด P จึงอยู่บนพาราโบลา $y = 2x^2 + 4x - 1 \dots (iii)$

ในทางกลับกัน จุด $P(x, y)$ บนพาราโบลา (iii) นั้นตรงกับเงื่อนไข

ดังนั้น โลเคของจุด P คือพาราโบลา $y = 2x^2 + 4x - 1$

พาราโบลา $y = 2x^2 + 4x - 1$

PRACTICE

- ① กำหนดให้จุด Q ขยับบนวงกลม $x^2 + y^2 = 16$ จงหาโลเคของจุดกึ่งกลาง P ของส่วนของเส้นตรง AQ ที่ต่อกับจุด $A(6, 0)$ และจุด Q

โดยให้พิกัดของจุด Q เป็น (s, t) และเนื่องจากจุด Q อยู่บน $x^2 + y^2 = 16$

เราจึงได้ $s^2 + t^2 = 16 \dots (i)$

โดยให้พิกัดของจุด P เป็น (x, y) และเนื่องจาก P คือจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้น

ตรง AQ เราจะได้ $x = \frac{s+6}{2}, y = \frac{t}{2}$

โดยเฉพาะ $s = 2x - 6$ และ $t = 2y \dots (ii)$

แทนที่ (ii) ลงใน (i) สำหรับ

$$(2x - 6)^2 + (2y)^2 = 16, 4(x - 3)^2 + 4y^2 = 16, (x - 3)^2 + y^2 = 4$$

ดังนั้น จุด P จึงอยู่บนวงกลม $(x - 3)^2 + y^2 = 4 \dots (iii)$

ในทางกลับกัน จุด $P(x, y)$ บนวงกลม (iii) นั้นตรงกับเงื่อนไข

ดังนั้น โลเคของจุด P คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, 0)$ และรัศมีคือ 2

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3, 0)$ และรัศมีคือ 2

- ② กำหนดให้ค่าของจำนวนจริง a มีการเปลี่ยนแปลง จงหาโลเคของจุดยอดของพาราโบลา

$$y = x^2 - 4ax + 8a^2 - 4a + 3$$

เพื่อหาพิกัดของจุดยอดของพาราโบลา ต้องทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์เพื่อแปลงสมการ

$$y = (x - 2a)^2 - 4a^2 + 8a^2 - 4a + 3 = (x - 2a)^2 + 4a^2 - 4a + 3$$

โดยให้พิกัดจุดยอดของพาราโบลาเป็น $P(x, y)$ ซึ่งจะได้ $x = 2a \dots (i)$

และ $y = 4a^2 - 4a + 3 \dots (ii)$

แทนที่ (i) ใน (ii) สำหรับ $y = x^2 - 2x + 3$

ดังนั้น จุด P จึงอยู่บนพาราโบลา $y = x^2 - 2x + 3 \dots (iii)$

ในทางกลับกัน จุด $P(x, y)$ บนพาราโบลา (iii) นั้นตรงกับเงื่อนไข

ดังนั้น โลเคของจุด P คือพาราโบลา $y = x^2 - 2x + 3$

พาราโบลา $y = x^2 - 2x + 3$

โดเมนที่แสดงโดยอสมการ (1)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับโดเมนที่กำหนดขอบเขตโดยเส้นตรงและวงกลม

STUDY GUIDE

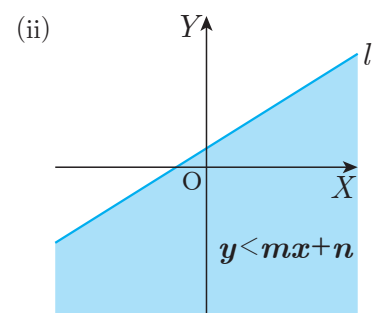
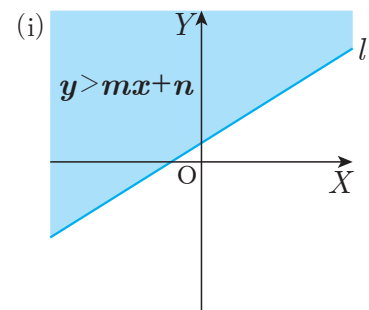
เส้นตรง วงกลม และโดเมน

เมื่อเซตของจุดตรงกับเงื่อนไขอย่างใดอย่างหนึ่งบนระนาบ เราเรียกเซตดังกล่าวว่า **โดเมน** นอกจากนี้ ขอบเขตระหว่างโดเมนและส่วนอื่น ๆ เรียกว่า **เส้นขอบเขต**

เส้นตรงและโดเมน

หากเรากำหนดให้เส้นตรง $y = mx + n$ เป็น l แล้วสำหรับโดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y > mx + n$ และ $y < mx + n$ เราสามารถหารายการต่อไปนี้ได้

- (i) **โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y > mx + n$**
→ **ด้านบนเส้นตรง l**
- (ii) **โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y < mx + n$**
→ **ด้านล่างเส้นตรง l**



ในทั้งสองโดเมน (i) และ (ii) เส้นขอบเขตคือเส้นตรง l และเมื่อเรารวมเครื่องหมายเท่ากับใน $y \geq mx + n$ เราจึงสามารถรวมจุดบนเส้นตรง l ได้

วงกลมและโดเมน

หากเรากำหนดให้วงกลม $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ เป็น C แล้วสำหรับโดเมนที่แสดงโดยอสมการ $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ เราสามารถหารายการต่อไปนี้ได้

- (i) **โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$** → **ด้านในวงกลม C**
- (ii) **โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$** → **ด้านนอกวงกลม C**

ในทั้งสองโดเมน (i) และ (ii) เส้นขอบเขตคือวงกลม C และเมื่อเรารวมเครื่องหมายเท่ากับใน $(x - a)^2 + (y - b)^2 \geq r^2$ เราจึงสามารถรวมจุดบนวงกลม C ได้

EXERCISE

① วาดโดเมนที่แสดงโดยอสมการต่อไปนี้ นอกจากนี้ ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่

(1) อสมการ $2x + y - 3 > 0$

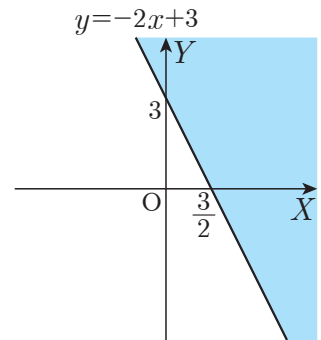
โดยการแปลงอสมการ เราจะได้ $y > -2x + 3$

ดังนั้น โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้จึงอยู่ทางด้านบนเส้น $y = -2x + 3$ ซึ่งก็คือ

พื้นที่เรขาคณิตในรูปภาพด้านขวา

อย่างไรก็ตาม ไม่รวมเส้นขอบเขต

ไม่รวมเส้นขอบเขต



(2) อสมการ $-3x + y + 2 \leq 0$

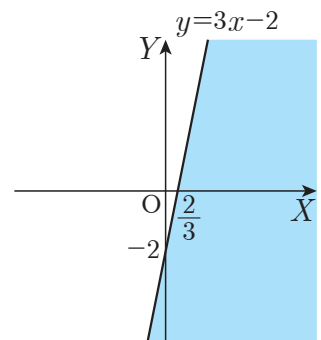
โดยการแปลงอสมการ เราจะได้ $y \leq 3x - 2$

ดังนั้น โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้จึงอยู่ด้านล่างของเส้น $y = 3x - 2$ ซึ่งก็คือ

พื้นที่เรขาคณิตในรูปภาพด้านขวา

อย่างไรก็ตาม รวมเส้นขอบเขต

รวมเส้นขอบเขต



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันตารางเพื่อตรวจสอบว่าจุดในโดเมนนั้นเป็นอสมการหรือไม่

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด 2nd เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = -2x + 3$ แล้ว ให้กด EXE

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 3x - 2$

กด 2nd เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

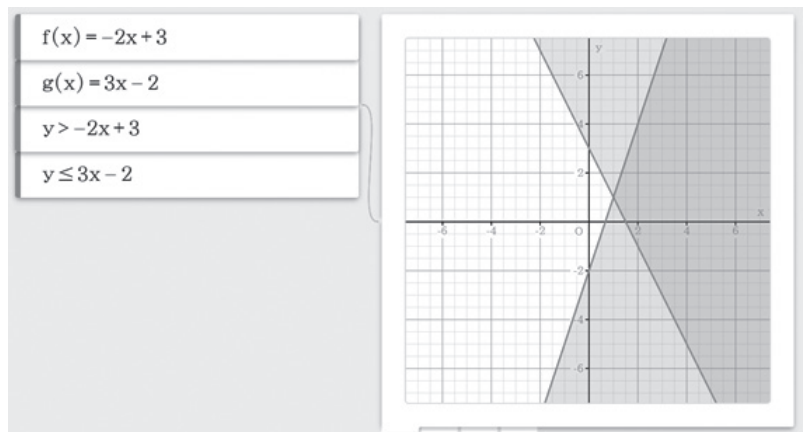
หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -3, End (สิ้นสุด): 4, Step (ขั้น): 1] แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด F1 X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ ให้แต่ละแผ่นงานฟังก์ชัน และป้อน $y > -2x + 3$ และ $y \leq 3x - 2$ ตามลำดับ

x	$f(x)$	$g(x)$
1	-1	-1
2	-3	4
3	-5	7
4	-7	10

x	$f(x)$	$g(x)$
5	-9	13
6	-11	16
7	-13	19
8	-15	22



2 แก้อิทธิยเกี่ยวกับโดเมนที่แสดงโดยสมการ $x^2 + y^2 > 16$ ต่อไปนี้

(1) กำหนดว่าจุด 2 จุด A($\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$) และ B(3, 3) นั้นเป็นจุดในโดเมนตามลำดับหรือไม่

จุด A($\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$) จาก $(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{10})^2 = 5 + 10 = 15 < 16$ ไม่ตรงกับ $x^2 + y^2 > 16$ ดังนั้นจึงไม่ใช่จุดในโดเมน

จุด B(3, 3) จาก $3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18 > 16$ ตรงกับ $x^2 + y^2 > 16$ ดังนั้นจึงเป็นจุดในโดเมน

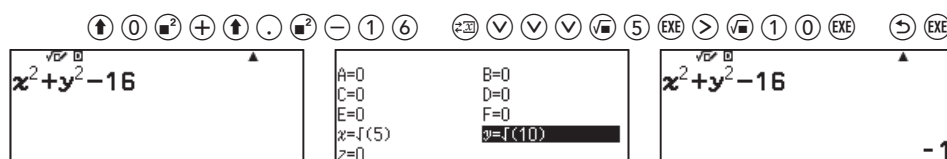
จุด A ไม่อยู่ในโดเมน และจุด B อยู่ในโดเมน

check

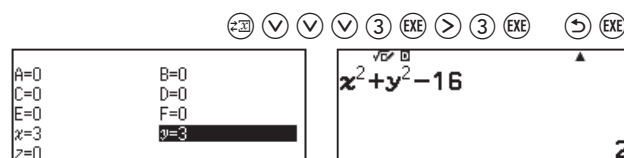
บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันตัวแปรเพื่อตรวจสอบว่าจุด 2 จุด A และ B เป็นสมการหรือไม่

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$

หลังจากป้อน $x^2 + y^2 - 16$ แล้ว ให้ป้อนพิกัดสำหรับจุด A แล้วคำนวณ



ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อนพิกัดของจุด B แล้วคำนวณ



OTHER METHODS

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันตารางเพื่อตรวจสอบแผนภาพของวงกลม

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด $\odot$

เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด $\odot$

หลังจากป้อน $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ แล้ว ให้กด $\odot$

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -\sqrt{16 - x^2}$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-5, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$

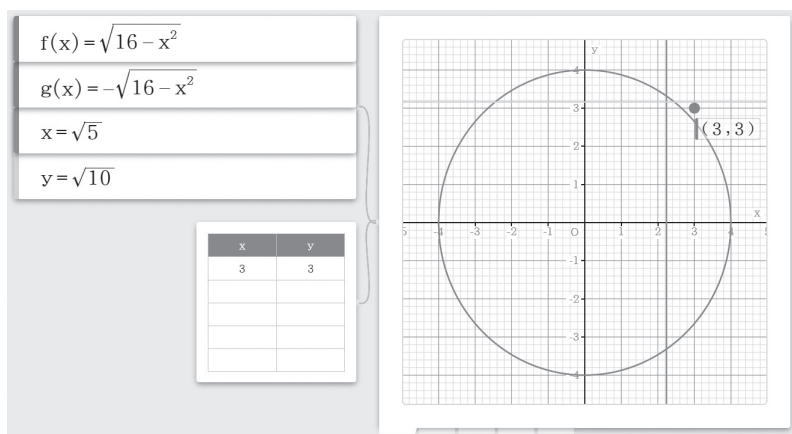
กด $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ ให้แต่ละแผ่นงานฟังก์ชัน และป้อน $x = \sqrt{5}$ และ $y = \sqrt{10}$ ตามลำดับ
ขั้นตอนสุดท้าย ให้เพิ่มแผ่นงานพิกัด และป้อน (3, 3)

	%	f(x)	g(x)
1	-5	ERROR	ERROR
2	-4	0	0
3	-3	2.6457	-2.645
4	-2	3.4641	-3.464

	%	f(x)	g(x)
5	-1	3.8729	-3.872
6	0	4	-4
7	1	3.8729	-3.872
8	2	3.4641	-3.464

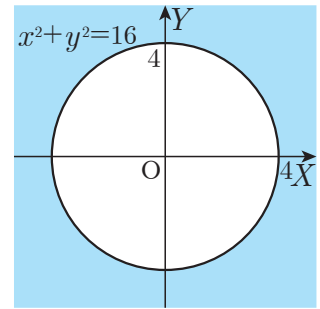
	%	f(x)	g(x)
9	3	2.6457	-2.645
10	4	0	0
11	5	ERROR	ERROR
12			



(2) วาดโดเมน นอกจากนี้ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่

โดเมนคือพื้นที่นอกวงกลม $x^2 + y^2 = 16$ ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาในรูปภาพด้านขวา
อย่างไรก็ตาม ไม่รวมเส้นขอบเขต

ไม่รวมเส้นขอบเขต



③ แก้อิทธิพลเกี่ยวกับโดเมนที่แสดงโดยอสมการ $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0$ ต่อไปนี้

(1) กำหนดว่าจุด 2 จุด A(2, 2) และ B(3, 3) นั้นเป็นจุดในโดเมนตามลำดับหรือไม่

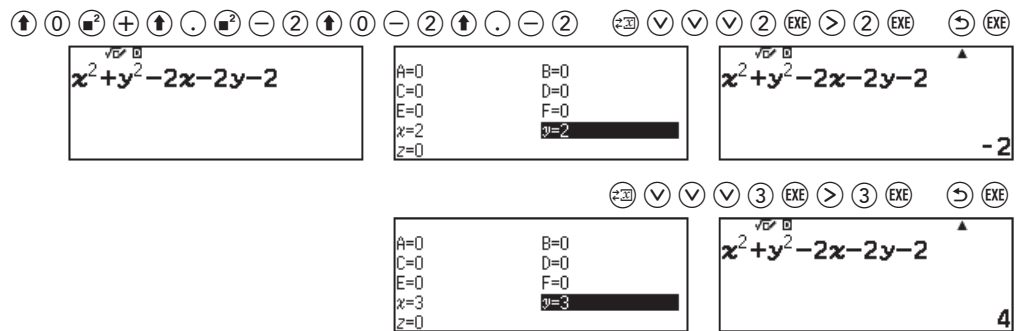
จุด A(2, 2) จาก $2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 = -2 < 0$ ตรงกับ $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0$ ดังนั้นจึงเป็นจุดในโดเมน

จุด B(3, 3) จาก $3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 4 > 0$ ไม่ตรงกับ $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0$ ดังนั้นจึงไม่ใช่จุดในโดเมน

จุด A อยู่ในโดเมน และจุด B ไม่อยู่ในโดเมน

check

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$



(2) วาดโดเมน นอกจากนี้ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่

แปลงด้านซ้ายของอสมการ

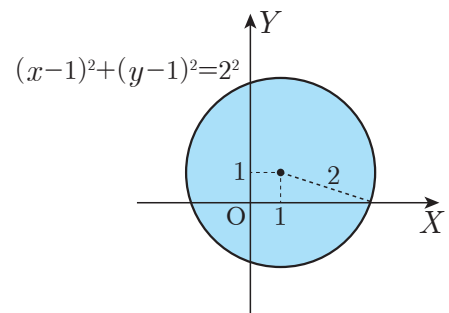
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 2$$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2^2$$

ดังนั้น โดเมนคือพื้นที่ในวงกลม $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาในรูปภาพด้านขวา

อย่างไรก็ตาม รวมเส้นขอบเขต



รวมเส้นขอบเขต

PRACTICE

1 วาดโดเมนที่แสดงโดยอสมการต่อไปนี้ นอกจากนี้ ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่

(1) อสมการ $2x-3y+6\leq 0$

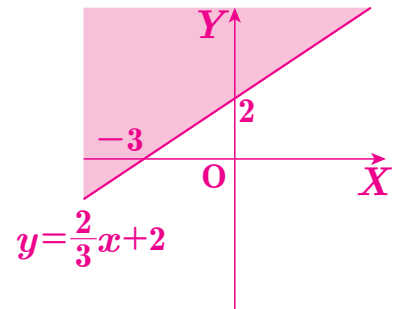
โดยการแปลงสมการ เราจะได้ $y \geq \frac{2}{3}x + 2$

ดังนั้น โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้จึงอยู่ที่ด้านบน

เส้น $y = \frac{2}{3}x + 2$ ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาในรูปทางด้านขวา

อย่างไรก็ตาม รวมเส้นขอบเขต

รวมเส้นขอบเขต



(2) อสมการ $x+y-4<0$

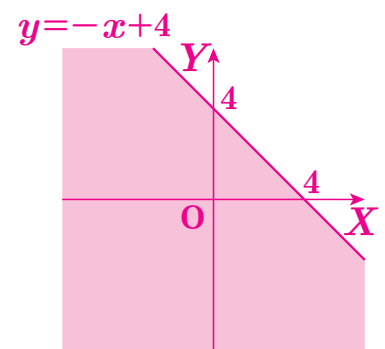
โดยการแปลงอสมการ เราจะได้ $y < -x+4$

ดังนั้น โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้จึงอยู่ที่ด้านล่างของ

เส้น $y = -x+4$ ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาในรูปทางด้านขวา

อย่างไรก็ตาม ไม่รวมเส้นขอบเขต

ไม่รวมเส้นขอบเขต



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด $\odot$

เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด $\odot$

หลังจากป้อน $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ แล้ว ให้กด $\odot$

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -x + 4$

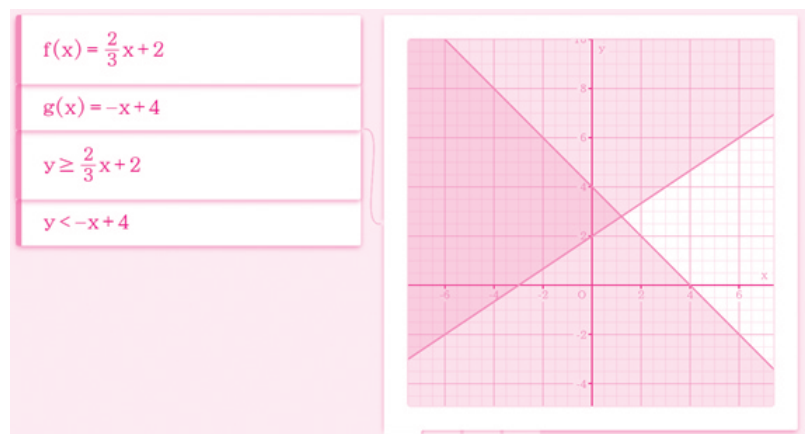
กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -5, End (สิ้นสุด): 5, Step (ขั้น): 1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ ให้แต่ละแผ่นงานฟังก์ชัน และป้อน $y \geq \frac{2}{3}x + 2$ และ $y < -x + 4$ ตามลำดับ



๒ แก้อายุเกี่ยวกับโดเมนที่แสดงโดยอสมการ $x^2 + y^2 \leq 36$ ต่อไปนี้

(1) กำหนดว่าจุด 2 จุด A(3, 5) และ B(5, 4) นั้นเป็นจุดในโดเมนตามลำดับหรือไม่

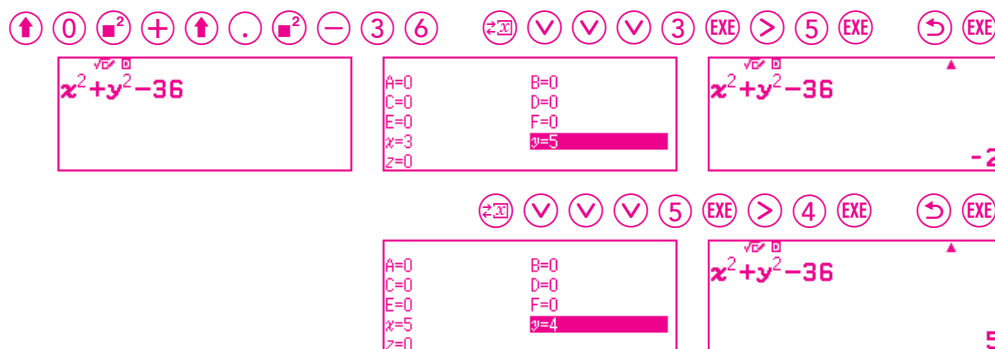
จุด A(3, 5) จาก $3^2 + 5^2 = 34 < 36$ ตรงกับ $x^2 + y^2 \leq 36$ ดังนั้นจึงเป็นจุดในโดเมน

จุด B(5, 4) จาก $5^2 + 4^2 = 41 > 36$ ไม่ตรงกับ $x^2 + y^2 \leq 36$ ดังนั้นจึงไม่ใช่จุดในโดเมน

จุด A อยู่ในโดเมน และจุด B ไม่อยู่ในโดเมน

check

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$



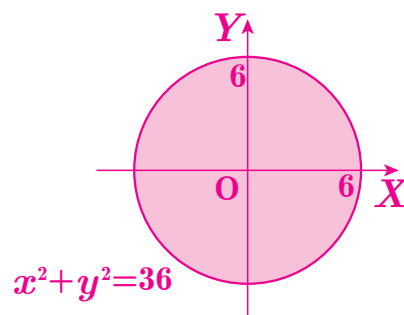
(2) วาดโดเมน นอกจากนี้ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่

โดเมนคือพื้นที่ในวงกลม $x^2 + y^2 = 36$ ซึ่งก็คือ

พื้นที่แรเงาในรูปภาพด้านขวา

อย่างไรก็ตาม รวมเส้นขอบเขต

รวมเส้นขอบเขต



③ แก้อสมการเกี่ยวกับโดเมนที่แสดงโดยอสมการ $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 > 0$ ต่อไปนี้

(1) กำหนดว่าจุด 2 จุด A(-4, -2) และ B(2, 1) นั้นเป็นจุดในโดเมนตามลำดับหรือไม่

จุด A(-4, -2) จาก $(-4)^2 + (-2)^2 + 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) - 4 = -4 < 0$ ไม่ตรงกับ $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 > 0$ ดังนั้นจึงไม่ใช่จุดในโดเมน

จุด B(2, 1) จาก $2^2 + 1^2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 4 = 11 > 0$ ตรงกับ $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 > 0$ ดังนั้นจึงเป็นจุดในโดเมน

จุด A ไม่อยู่ในโดเมน และจุด B อยู่ในโดเมน

$\uparrow$ 0 $\square^2$ + $\uparrow$. $\square^2$ + 4 $\uparrow$ 0 + 2 $\uparrow$. - 4	$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4$
$\pm \frac{\square}{\square}$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ - 4 EXE > - 2 EXE $\rightarrow$ EXE	A=0 B=0 C=0 D=0 E=0 F=0 X=-4 Y=-2 Z=0 $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4$ -4
$\pm \frac{\square}{\square}$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ 2 EXE > 1 EXE $\rightarrow$ EXE	A=0 B=0 C=0 D=0 E=0 F=0 X=2 Y=1 Z=0 $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4$ 11

(2) วาดโดเมน นอกจากนี้ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่

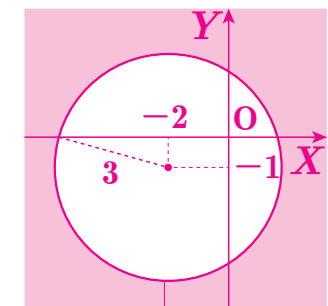
แปลงด้านซ้ายของอสมการ

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 \\
 &= (x + 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 - 4 \\
 &= (x + 2)^2 + (y + 1)^2 - 3^2
 \end{aligned}$$

ดังนั้น โดเมนคือพื้นที่นอกวงกลม $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$

ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาในรูปทางด้านขวา

อย่างไรก็ตามไม่รวมเส้นขอบเขต



$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

ไม่รวมเส้นขอบเขต

โดเมนที่แสดงโดยอสมการ (2)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับโดเมนที่แสดงโดยระบบอสมการ

STUDY GUIDE

โดเมนที่แสดงโดยระบบอสมการ

เซตของจุดที่ตรงกับระบบอสมการเรียกว่าโดเมนที่แสดงโดยระบบอสมการ

สำหรับระบบอสมการ $\begin{cases} \text{อสมการ (i)} \\ \text{อสมการ (ii)} \end{cases}$ หากเรากำหนดให้ A เป็นโดเมนที่แสดงโดยอสมการ (i) และ B เป็นโดเมนที่แสดงโดยอสมการ (ii) แล้วโดเมนที่แสดงโดยระบบอสมการนั้นมีดังต่อไปนี้

ส่วนร่วมของ A และ B $A \cap B$

EXERCISE

- ◆ วาดโดเมนที่แสดงโดยระบบอสมการต่อไปนี้ นอกจากนี้ ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่

(1) $\begin{cases} y > x - 2 \\ y > -x + 2 \end{cases}$

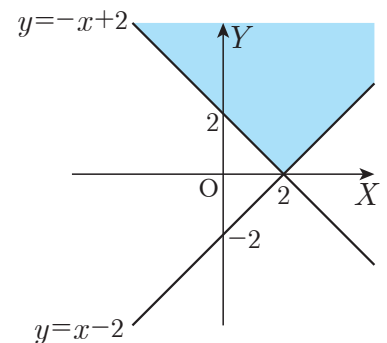
โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y > x - 2$ อยู่ทางด้านบนเส้น $y = x - 2$

โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y > -x + 2$ อยู่ทางด้านบนเส้น $y = -x + 2$

ส่วนร่วมของโดเมนนี้ก็คือพื้นที่แรเงาในรูปภาพด้านขวา

อย่างไรก็ตาม ไม่รวมเส้นขอบเขต

ไม่รวมเส้นขอบเขต



(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x - y + 2 > 0 \end{cases}$

โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $x^2 + y^2 < 9$ อยู่ในวงกลม $x^2 + y^2 = 9$

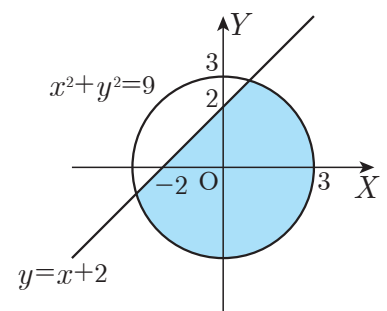
โดยการแปลงอสมการ $x - y + 2 > 0$ เราจะได้ $y < x + 2$

โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้อยู่ที่ด้านล่างเส้น $y = x + 2$

ส่วนร่วมของโดเมนนี้ก็คือพื้นที่แรเงาในรูปภาพด้านขวา

อย่างไรก็ตาม ไม่รวมเส้นขอบเขต

ไม่รวมเส้นขอบเขต



PRACTICE

- 1 วาดโดเมนที่แสดงโดยระบบอสมการต่อไปนี้ นอกจากนี้ ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่

$$(1) \begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ x-y-4 \geq 0 \end{cases}$$

โดยการแปลงอสมการ $x+y-2 \geq 0$ เราจะได้ $y \geq -x+2$

โดเมนที่แสดงโดยอสมการอยู่ที่ด้านบนเส้น

$$y = -x+2$$

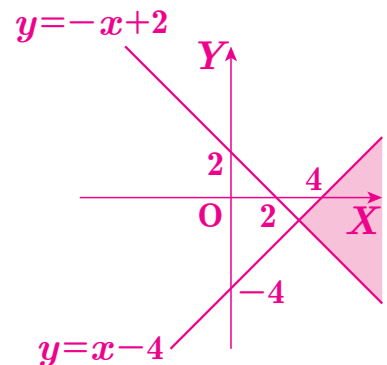
โดยการแปลงอสมการ $x-y-4 \geq 0$ เราจะได้ $y \leq x-4$

โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้อยู่ที่ด้านล่างเส้น

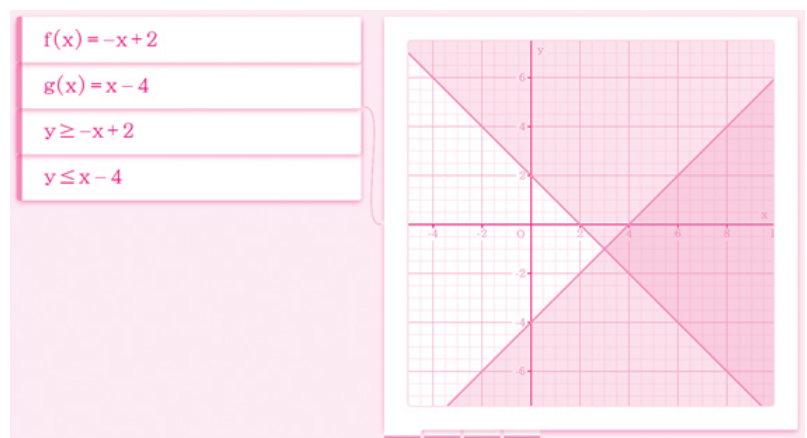
$$y = x-4$$

ส่วนร่วมของโดเมนนี้ก็คือพื้นที่แรเงาในรูปภาพด้าน
ขวา

อย่างไรก็ตาม รวมเส้นขอบเขต



รวมเส้นขอบเขต



$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ 2x+y-2 \leq 0 \end{cases}$$

โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $x^2 + y^2 \geq 4$ อยู่นอก

วงกลม $x^2 + y^2 = 4$

โดยการแปลงอสมการ $2x+y-2 \leq 0$ เราจะได้

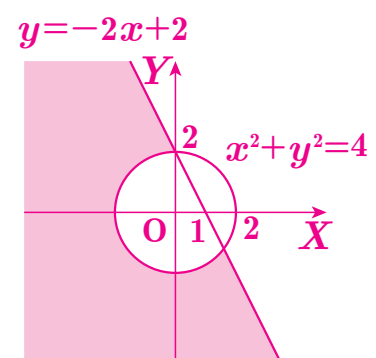
$$y \leq -2x+2$$

โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้อยู่ที่ด้านล่างเส้น

$$y = -2x+2$$

ส่วนร่วมของโดเมนนี้ก็คือพื้นที่แรเงาในรูปภาพด้าน
ขวา

อย่างไรก็ตาม รวมเส้นขอบเขต



รวมเส้นขอบเขต

② แก่โจทย์เกี่ยวกับระบบสมการ
$$\begin{cases} x-2y \leq 0 \\ x+2y-8 \leq 0 \\ 3x-2y \geq 0 \end{cases}$$
 ต่อไปนี้

(1) วาดโดเมนที่แสดงโดยระบบสมการ

โดยการแปลงสมการ $x-2y \leq 0$ เราจะได้ $y \geq \frac{1}{2}x$

โดเมนที่แสดงโดยสมการนี้อยู่ด้านบนเส้น $y = \frac{1}{2}x \dots (i)$

โดยการแปลงสมการ $x+2y-8 \leq 0$ เราจะได้ $y \leq -\frac{1}{2}x + 4$

โดเมนที่แสดงโดยสมการนี้อยู่ด้านล่างเส้น $y = -\frac{1}{2}x + 4 \dots (ii)$

โดยการแปลงสมการ $3x-2y \geq 0$ เราจะได้ $y \leq \frac{3}{2}x$

โดเมนที่แสดงโดยสมการนี้อยู่ด้านล่างเส้น $y = \frac{3}{2}x \dots (iii)$

ส่วนร่วมของโดเมนนี้ก็คือพื้นที่แรเงาในรูปภาพด้านขวา

อย่างไรก็ตาม รวมเส้นขอบเขต

สำหรับจุดตัด เราสามารถแก้โจทย์ข้อ (i) และ

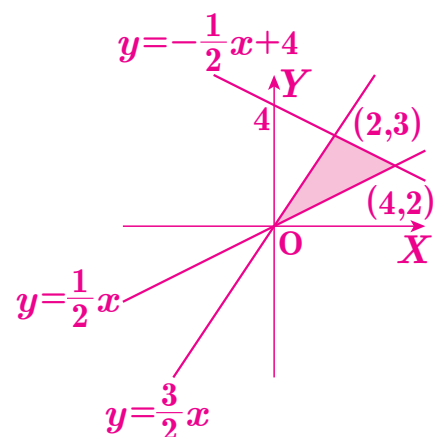
(ii) ต่อเนื่องกันเพื่อจะได้ $(4, 2)$

โดยการแก้โจทย์ข้อ (ii) และ (iii) ต่อเนื่องกัน

เราจะได้ $(2, 3)$

จุดตัดของ (i) และ (iii) คือจุดกำเนิด

รวมเส้นขอบเขต



(2) หาพื้นที่ของโดเมนที่ได้จากข้อ (1)

เนื่องจากจุดตัดของเส้น (ii) คือ 4 และจุดตัดของแกน x คือ 8 พื้นที่ที่เราหาได้

คือ
$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 4$$

check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = \frac{1}{2}x$ แล้ว ให้กด EXE

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -5, End (สิ้นสุด): 5, Step (ขั้น): 1]

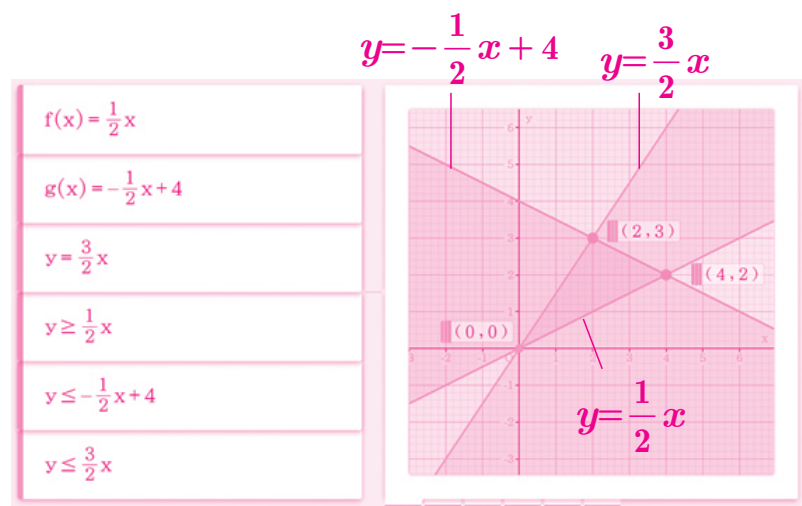
แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

นอกจากนี้ ให้แต่ละแผ่นงานฟังก์ชัน และป้อน $y = \frac{3}{2}x$, $y \geq \frac{1}{2}x$, $y \leq -\frac{1}{2}x + 4$

และ $y \leq \frac{3}{2}x$ ตามลำดับ

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้แต่ละแผ่นงานกราฟ แล้วแสดงพิกัดจุดตัดของเส้น



โดเมนที่แสดงโดยอสมการ (3)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับค่าสูงสุด/ค่าต่ำสุดในโดเมนที่แสดงโดยอสมการ

STUDY GUIDE

วิธีหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดโดยใช้โดเมน

เมื่อจุด (x, y) อยู่ในโดเมนที่ตรงกับระบบอสมการ เราสามารถหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของนิพจน์ $P(x, y)$ ที่กำหนดโดย x และ y ได้โดยใช้โดเมนต่อไปนี้

- (1) วาดโดเมน D ที่แสดงโดยระบบอสมการ
- (2) สมมติว่า $P(x, y) = k$ แล้วกำหนดพิสัยของค่าที่น่าจะเป็นของ k โดยที่กราฟของ $P(x, y) = k$ และโดเมน D มีจุดตัด

EXERCISE

◆ กำหนดให้ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 6$ และ $x + 2y \leq 6$ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

- (1) วาดโดเมนที่ตรงกับ 4 อสมการ

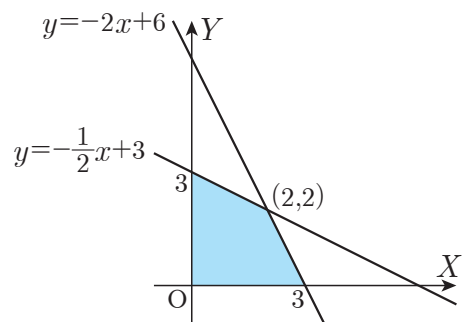
โดยให้ D เป็นโดเมนที่ตรงกับ 4 อสมการที่กำหนดไว้

โดยการแปลงอสมการ $2x + y \leq 6$ เราจะได้ $y \leq -2x + 6$... (i)

โดยการแปลงอสมการ $x + 2y \leq 6$ เราจะได้ $y \leq -\frac{1}{2}x + 3$... (ii)

สำหรับจุดตัดของเส้นขอบเขต (i) และ (ii)

$$\text{จงแก้ } \begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \text{ เพื่อจะได้ } (x, y) = (2, 2)$$



โดเมน D อยู่ด้านในและเส้นขอบของสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอด 4 จุดที่ $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ และ $(2, 2)$ ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาในรูปทางด้านขวา

- (2) หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $x + y$

สมมติว่า $x + y = k$ แล้วแปลงให้เป็น $y = -x + k$

สำหรับเส้นที่มีความชัน -1 และจุดตัดแกน Y ที่ k

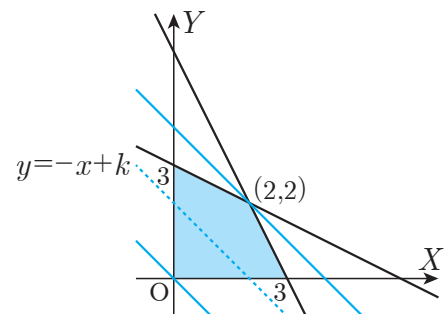
หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสำหรับ k โดยที่เส้นมีจุดร่วมกับโดเมน D

จากรูปภาพด้านขวา เราจะเห็นว่าค่าของ k เป็นค่าสูงสุดเนื่องจาก

ผ่านจุด $(2, 2)$ และเป็นค่าต่ำสุดเนื่องจากผ่านจุด $(0, 0)$

ดังนั้น $x + y$ มีค่าสูงสุดคือ $2 + 2 = 4$ เมื่อ $x = 2$ และ $y = 2$ และค่าต่ำสุด

คือ $0 + 0 = 0$ เมื่อ $x = 0$ และ $y = 0$



เมื่อ $x = 2$ และ $y = 2$ ค่าสูงสุดคือ 4 และเมื่อ $x = 0$ และ $y = 0$ ค่าต่ำสุดคือ 0



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = -2x + 6$ แล้ว ให้กด EXE

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -1, End (สิ้นสุด): 6, Step (ขั้น): 1] แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

x	$f(x)$	$g(x)$
1	4	2.5
2	2	2
3	0	1.5
4	-2	1

-1

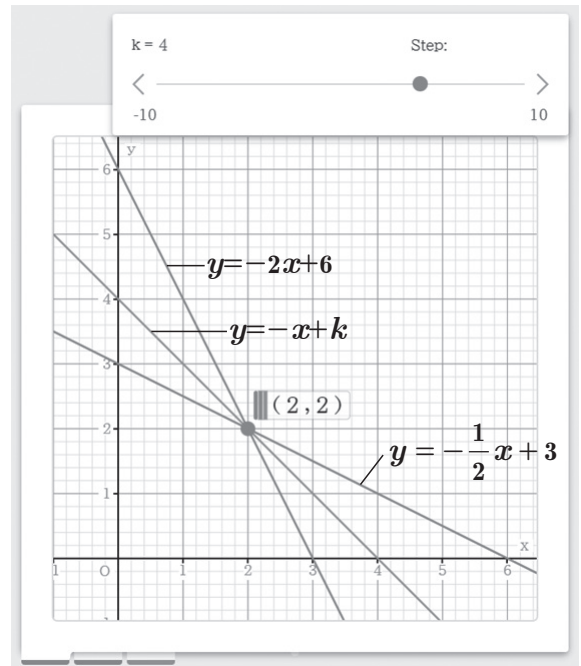
x	$f(x)$	$g(x)$
5	-4	0.5
6	-6	0

3

นอกจากนี้ ให้แต่ละแผ่นงานฟังก์ชัน และป้อน $y = -x + k$

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้แต่ละแผ่นงานกราฟ แล้วแสดงพิกัดจุดตัดของเส้น

โดยการเปลี่ยนจุดตัดแกน Y (ตัวแปร k) ของเส้นที่มีความชัน -1 บนกราฟ เราสามารถทำความเข้าใจวิธีหาคำตอบได้



PRACTICE

① กำหนดให้ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 7$ และ $x + 2y \leq 8$ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) วาดโดเมนที่ตรงกับ 4 อสมการ

โดยให้ D เป็นโดเมนที่ตรงกับ 4 อสมการที่กำหนดไว้

โดยการแปลงอสมการ $2x + y \leq 7$ เราจะได้

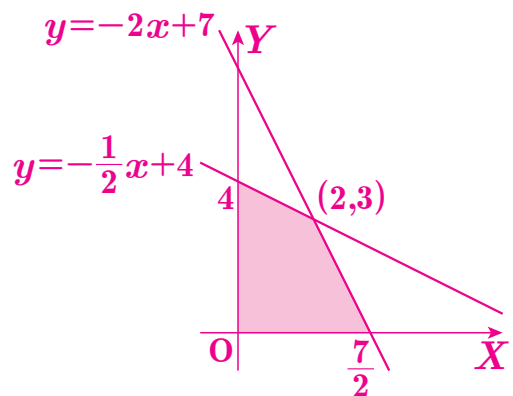
$$y \leq -2x + 7 \quad \dots (i)$$

โดยการแปลงอสมการ $x + 2y \leq 8$

$$\text{เราจะได้ } y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \quad \dots (ii)$$

สำหรับจุดตัดของเส้นขอบเขต (i) และ (ii)

$$\text{จงแก้ } \begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \text{ เพื่อจะได้ } (x, y) = (2, 3)$$



โดเมน D อยู่ด้านในและเส้นขอบของสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอด 4 จุดที่ $(0, 0)$, $(0, 4)$, $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ และ $(2, 3)$ ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาในรูปทางด้านบน

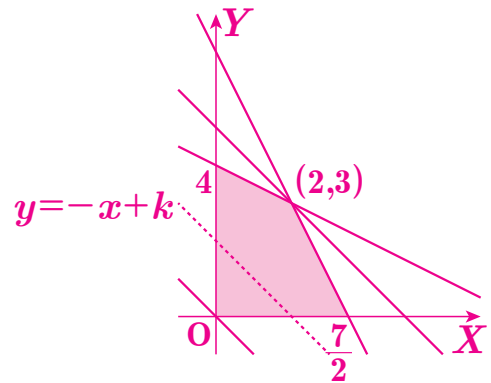
(2) หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $x+y$

สมมติว่า $x+y=k$ แล้วแปลงให้เป็น $y=-x+k$
สำหรับเส้นที่มีความชัน -1 และจุดตัดแกน
 Y ที่ k

หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสำหรับ k โดยที่เส้น
มีจุดร่วมกับโดเมน D

จากรูปภาพด้านขวา เราจะเห็นว่าค่าของ k
เป็นค่าสูงสุดเนื่องจากผ่านจุด $(2, 3)$ และเป็น
ค่าต่ำสุดเนื่องจากผ่านจุด $(0, 0)$

ดังนั้น $x+y$ มีค่าสูงสุดคือ $2+3=5$ เมื่อ $x=2$ และ $y=3$ และค่าต่ำสุดคือ $0+0=0$ เมื่อ
 $x=0$ และ $y=0$



เมื่อ $x=2$ และ $y=3$ ค่าสูงสุดคือ 5 และ
เมื่อ $x=0$ และ $y=0$ ค่าต่ำสุดคือ 0

check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x)=-2x+7$ แล้ว ให้กด EXE

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x)=-\frac{1}{2}x+4$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-1, End (สิ้นสุด):6, Step (ขั้น):1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

x	$f(x)$	$g(x)$
1	5	4.5
2	3	3.5
3	1	3
4	-1	2.5

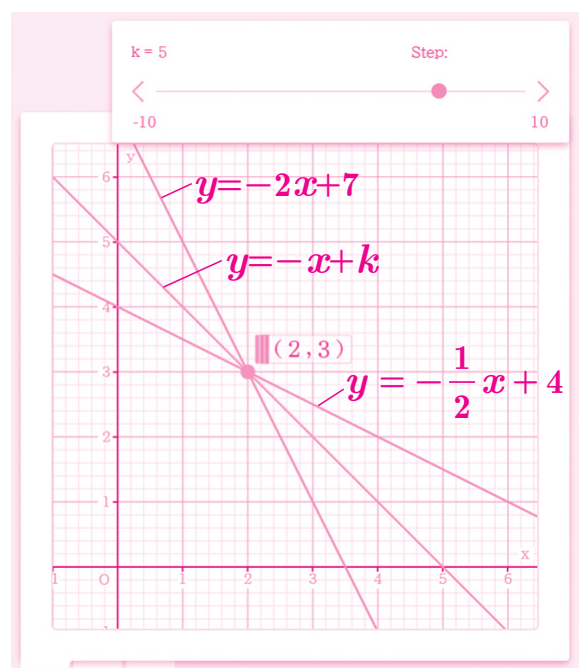
-1

x	$f(x)$	$g(x)$
5	-3	1.5
6	-5	1

3

นอกจากนี้ ให้แต่ละแผ่นงานฟังก์ชัน และ
ป้อน $y=-x+k$

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้แต่ละแผ่นงานกราฟ
แล้วแสดงพิกัดจุดตัดของเส้น



- 2) ผู้ผลิตมีสินค้า 2 ประเภท คือ A และ B หากต้องการผลิตสินค้าจำนวน 1 ตัน สำหรับสินค้า A จำเป็นต้องใช้ไฟฟ้า 60 กิโลวัตต์ และก๊าซ 2 ลูกบาศก์เมตร และสำหรับสินค้า B จำเป็นต้องใช้ไฟฟ้า 40 กิโลวัตต์ และก๊าซ 6 ลูกบาศก์เมตร กำไรต่อสินค้าจำนวน 1 ตัน คือ 20,000 ดอลลาร์ สำหรับสินค้า A และ 30,000 ดอลลาร์ สำหรับสินค้า B โดยกำหนดให้ผู้ผลิตรายนี้ได้รับพลังงานไฟฟ้า 2,200 กิโลวัตต์ และก๊าซ 120 ลูกบาศก์เมตร ในแต่ละวัน ดังนั้นควรผลิตสินค้า A และ B กี่ตันต่อวันเพื่อเพิ่มผลกำไรสูงสุดสำหรับสินค้าที่ผลิตใน 1 วัน นอกจากนี้ให้หาค่าไรทั้งหมดในช่วงเวลานั้นด้วย

	พลังงานไฟฟ้า (กิโลวัตต์)	ก๊าซ (ลูกบาศก์เมตร)	กำไร (10,000 ดอลลาร์)
สินค้า A	60	2	2
สินค้า B	40	6	3
ค่าสูงสุด	2200	120	

โดยให้ปริมาณการผลิตสำหรับ 1 วันเป็น x ตัน สำหรับสินค้า A และ y ตัน สำหรับสินค้า B

ปริมาณการผลิตเป็นจำนวนบวก ดังนั้น $x \geq 0$ และ $y \geq 0$... (i)

จากความสัมพันธ์ของการจ่ายพลังงานไฟฟ้าสำหรับ 1 วัน เราจะได้

$$60x + 40y \leq 2200 \quad \dots (ii)$$

จากความสัมพันธ์ของการจ่ายก๊าซสำหรับ 1 วัน เราจะได้ $2x + 6y \leq 120$... (iii)

ดังนั้น จงหาค่าสำหรับ x และ y ที่เพิ่มกำไรสูงสุดรวมทั้งหมด $k = 2x + 3y$ ภายใต้เงื่อนไขที่ระบุไว้ในข้อ (i), (ii) และ (iii)

โดยการแปลง (ii) เราจะได้ $y \leq -\frac{3}{2}x + 55$... (iv)

โดยการแปลง (iii) เราจะได้ $y \leq -\frac{1}{3}x + 20$... (v)

สำหรับจุดเส้นขอบเขตของจุดตัด (iv) และ (v) จงแก้ $\begin{cases} 3x + 2y = 110 \\ x + 3y = 60 \end{cases}$ เพื่อจะได้ $(x, y) = (30, 10)$

โดเมนที่แสดงโดยระบบอสมการอยู่ด้านในและเส้นขอบของสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอด 4 จุดที่

$$(0, 0), (0, 20), \left(\frac{110}{3}, 0\right) \text{ และ } (30, 10)$$

ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาในรูปภาพด้านขวา

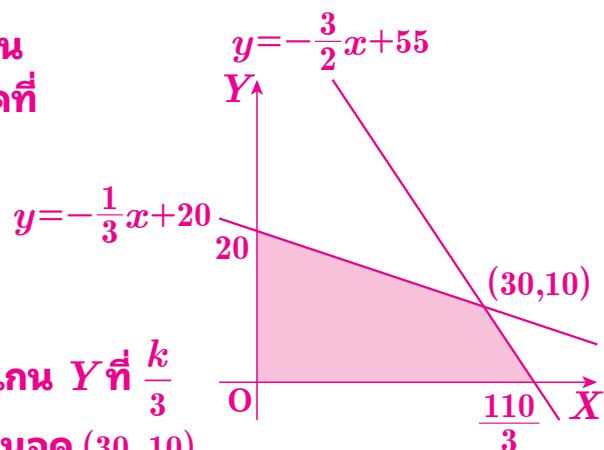
$$k = 2x + 3y \text{ ถูกแปลงเป็น } y = -\frac{2}{3}x + \frac{k}{3}$$

ซึ่งก็คือเส้นที่มีความชัน $-\frac{2}{3}$ และจุดตัดแกน Y ที่ $\frac{k}{3}$

ดังนั้น ค่าของ k จึงมีค่าถึงค่าสูงสุดเมื่อผ่านจุด $(30, 10)$

ดังนั้น $2x + 3y$ จึงมีค่าถึงค่าสูงสุดเมื่อ $x = 30$ และ $y = 10$ ซึ่งก็คือ $2 \cdot 30 + 3 \cdot 10 = 90$

กำไรสูงสุดรวมทั้งหมดถึง 900,000 ดอลลาร์ เมื่อผลิตสินค้า A จำนวน 30 ตัน และสินค้า B จำนวน 10 ตัน



โดเมนที่แสดงโดยอสมการ (4)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยใช้โดเมนที่แสดงโดยอสมการ

STUDY GUIDE

การพิสูจน์โดยใช้โดเมน

สำหรับ 2 เงื่อนไข p และ q โดยสมมติว่า P ทั้งหมดนั้นตรงกับเงื่อนไข p และ Q ทั้งหมดนั้นตรงกับเงื่อนไข q แล้วรายการต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$\text{หาก } p \text{ แล้ว } q \Leftrightarrow P \subset Q$$

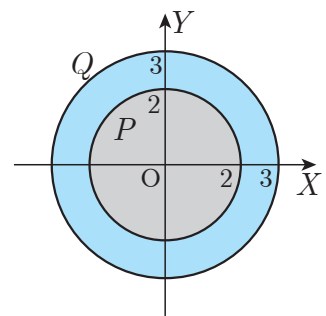
Ex. หาก $x^2 + y^2 < 4$ แล้ว $x^2 + y^2 < 9$

หากเราสามารถแสดงได้ว่า $P \subset Q$ นั้นถูกต้องสำหรับเซต P ที่ตรงกับเงื่อนไข

$p: x^2 + y^2 < 4$ และเซต Q ที่ตรงกับเงื่อนไข $q: x^2 + y^2 < 9$

เราจึงสามารถพิสูจน์ได้ว่าหาก $x^2 + y^2 < 4$ แล้ว $x^2 + y^2 < 9$

ด้วยเหตุนี้ เราจึงใช้แผนภาพเพื่อแสดงว่าโดเมนของเซต P รวมอยู่ในโดเมนของเซต Q



EXERCISE

◆ พิสูจน์ว่าหาก $x^2 + y^2 \leq 1$ แล้ว $x + y \leq 2$

[การพิสูจน์]

สมมติว่าโดเมน P แสดงโดยอสมการ $x^2 + y^2 \leq 1$ และโดเมน Q

แสดงโดยอสมการ $x + y \leq 2$

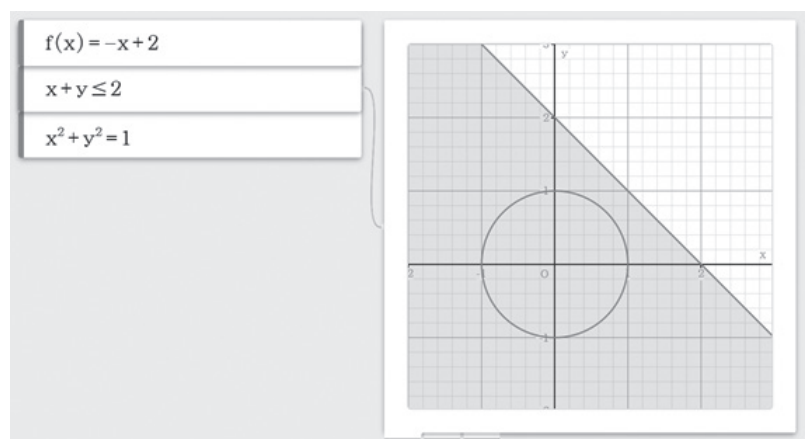
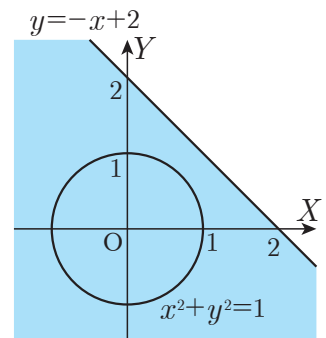
ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวา P อยู่ทางด้านในและเส้นรอบวงกลม

$x^2 + y^2 = 1$ และ Q อยู่ด้านบนและด้านล่างเส้น $y = -x + 2$

นอกจากนี้ $x^2 + y^2 = 1$ และ $y = -x + 2$ นั้นไม่มีจุดตัด

ดังนั้น $P \subset Q$ จึงถูกต้อง

ดังนั้น หาก $x^2 + y^2 \leq 1$ แล้ว $x + y \leq 2$ จึงถูกต้อง



PRACTICE

◆ พิสูจน์ว่าหาก $x^2 + y^2 \leq 4$ แล้ว $3x+4y \leq 10$

[การพิสูจน์]

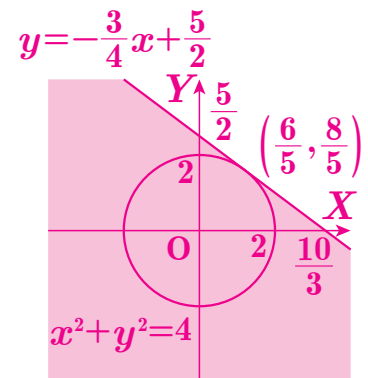
สมมติว่าโดเมน P

แสดงโดยอสมการ $x^2 + y^2 \leq 4$

และโดเมน Q แสดงโดยอสมการ $3x+4y \leq 10$

ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวา P อยู่ด้านใน

และเส้นรอบวงกลม $x^2 + y^2 = 4$

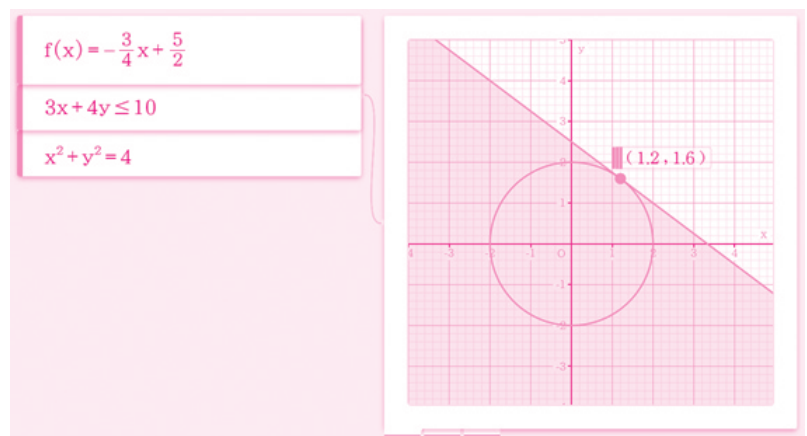


Q อยู่ด้านบนและด้านล่างเส้น $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$

นอกจากนี้ $x^2 + y^2 = 4$ และ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ ยังสัมผัสกันที่จุด 1 จุด

ดังนั้น $P \subset Q$ จึงถูกต้อง

ดังนั้น หาก $x^2 + y^2 \leq 4$ แล้ว $3x+4y \leq 10$ จึงถูกต้อง



โดเมนที่แสดงโดยอสมการ (5)

TARGET

เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับโดเมนที่กำหนดขอบเขตโดยพาราโบลา

STUDY GUIDE

พาราโบลาและโดเมน

หากเรากำหนดให้พาราโบลา $y=f(x)$ เป็น C แล้วสำหรับโดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y>f(x)$ และ $y<f(x)$ เราสามารถหารายการต่อไปนี้ได้

- (i) **โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y>f(x)$**
→ **ด้านบนพาราโบลา C**
- (ii) **โดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y<f(x)$**
→ **ด้านล่างพาราโบลา C**

ในทั้งสองโดเมน (i) และ (ii) เส้นขอบเขตคือพาราโบลา C และเมื่อเรารวมเครื่องหมายเท่ากับใน $y\geq f(x)$ เราจึงสามารถรวมจุดบนพาราโบลา C ได้



proof

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อตรวจสอบโดเมน P ของ $y\geq x^2$ และโดเมน Q ของ $y\leq x^2$ (ทั้งสองโดเมนมีเส้นขอบเขต)

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x)=x^2$ แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-2, End (สิ้นสุด):1, Step (ขั้น):1]

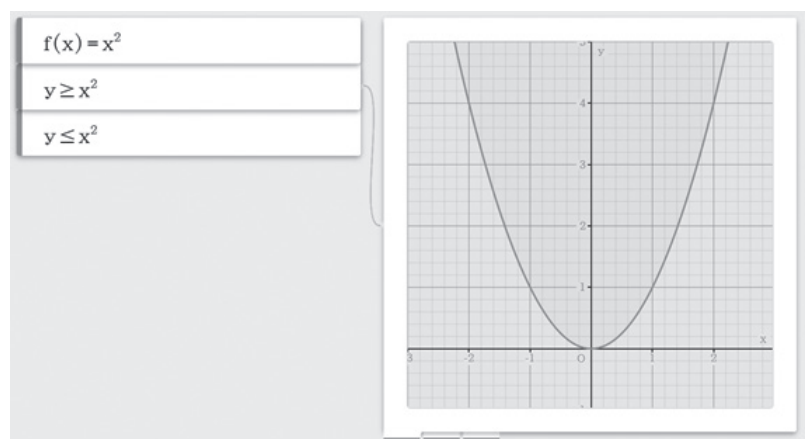
แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

x	$f(x)$	$g(x)$
1	-1	ERROR
2	0	ERROR
3	1	ERROR

-2

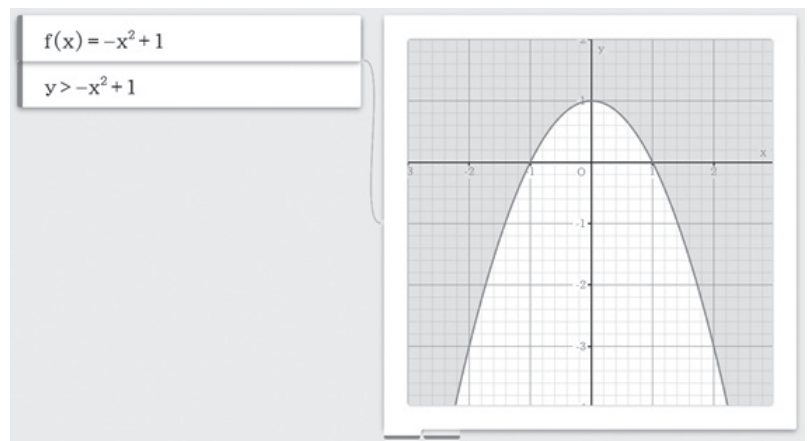
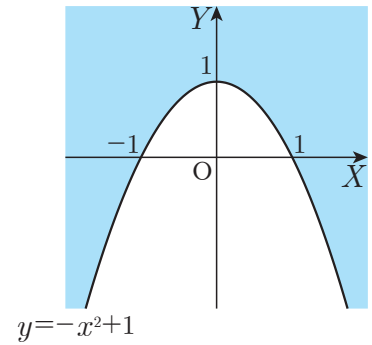
นอกจากนี้ ให้แตะแผ่นงานฟังก์ชัน และป้อน $y\geq x^2$ และ $y\leq x^2$



EXERCISE

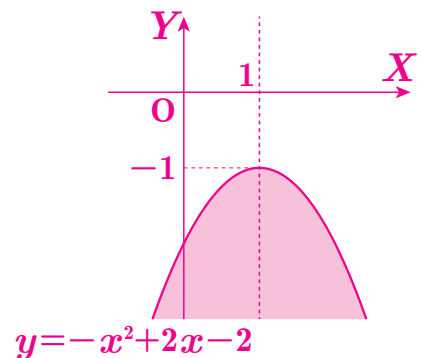
- ◆ วาดโดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y > -x^2 + 1$ นอกจากนี้ ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่
 เส้นขอบเขต $y = -x^2 + 1$ แสดงพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 1)$ และ
 แกนอยู่ที่ $x=0$
 โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้จึงอยู่ที่ด้านบนพาราโบลา $y = -x^2 + 1$ ซึ่งก็คือ
 พื้นที่แรเงาในรูปภาพด้านขวา
 อย่างไรก็ตาม ไม่รวมเส้นขอบเขต

ไม่รวมเส้นขอบเขต



PRACTICE

- ◆ วาดโดเมนที่แสดงโดยอสมการ $y \leq -x^2 + 2x - 2$ นอกจากนี้ ให้พิจารณาว่าโดเมนมีเส้นขอบเขตหรือไม่
เส้นขอบเขต $y = -x^2 + 2x - 2 = -(x - 1)^2 - 1$
แสดงพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(1, -1)$ **และ**
แกนอยู่ที่ $x=1$
โดเมนที่แสดงโดยอสมการนี้จึงอยู่ที่ด้านล่าง
พาราโบลา $y = -(x - 1)^2 - 1$ **ซึ่งก็คือพื้นที่แรเงาใน**
รูปภาพด้านขวา
อย่างไรก็ตาม รวมเส้นขอบเขต



รวมเส้นขอบเขต