

ฟังก์ชันกำลังสอง

TARGET

การทำความเข้าใจแนวคิดของฟังก์ชัน

STUDY GUIDE

ฟังก์ชัน

นิยามของฟังก์ชัน

สำหรับตัวแปร 2 ตัว x และ y หากระบุค่าของ x ได้แล้ว จะมีค่าของ y ที่สอดคล้องกัน 1 ตัว เราจึงกล่าวได้ว่า y คือฟังก์ชันของ x

Ex. โดยกำหนดให้ $x=2 \rightarrow$ ฟังก์ชัน
($y=x+1$) $\rightarrow$ เราสามารถระบุได้ว่า $y=3$

อธิบายวิธีการของฟังก์ชัน

เมื่อ y คือฟังก์ชันของ x โดยทั่วไปแล้ว y จะแสดงเป็น $f(x)$ หรือ $g(x)$

นอกจากนี้ ในฟังก์ชัน $y=f(x)$ แล้วเมื่อ $x=a$ ค่าของ y จะแสดงเป็น $f(a)$

Ex. ในฟังก์ชัน $f(x)=3x+3$ เมื่อ $x=1$ แล้วเมื่อ $f(1)=3 \times 1 + 3 = 6$ และ $x=5$ เราจะได้ $f(5)=3 \times 5 + 3 = 18$

ฟังก์ชันเชิงเส้นและฟังก์ชันกำลังสอง

เมื่อ y เป็นสมการเชิงเส้นของ x และ y เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x ซึ่งแสดงในรูปแบบต่อไปนี้

$$y = ax + b \quad (a \neq 0)$$

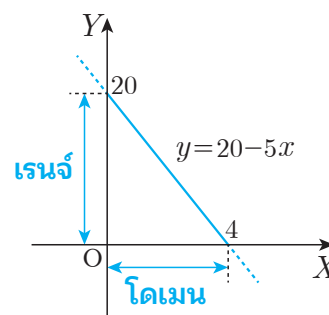
เมื่อ y เป็นสมการกำลังสองของ x และ y เป็นฟังก์ชันกำลังสองของ x ซึ่งแสดงในรูปแบบต่อไปนี้

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

โดเมนและเรนจ์

ในฟังก์ชัน $y=f(x)$ คำตอบสำหรับตัวแปร x เรียกว่าโดเมนของฟังก์ชัน และคำตอบสำหรับตัวแปร y เรียกว่าเรนจ์ของฟังก์ชัน

Ex. สมมติว่าคน ๆ หนึ่งเดินด้วยความเร็ว 5 กม. ต่อชั่วโมงบนถนนเป็นระยะทาง 20 กม. กำหนดให้เวลาเดินเป็น x ชั่วโมง และระยะทางของถนนที่เหลือเป็น y กม. แล้วสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของ x และ y คือ $y=20-5x$
ในตอนนี้ เราจะเห็นว่าโดเมนคือ $0 \leq x \leq 4$ และเรนจ์คือ $0 \leq y \leq 20$



EXERCISE

① สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = 3x^2 + 2x + 6$ จงหาค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้

(1) $f(0)$

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 6 = 6$$

(2) $f(1)$

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 6 = 11$$

6

11

(3) $f(-1)$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 6 = 7$$

(4) $f(109)$

$$f(109) = 3 \cdot 109^2 + 2 \cdot 109 + 6 = 35867$$

7

35867

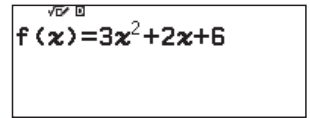
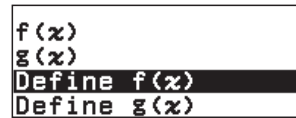
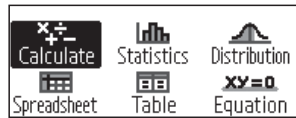


check

ใช้ฟังก์ชัน FUNCTION เพื่อคำนวณค่าของ $f(x)$

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

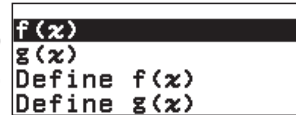
กด f(x) เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด OK ③ x = x^2 $+$ ② x $+$ ⑥ EXE



(1) $f(0)$

กด f(x) เลือก [$f(x)$] กด OK

① EXE



(2) $f(1)$

กด f(x) เลือก [$f(x)$] กด OK
① EXE



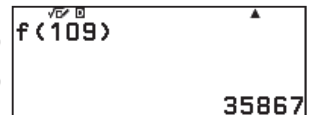
(3) $f(-1)$

กด f(x) เลือก [$f(x)$] กด OK
 $\ominus$ ① EXE



(4) $f(109)$

กด f(x) เลือก [$f(x)$] กด OK
① ① ⑨ EXE



② สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = ax^2 + bx + 3$ จงหาค่าของค่าคงตัว a และ b เมื่อ $f(2)=15$ และ $f(-2)=23$

จาก $f(2) = 4a + 2b + 3 = 15$ เราจะได้ $4a + 2b = 12$... (i)

จาก $f(-2) = 4a - 2b + 3 = 23$ เราจะได้ $4a - 2b = 20$... (ii)

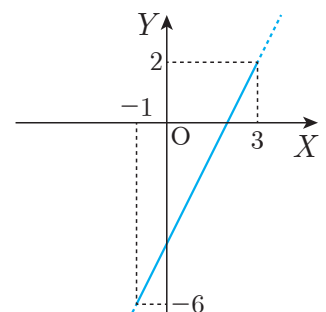
เมื่อเราแก้ระบบสมการ (i) และ (ii) เราจะได้ $a=4$ และ $b=-2$

$$\underline{a=4, b=-2}$$

③ จงหาเรนจ์ของฟังก์ชัน $y=2x-4$ ($-1 \leq x \leq 3$)

จากกราฟด้านขวา เราจะเห็นว่าเรนจ์คือ $-6 \leq y \leq 2$

$$\underline{-6 \leq y \leq 2}$$



PRACTICE

① สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$ จงหาค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้

(1) $f(0)$

(2) $f(2)$

(3) $f(-3)$

(4) $f(52)$

② สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = ax^2 + bx + 3$ จงหาค่าของค่าคงตัว a และ b เมื่อ $f(1)=7$ และ $f(-2)=25$

③ จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $y=-3x+2$ ($-7 \leq y \leq 5$)

กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง (1)

TARGET

การทำความเข้าใจกราฟของฟังก์ชัน $y = ax^2$, $y = ax^2 + q$, $y = a(x - p)^2$

STUDY GUIDE

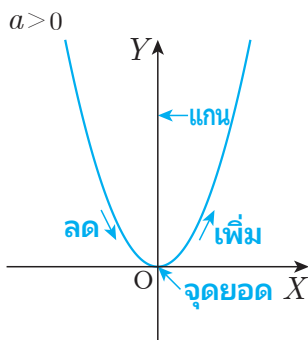
กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

พาราโบลา

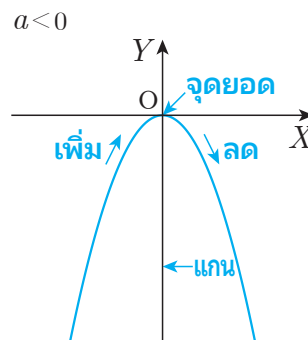
เส้นโค้งของกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง ($y = ax^2 + bx + c$) เรียกว่า **พาราโบลา** และมี **แกนสมมาตร** ตามแนวเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y เส้นตรงเรียกว่า **แกนสมมาตร** และจุดที่พาราโบลาตัดกับแกนนี้เรียกว่า **จุดยอด** ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันกำลังสองถูกกำหนดโดยค่าของสัมประสิทธิ์ a ของ x^2 เมื่อ $a > 0$ พาราโบลาจะ **หงาย** และเมื่อ $a < 0$ พาราโบลาจะ **คว่ำ** นอกจากนี้ หากค่าสัมบูรณ์ของ a น้อยลง กราฟจะยิ่งเปิดกว้างขึ้น

กราฟของ $y = ax^2$

แกนสมมาตร: แกน Y จุดยอด: จุดกำเนิด



หงาย
ค่าของ y เปลี่ยนจากลดเป็นเพิ่มที่จุด $x=0$ (แกน Y)



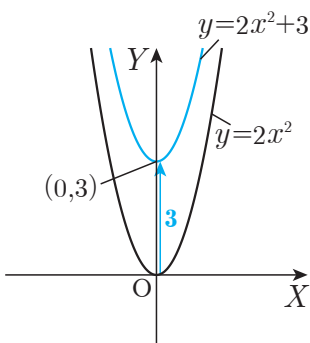
คว่ำ
ค่าของ y เปลี่ยนจากเพิ่มเป็นลดที่จุด $x=0$ (แกน Y)

กราฟของ $y = ax^2 + q$

เราได้พาราโบลาจากการเลื่อนขนานกราฟของ $y = ax^2$ ไป q หน่วยตามแกน Y
แกนสมมาตร: แกน Y จุดกำเนิด: จุด $(0, q)$

การเลื่อนกราฟบนแกน $x-y$ เรียกว่า **การเลื่อนขนาน** กราฟเปลี่ยนตำแหน่งแต่ไม่เปลี่ยนรูปร่าง

Ex. กราฟของฟังก์ชัน $y = 2x^2 + 3$



กราฟของฟังก์ชัน $y = 2x^2 + 3$ คือพาราโบลาที่ได้จากการเลื่อนกราฟของฟังก์ชัน $y = 2x^2$ ไป 3 หน่วยตามแกน Y

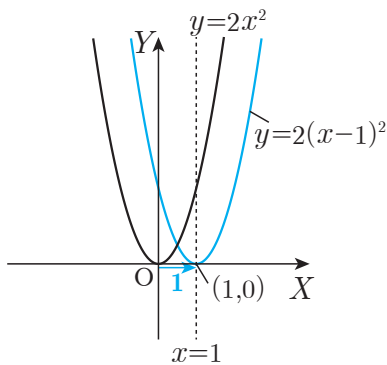
โดยการเลื่อนขนานไป 3 หน่วยตามแกน Y :

- แกนสมมาตรยังคงเป็น $x=0$ (แกน Y)
- จุดยอดเปลี่ยนจากจุดกำเนิดเป็น $\rightarrow (0, 3)$

กราฟของ $y = a(x - p)^2$

เราได้พาราโบลาจากการเลื่อนขนานกราฟของ
 $y = ax^2$ ไป p หน่วยตามแกน X
แกนสมมาตร: $x=p$ จุดกำเนิด: จุด $(p, 0)$

Ex. กราฟของฟังก์ชัน $y = 2(x - 1)^2$



กราฟของฟังก์ชัน $y = 2(x - 1)^2$ คือพาราโบลาที่ได้จากการ
เลื่อนกราฟของฟังก์ชัน $y = 2x^2$ ไป 1 หน่วยตามแกน X
โดยการเลื่อนขนานไป 1 หน่วยตามแกน X :

- แกนสมมาตรเปลี่ยนจากแกน Y เป็น $x=1$
- จุดยอดเปลี่ยนจากจุดกำเนิดเป็น $\rightarrow(1, 0)$

EXERCISE

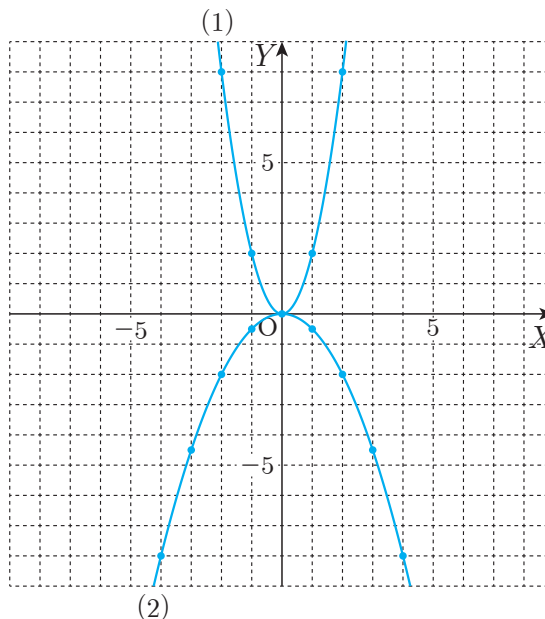
1 จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = 2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2$

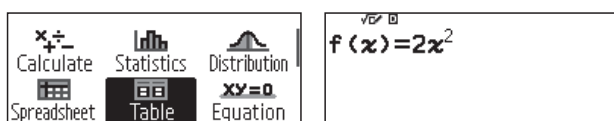
x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



check

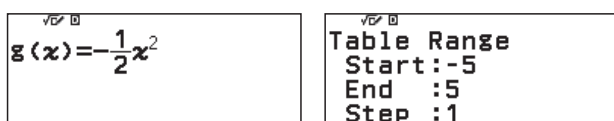
กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = 2x^2$ แล้ว ให้กด EXE

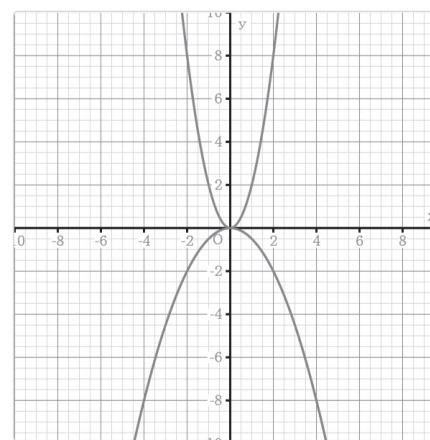
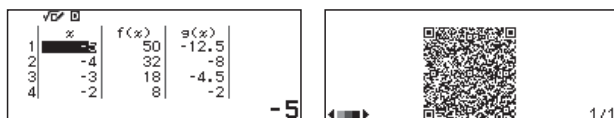


และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-5, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE



กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



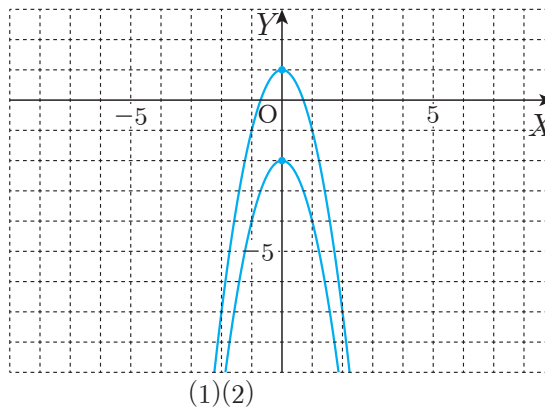
2 จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และหาจุดยอดของกราฟ

(1) $y = -2x^2 + 1$

(0, 1)

(2) $y = -2x^2 - 2$

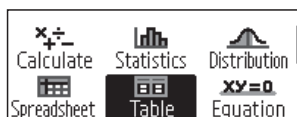
(0, -2)



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = -2x^2 + 1$ แล้วให้กด EXE



$f(x) = -2x^2 + 1$

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -2x^2 - 2$

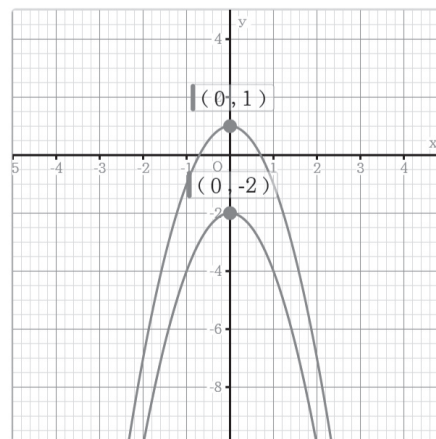
กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-5, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1] แล้วให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

$g(x) = -2x^2 - 2$

Table Range
Start :-5
End :5
Step :1

กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

	x	f(x)	g(x)
1	-5	-49	-52
2	-4	-31	-34
3	-3	-17	-20
4	-2	-7	-10



3 จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และหาแกนสมมาตรและ

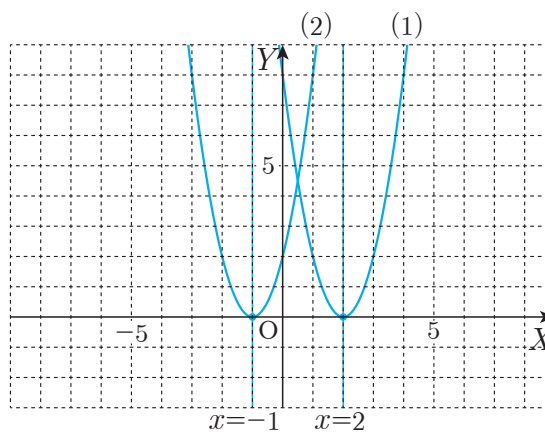
จุดยอดของกราฟ

(1) $y = 2(x - 2)^2$

$x=2, (2, 0)$

(2) $y = 2(x + 1)^2$

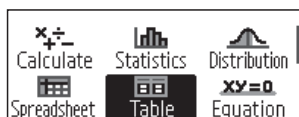
$x=-1, (-1, 0)$



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = 2(x - 2)^2$ แล้ว ให้กด EXE



$f(x) = 2(x - 2)^2$

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 2(x + 1)^2$

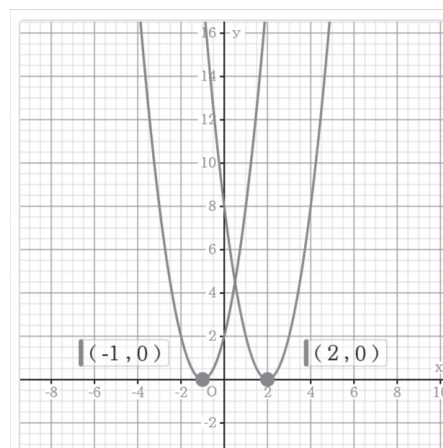
กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-5, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

$g(x) = 2(x + 1)^2$

Table Range
Start :-5
End :5
Step :1

กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

	x	$f(x)$	$g(x)$
1	-5	98	32
2	-4	72	18
3	-3	50	8
4	-2	32	2

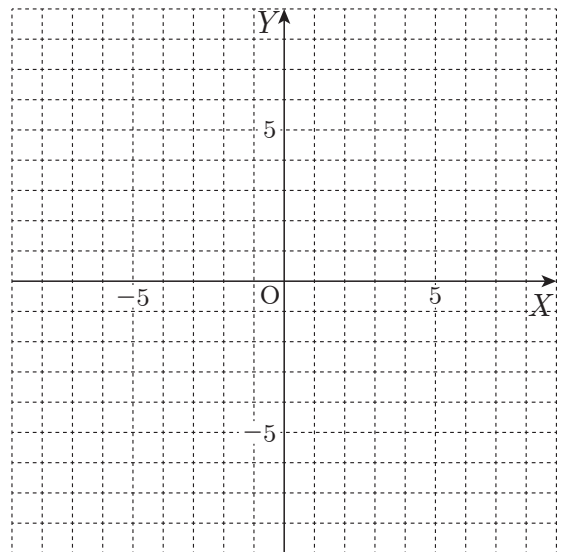


PRACTICE

1 จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และหาจุดยอดของกราฟ

(1) $y = 3x^2 - 2$

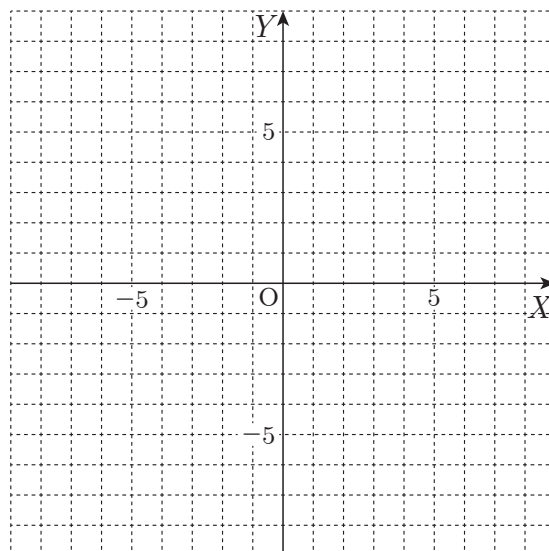
(2) $y = -2x^2 + 3$



๒ จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และหาแกนสมมาตรและ
จุดยอดของกราฟ

(1) $y = 3(x - 3)^2$

(2) $y = -2(x + 2)^2$



กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง (2)

TARGET

การทำความเข้าใจกราฟของฟังก์ชัน $y = a(x - p)^2 + q$

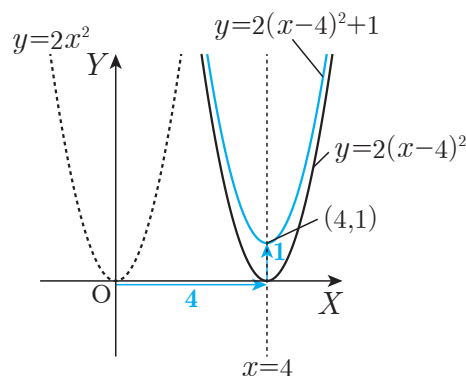
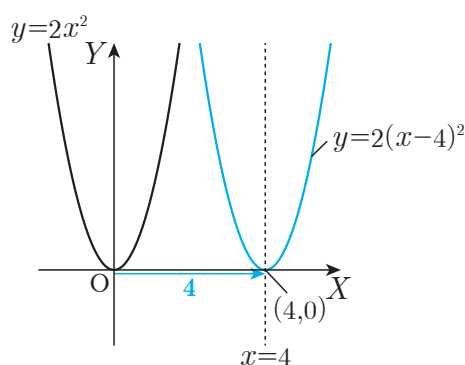
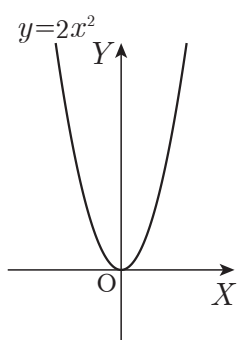
STUDY GUIDE

กราฟของ $y = a(x - p)^2 + q$

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อเราเลื่อนขนานกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2$ ก็จะกลายเป็นกราฟของ $y = a(x - p)^2 + q$

เราได้พาราโบลาจากการเลื่อนขนานกราฟของ $y = ax^2$ ไป p หน่วยตามแกน X และ q หน่วยตามแกน Y
 แกนสมมาตร: $x=p$ จุดยอด: จุด (p, q)

Ex. กราฟของฟังก์ชัน $y = 2(x - 4)^2 + 1$



- แกนสมมาตรคือ $x=0$
- จุดยอดคือจุดกำเนิด

การเลื่อนขนาน 4 หน่วยตามแกน X

- แกนสมมาตรคือ $x=4$
- จุดยอดคือ $(4, 0)$

การเลื่อนขนาน 1 หน่วยตามแกน Y

- แกนสมมาตรคือ $x=4$
- จุดยอดคือ $(4, 1)$

EXERCISE

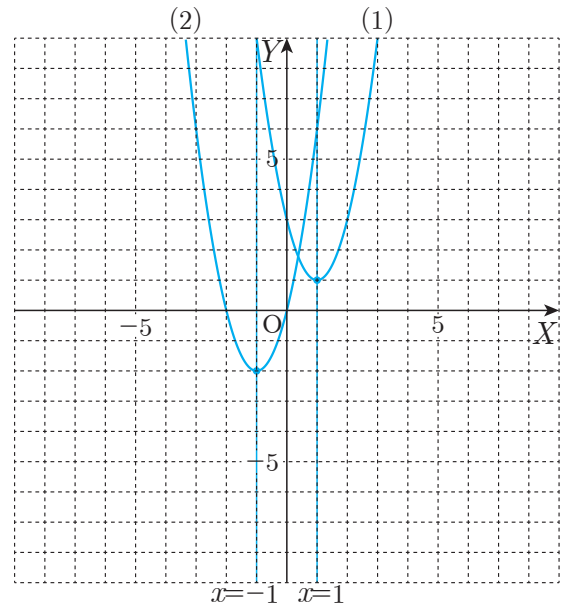
- ◆ จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และหาแกนสมมาตรและจุดยอดของกราฟ

(1) $y = 2(x-1)^2 + 1$

$x=1, (1, 1)$

(2) $y = 2(x+1)^2 - 2$

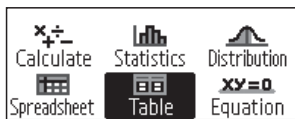
$x=-1, (-1, -2)$



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = 2(x-1)^2 + 1$ แล้ว ให้กด EXE



$f(x) = 2(x-1)^2 + 1$

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 2(x+1)^2 - 2$

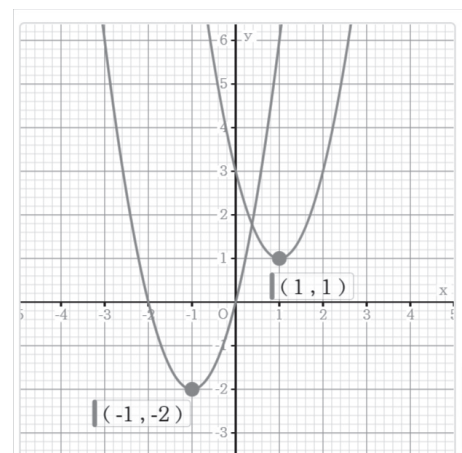
กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-5, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

$g(x) = 2(x+1)^2 - 2$

Table Range
Start:-5
End:5
Step:1

กด F1 X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

	x	$f(x)$	$g(x)$
1	-5	73	30
2	-4	51	16
3	-3	33	6
4	-2	19	0

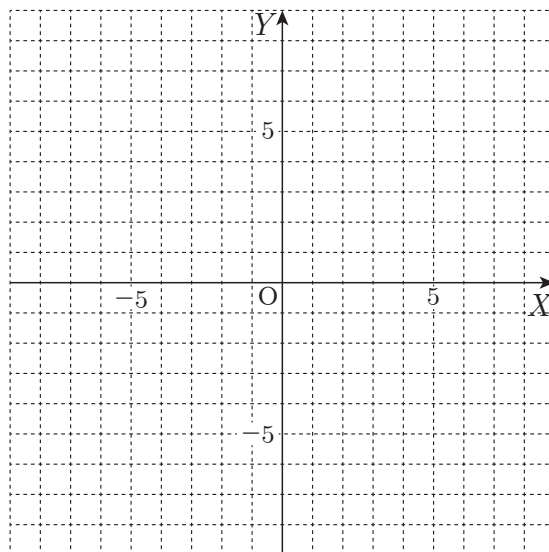


PRACTICE

◆ จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และหาแกนสมมาตรและจุดยอดของกราฟ

(1) $y = -(x - 3)^2 + 2$

(2) $y = -(x - 1)^2 - 1$



กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง (3)

TARGET

การทำความเข้าใจกราฟของฟังก์ชัน $y = ax^2 + bx + c$

STUDY GUIDE

กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$

เพื่อวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = ax^2 + bx + c$ เราต้องแปลงกราฟให้อยู่ในรูป $y = a(x - p)^2 + q$ เพื่อที่จะสามารถหาแกนสมมาตรและจุดยอด การแปลงสมการนี้เรียกว่า **กำลังสองสมบูรณ์**

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

explanation

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \quad \dots \text{จัดกลุ่มพจน์ } x^2 \text{ และ } x \text{ และดึงสัมประสิทธิ์ } a \text{ ออกจากพจน์ทั้งสอง}$$

$$= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \quad \dots \text{เนื่องจากใช้ } x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \text{ ให้เพิ่มกำลังสองของ}$$

สัมประสิทธิ์ครึ่งหนึ่งของพจน์ x แล้วจึงลบออก

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \quad \dots \text{นำพจน์ที่ตัดจากด้านบนออกจาก } \{ \} \text{ และเรียงใหม่ให้อยู่ในรูป}$$

ของ $y = a(x - p)^2 + q$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$



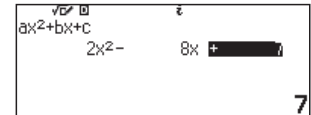
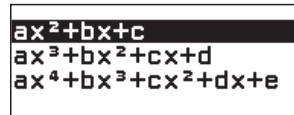
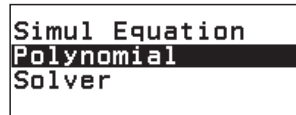
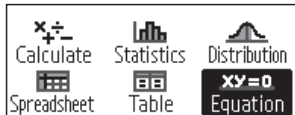
proof

คุณสามารถทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ของ $y = ax^2 + bx + c$ ได้ง่าย ๆ โดยใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์
 ในเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ Equation (สมการ) และจาก Polynomial (พหุนาม) ให้เลือกสมการกำลังสอง
 จากนั้นจึงหาจุดยอด (p, q) ของสมการที่กำหนดให้
 นอกจากนี้ คุณยังสามารถใช้คิวอาร์โค้ดเพื่อยืนยันรูปร่างและจุดยอดของกราฟได้

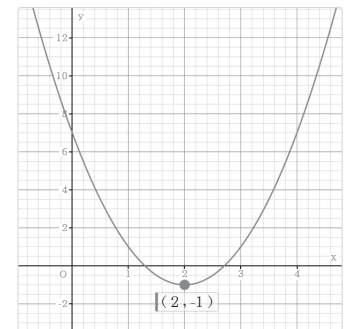
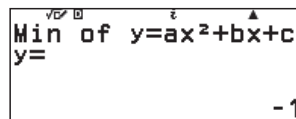
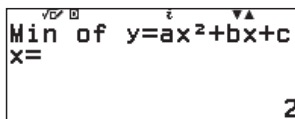
Ex. $y = 2x^2 - 8x + 7$

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก [$ax^2 + bx + c$] กด OK 2 EXE - 8 EXE 7 EXE EXE



EXE EXE EXE กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



เนื่องจากค่าของ a ใน $y = a(x - p)^2 + q$ คือสัมประสิทธิ์ของ x^2 แล้ว $a=2$
 $a>0$ ดังนั้นกราฟจึงหงายขึ้น และ y เป็นจุดต่ำสุด ซึ่งเป็นจุดยอด เครื่องคิดเลข
 วิทยาศาสตร์จึงแสดงผลเป็น Min (ต่ำสุด)

ดังนั้น เราจึงได้จุดยอดที่ $(p, q)=(2, -1)$ ด้วยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เรา
 จะได้สมการ $y = 2(x - 2)^2 - 1$

นอกจากนี้ เมื่อ $a<0$ กราฟคว่ำลง และ y เป็นจุดสูงสุด ซึ่งเป็นจุดยอด เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์จึงแสดงผลเป็น
 Max (สูงสุด)

EXERCISE

1 จงหาแกนสมมาตรและจุดยอดของกราฟของฟังก์ชันกำลังสองต่อไปนี้

(1) $y = x^2 - 6x - 5$

$$y = x^2 - 6x - 5 = (x-3)^2 - 3^2 - 5 = (x-3)^2 - 14$$

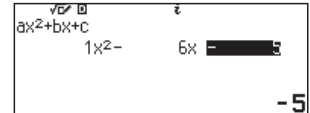
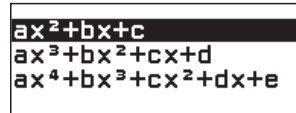
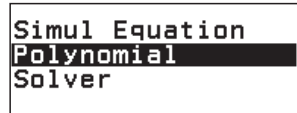
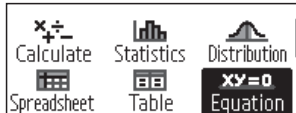
ดังนั้น เราจึงได้แกนสมมาตรคือ $x=3$ และจุดยอดคือ $(3, -14)$

$x=3, (3, -14)$

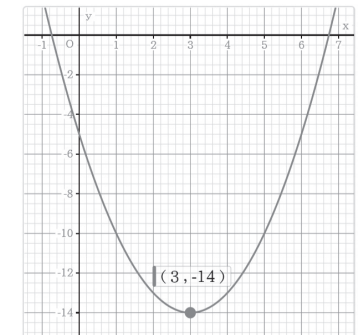
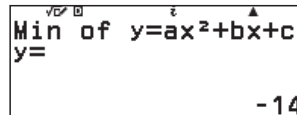
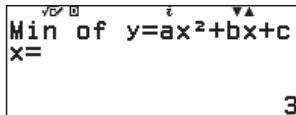
check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด OK ① EXE $-$ ⑥ EXE $-$ ⑤ EXE EXE



EXE EXE EXE กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



(2) $y = -3x^2 + 12x - 4$

$$y = -3x^2 + 12x - 4 = -3(x^2 - 4x) - 4 = -3\{(x-2)^2 - 4\} - 4 = -3(x-2)^2 + 8$$

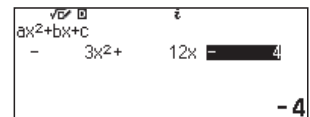
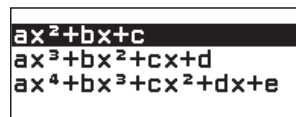
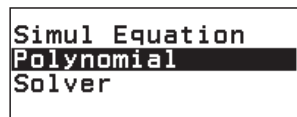
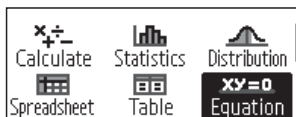
ดังนั้น เราจึงได้แกนสมมาตรคือ $x=2$ และจุดยอดคือ $(2, 8)$

$x=2, (2, 8)$

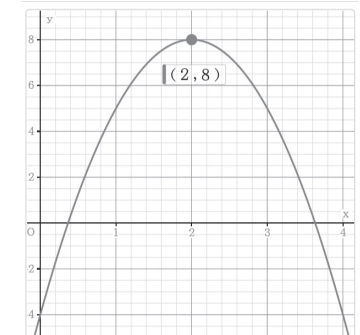
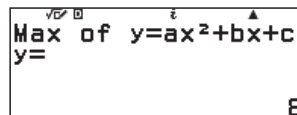
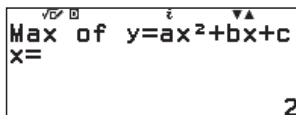
check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด OK $-$ ③ EXE ① ② EXE $-$ ④ EXE EXE



EXE EXE EXE กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



2 จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = x^2 + 4x + 3$

$$y = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 2^2 + 3 = (x + 2)^2 - 1$$

ดังนั้น เราจึงได้แกนสมมาตรคือ $x = -2$ และจุดยอดคือ

$(-2, -1)$

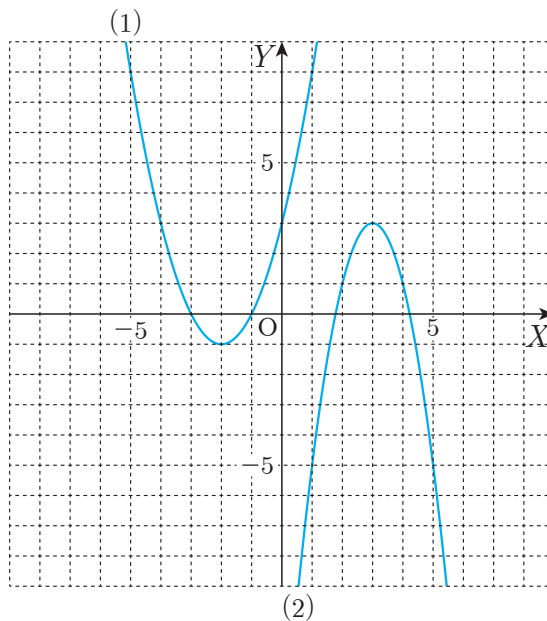
(2) $y = -2x^2 + 12x - 15$

$$y = -2x^2 + 12x - 15 = -2(x^2 - 6x) - 15$$

$$= -2\{(x - 3)^2 - 3^2\} - 15 = -2(x - 3)^2 + 3$$

ดังนั้น เราจึงได้แกนสมมาตรคือ $x = 3$ และจุดยอดคือ

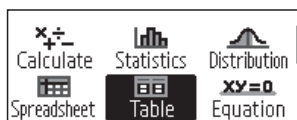
$(3, 3)$



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^2 + 4x + 3$ แล้ว ให้กด EXE



$f(x) = x^2 + 4x + 3$

และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -2x^2 + 12x - 15$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น): -5, End (สิ้นสุด): 5, Step (ขั้น): 1]

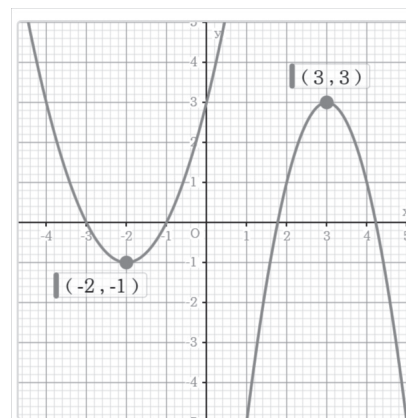
แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

$g(x) = -2x^2 + 12x - 15$

Table Range
Start: -5
End: 5
Step: 1

กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

x	f(x)	g(x)
1	8	-125
2	-4	-95
3	-3	-69
4	-2	-47



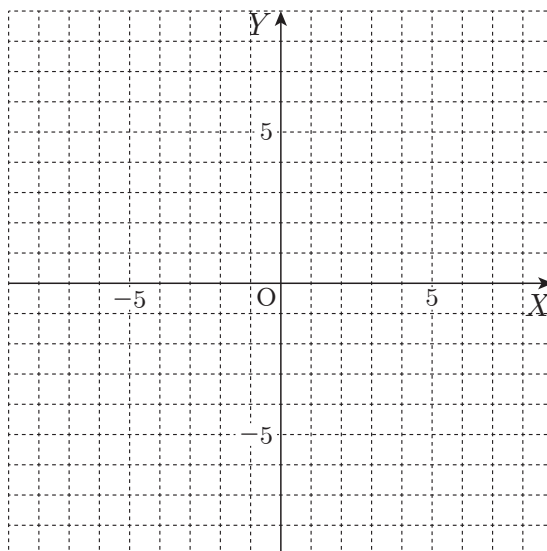
PRACTICE

- ① จงหาแกนสมมาตรและจุดยอดของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 - 8x + 10$

๒ จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = 2x^2 - 8x + 7$

(2) $y = -3x^2 + 9x - 5$



ADVANCED

- ③ เมื่อโยนวัตถุในแนวดิ่งจากความสูง 0 เมตร ที่ความเร็ว v เมตร/วินาที ความสัมพันธ์ระหว่างความสูง y เมตร ของวัตถุและเวลา x วินาที อยู่ในรูป $y = -4.9x^2 + vx$ หากโยนลูกบอลในแนวดิ่งจากความสูง 0 เมตร ที่ความเร็ว 9.8 เมตร/วินาที จงหาเวลาและความสูงของลูกบอล เมื่อลูกบอลถึงจุดสูงสุด โดยไม่ต้องคำนวณแรงต้านอากาศ

กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง (4)

TARGET

การทำความเข้าใจการเลื่อนขนานและการสะท้อนพาราโบลา

STUDY GUIDE

การเลื่อนขนาน

สำหรับการเลื่อนขนานพาราโบลา เราเพียงแค่เลื่อนขนานจุดยอดของพาราโบลา

หากเราใช้พาราโบลา 2 เส้นที่มีสัมประสิทธิ์ของ x^2 เหมือนกัน เราก็มั่นใจได้ว่าพาราโบลาจะทับกันเมื่อเราเลื่อนขนานพาราโบลาทั้งสองเส้น กล่าวคือ การทำให้พาราโบลา 2 เส้นทับกัน เราต้องเลื่อนจุดยอดหนึ่งไปทับจุดยอดอีกจุดหนึ่ง

Ex. $2x^2 + 4x + 1 = 2(x^2 + 2x) + 1 = 2(x + 1)^2 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 2(x + 1)^2 - 1$

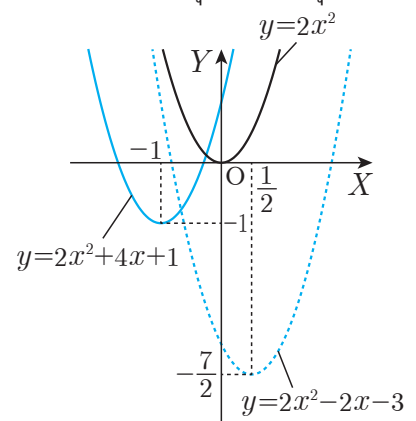
ดังนั้น สำหรับพาราโบลา $y = 2x^2 + 4x + 1$ เราเพียงแค่เลื่อนขนาน

พาราโบลา $y = 2x^2$ บนแกน X ไป -1 หน่วย และเลื่อนขนานบนแกน Y ไป -1 หน่วย

$$2x^2 - 2x - 3 = 2(x^2 - x) - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$$

ดังนั้น สำหรับพาราโบลา $y = 2x^2 - 2x - 3$ เราเพียงแค่เลื่อนขนาน

พาราโบลา $y = 2x^2$ บนแกน X ไป $\frac{1}{2}$ หน่วย และเลื่อนขนานบนแกน Y ไป $-\frac{7}{2}$ หน่วย



การสะท้อน

การเลื่อนจุดแต่ละจุดในพาราโบลาไปยังตำแหน่งที่สมมาตรผ่านเส้นตรงเส้นหนึ่ง หรือผ่านจุดบางจุดเรียกว่า **การสะท้อน**

โดยทั่วไป การสะท้อนพาราโบลา $y=f(x)$ ในรูปต่าง ๆ นั้นให้ดำเนินการตามแกน X แกน Y และจุดกำเนิด ซึ่งเราจะได้พาราโบลาต่อไปนี้

(1) การสะท้อนตามแกน X

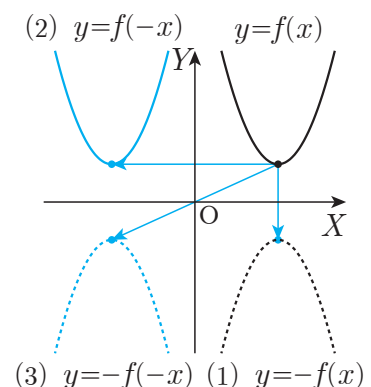
$-y=f(x)$ ซึ่งก็คือ $y=-f(x)$

(2) การสะท้อนตามแกน Y

$y=f(-x)$

(3) การสะท้อนตามจุดกำเนิด

$-y=f(-x)$ ซึ่งก็คือ $y=-f(-x)$



Ex. การสะท้อนพาราโบลา $y = x^2$ ตามแกน X เราจะได้ $y = -f(x) = -x^2$

การสะท้อนตามแกน Y เราจะได้ $y = f(-x) = (-x)^2 = x^2$

และการสะท้อนตามจุดกำเนิด เราจะได้ $y = -f(-x) = -(-x)^2 = -x^2$

EXERCISE

- ① เลื่อนขนานพาราโบลา $y = x^2 - 2x + 6$ และหาวิธีการเลื่อนขนานให้กับพาราโบลา $y = x^2 + 4x - 2$

จาก $y = x^2 - 2x + 6 = (x-1)^2 + 5$ เราจะพบว่าพิกัดจุดยอดของพาราโบลา $y = x^2 - 2x + 6$ คือจุด $(1, 5)$

จาก $y = x^2 + 4x - 2 = (x+2)^2 - 6$ เราจะพบว่าพิกัดจุดยอดของพาราโบลา $y = x^2 + 4x - 2$ คือจุด $(-2, -6)$

ดังนั้น จุดยอดจึงถูกเลื่อนขนานบนแกน X ไป $-2-1=-3$ หน่วย และเลื่อนขนานบนแกน Y ไป $-6-5=-11$ หน่วย

เลื่อนขนานบนแกน X ไป -3 หน่วย และบนแกน Y ไป -11 หน่วย



check

ใช้ Equation (สมการ) บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณจุดยอดของพาราโบลา 2 เส้น

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด OK

① EXE $\ominus$ ② EXE ⑥ EXE EXE EXE EXE EXE

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $x=$
 $1x^2- \quad 2x \quad + \quad \quad$
 6

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $x=$
 1

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $y=$
 5

① EXE ④ EXE $\ominus$ ② EXE EXE EXE EXE EXE

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $x=$
 $1x^2+ \quad 4x \quad + \quad \quad$
 -2

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $x=$
 -2

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $y=$
 -6

- ② จงหาสมการของพาราโบลาหลังจากเลื่อนขนานพาราโบลา $y = x^2 - 4x - 3$ ไป -4 หน่วยตามแกน X และ 3 หน่วยตามแกน Y

จาก $y = x^2 - 4x - 3 = (x-2)^2 - 7$ เราจะพบว่าพิกัดของจุดยอดคือ $(2, -7)$

โดยการเลื่อนขนานจุดยอด -4 หน่วยบนแกน X และ 3 หน่วยบนแกน Y จุดยอดที่ถูกเลื่อนจะมีพิกัด x เป็น

$2-4=-2$ และพิกัด y เป็น $-7+3=-4$

ดังนั้น เราจะพบว่าสมการสำหรับพาราโบลา คือ $y = \{x - (-2)\}^2 - 4 = x^2 + 4x$

$$\underline{y = x^2 + 4x}$$

check

ใช้ Equation (สมการ) บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณจุดยอดของพาราโบลา $y = x^2 - 4x - 3$

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด OK

① EXE $\ominus$ ④ EXE $\ominus$ ③ EXE EXE EXE EXE EXE

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $x=$
 $1x^2- \quad 4x \quad + \quad \quad$
 -3

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $x=$
 2

Min of $y=ax^2+bx+c$
 $y=$
 -7

PRACTICE

- ๒ จงหาสมการของพาราโบลาหลังจากเลื่อนขนานพาราโบลา $y = x^2 + 4x + 8$ ไป -3 หน่วยตามแกน X และ -5 หน่วยตามแกน Y

③ จงหาสมการของพาราโบลาหลังจากสะท้อนพาราโบลา $y = x^2 - 6x + 11$ ตามแกน X แกน Y และจุดกำเนิด

การหาสมการของฟังก์ชันกำลังสอง

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาสมการของฟังก์ชันกำลังสองโดยใช้เงื่อนไขต่าง ๆ

STUDY GUIDE

การหาสมการของฟังก์ชันกำลังสอง

ฟังก์ชันกำลังสองไม่สามารถแสดงฟังก์ชันกำลังสองเพียง 1 ฟังก์ชันได้ แม้ว่าเราจะรู้แกนสมมาตรและจุดยอดต่าง ๆ ของกราฟอยู่แล้ว ดังนั้น หากเรารู้แกนสมมาตรและจุดยอดหนึ่ง รวมถึงจุดหนึ่งบนเส้นโค้งของฟังก์ชันกำลังสองอยู่แล้ว เราก็สามารถแสดงฟังก์ชันกำลังสองได้เพียง 1 ฟังก์ชัน

การหาฟังก์ชันกำลังสองจากแกนสมมาตร จุดยอด และจุด 1 จุดบนเส้นโค้ง

หากเรารู้แกนสมมาตรและจุดยอดแล้ว เราสามารถใช้สมการ $y = a(x - p)^2 + q$ เพื่อแสดงฟังก์ชันและหาค่าต่าง ๆ ของ a , p และ q

- (1) แทนที่แกนสมมาตรและจุดยอดที่กำหนดไว้ใน $y = a(x - p)^2 + q$
- (2) แทนที่จุดบนเส้นโค้งในสมการที่ได้จากข้อ (1) และหาตัวแปรที่ไม่ทราบค่า
- (3) แทนที่ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่พบในข้อ (2) ในสมการที่ได้จากข้อ (1)

การหาฟังก์ชันกำลังสองจากจุด 3 จุดบนเส้นโค้ง

หากเรารู้จุด 3 จุดบนเส้นโค้ง เราสามารถใช้สมการ $y = ax^2 + bx + c$ เพื่อแสดงฟังก์ชันและแก้ระบบสมการที่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัวสำหรับตัวอักษร a , b และ c ได้

- (1) แทนที่พิกัดของจุด 3 จุดที่กำหนดไว้ใน $y = ax^2 + bx + c$
- (2) แก้ระบบสมการที่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัวที่ได้จากข้อ (1) เพื่อหา a , b และ c

EXERCISE

1 จงหาฟังก์ชันกำลังสองที่มีกราฟเป็นพาราโบลาในลักษณะต่อไปนี้

(1) จุดยอดคือจุด (2, 3) และจุดบนเส้นโค้งคือ (1, 5)

เนื่องจากจุดยอดคือจุด (2, 3) ฟังก์ชันกำลังสองที่เราพบคือ $y = a(x - p)^2 + q$ ซึ่งเราแทนที่ $p=2$ และ $q=3$ ก็จะได้ $y = a(x - 2)^2 + 3 \dots (i)$

กราฟของฟังก์ชันนี้ผ่านจุด (1, 5) ดังนั้นโดยการแทนที่ $x=1$ และ $y=5$ ในข้อ (i) เราจะได้ $5 = a(1 - 2)^2 + 3 \dots (ii)$ โดยการแก้ข้อ (ii) เราจะได้ $a=2$ ดังนั้น จะได้ $y = 2(x - 2)^2 + 3$ สำหรับสมการของฟังก์ชันกำลังสอง

$$y = 2(x - 2)^2 + 3$$

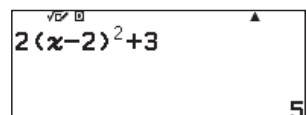
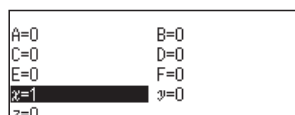
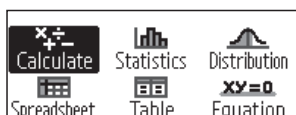


check

เมื่อเราแทนที่ $x=1$ ในฟังก์ชันกำลังสองที่เราได้ เราสามารถตรวจสอบว่าเราได้ $y=5$ โดยใช้ฟังก์ชัน VARIABLE (ตัวแปร) บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$

กด $\odot$ หลังจากป้อน $x=1$ แล้ว ให้กด $\odot$ หลังจากป้อน $2(x - 2)^2 + 3$ แล้ว ให้กด $\odot$



(2) แกนสมมาตรคือเส้นตรง $x=3$ และจุด 2 จุดบนเส้นโค้งคือ $(1, -9)$ และ $(2, -3)$

เนื่องจากแกนสมมาตรคือเส้นตรง $x=3$ แล้วฟังก์ชันกำลังสองที่เราพบคือ $y = a(x - p)^2 + q$ ซึ่งเราแทนที่ $p=3$ ก็จะได้ $y = a(x - 3)^2 + q \dots(i)$

กราฟของฟังก์ชันนี้ผ่านจุด $(1, -9)$ ดังนั้นโดยการแทนที่ $x=1$ และ $y=-9$ ในข้อ (i) เราจะได้

$$-9 = a(1 - 3)^2 + q \dots(ii)$$

ผ่านจุด $(2, -3)$ ดังนั้นโดยการแทนที่ $x=2$ และ $y=-3$ ในข้อ (i) เราจะได้ $-3 = a(2 - 3)^2 + q \dots(iii)$

เมื่อแก้ข้อ (ii) และ (iii) ได้แล้ว เราจะได้ $a=-2$ และ $q=-1$ ดังนั้นจะได้ $y = -2(x - 3)^2 - 1$ สำหรับสมการของฟังก์ชันกำลังสอง

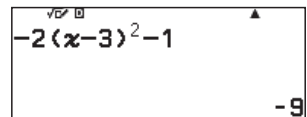
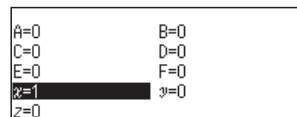
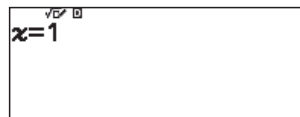
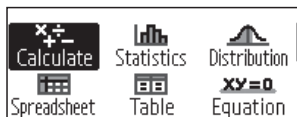
$$y = -2(x - 3)^2 - 1$$

check

เมื่อเราแทนที่ $x=1$ ในฟังก์ชันกำลังสองที่เราได้ เราสามารถตรวจสอบว่าเราได้ $y=-9$ โดยใช้ฟังก์ชัน VARIABLE (ตัวแปร) บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

กด $\odot$ หลังจากป้อน $x=1$ แล้ว ให้กด $\odot$ หลังจากป้อน $-2(x - 3)^2 - 1$ แล้ว ให้กด EXE



② จงหาฟังก์ชันกำลังสองสำหรับพาราโบลาที่ผ่านจุด 3 จุด $(-1, 5)$, $(1, -1)$ และ $(3, 1)$

โดยกำหนดให้ฟังก์ชันกำลังสองที่เราได้เป็น $y = ax^2 + bx + c$

กราฟของฟังก์ชันนี้ผ่านจุด $(-1, 5)$ ดังนั้นจึงเป็น $5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \dots(i)$

ผ่านจุด $(1, -1)$ ดังนั้นจึงเป็น $-1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \dots(ii)$

ผ่านจุด $(3, 1)$ ดังนั้นจึงเป็น $1 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \dots(iii)$

เมื่อแก้ข้อ (i), (ii) และข้อ (iii) แล้ว เราจะได้ $a=1$, $b=-3$ และ $c=1$ ดังนั้นจะได้ $y = x^2 - 3x + 1$ สำหรับสมการของฟังก์ชันกำลังสอง

$$y = x^2 - 3x + 1$$

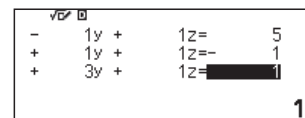
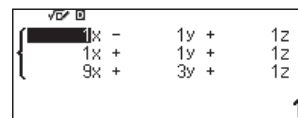
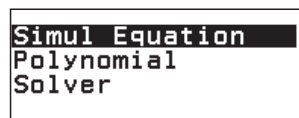
check

จาก Equation (สมการ) บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้เลือกกระบวนสมการมีตัวแปร 3 ตัวเพื่อแก้สมการ

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Simul Equation (ระบบสมการ)] กด OK เลือก [3 Unknowns (ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัว)] กด OK

① EXE $\odot$ ① EXE ① EXE ⑤ EXE ① EXE ① EXE ① EXE $\odot$ ① EXE ⑨ EXE ③ EXE ① EXE ① EXE EXE



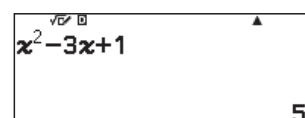
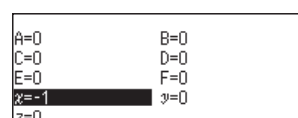
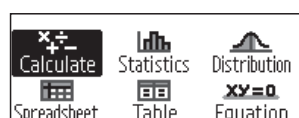
EXE EXE



เมื่อเราแทนที่ $x=-1$ ในฟังก์ชันกำลังสองที่เราได้ เราสามารถตรวจสอบได้ว่าเราได้ $y=5$ โดยใช้ฟังก์ชัน VARIABLE (ตัวแปร) บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

กด $\odot$ หลังจากป้อน $x=-1$ แล้ว ให้กด $\odot$ หลังจากป้อน $x^2 - 3x + 1$ แล้ว ให้กด EXE



PRACTICE

① จงหาฟังก์ชันกำลังสองที่มีกราฟเป็นพาราโบลาในลักษณะต่อไปนี้

(1) จุดยอดคือจุด $(-1, 2)$ และจุดบนเส้นโค้งคือ $(-2, 5)$

(2) แกนสมมาตรคือเส้นตรง $x=2$ และจุด 2 จุดบนเส้นโค้งคือ $(0, -3)$ และ $(1, 0)$

๒ จงหาฟังก์ชันกำลังสองสำหรับพาราโบลาที่ผ่านจุด 3 จุด $(-2, 7)$, $(1, 4)$ และ $(3, 32)$

ฟังก์ชันกำลังสอง: ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง (1)

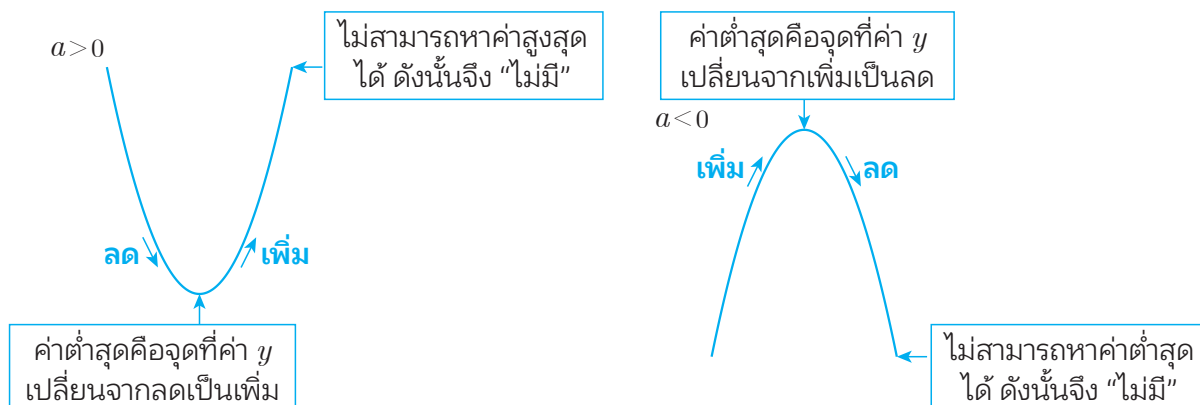
TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองเมื่อโดเมนของฟังก์ชันกำลังสองไม่มีลิมิต

STUDY GUIDE

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองเมื่อโดเมนไม่มีลิมิต

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ คือค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของค่า y ซึ่งแตกต่างกันเมื่อ $a > 0$ และเมื่อ $a < 0$



หากโดเมนไม่มีลิมิต → หาจุดยอด

EXERCISE

- ◆ จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 + 4x - 4$ พร้อมทั้งระบุค่า x โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ทางด้านขวา เราจะได้ $y = (x + 2)^2 - 8$
ดังนั้น เมื่อ $x = -2$ ค่าต่ำสุดคือ -8
ไม่มีค่าสูงสุด

ค่าสูงสุด ... ไม่มี; ค่าต่ำสุด ... -8 (เมื่อ $x = -2$)



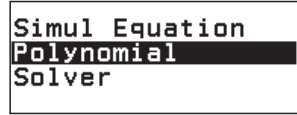
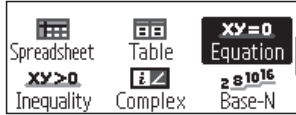
check

ใช้ Equation (สมการ) เพื่อหาจุดยอด (ค่าต่ำสุด) ของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 + 4x - 4$

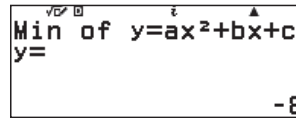
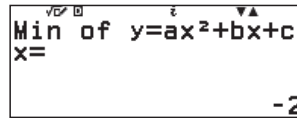
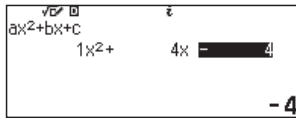
นอกจากนี้ คุณยังใช้คิวอาร์โค้ดเพื่อยืนยันกราฟได้

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$

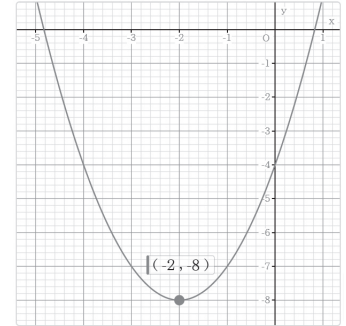
เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด $\odot$ เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด $\odot$



$\odot$ EXE $\odot$ EXE $\odot$ EXE $\odot$ EXE $\odot$ EXE $\odot$ EXE $\odot$ EXE $\odot$ EXE



กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

◆ จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองต่อไปนี้ พร้อมทั้งระบุค่า x

(1) $y = x^2 + 3x + 1$

(2) $y = -2x^2 + 2x + 2$

ฟังก์ชันกำลังสอง: ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง (2)

TARGET

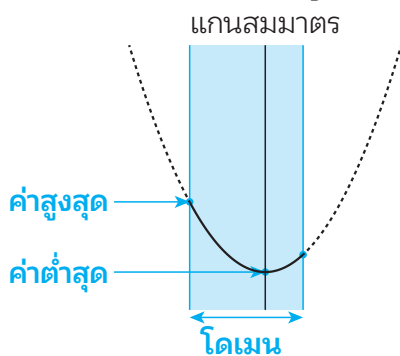
การทำความเข้าใจวิธีหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองเมื่อโดเมนของฟังก์ชันกำลังสองมีลิมิต

STUDY GUIDE

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองเมื่อโดเมนมีลิมิต

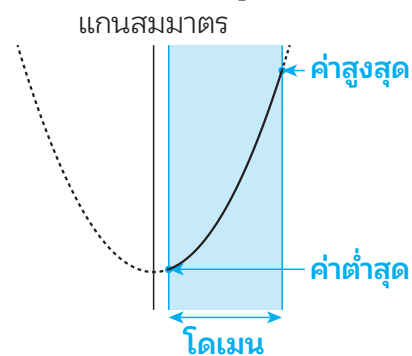
เมื่อโดเมนของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ มีลิมิต ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดจะแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับว่าแกนสมมาตรที่มีจุดยอด อยู่ในโดเมนหรือไม่

เมื่อแกนสมมาตรอยู่ในโดเมน



เนื่องจากแกนสมมาตรที่มีจุดยอด อยู่ในโดเมน ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดนั้นสัมพันธ์กับแกนสมมาตร (พิจารณาปลายทั้งสองด้านของโดเมนและแกนสมมาตร)

เมื่อแกนสมมาตรไม่ได้อยู่ในโดเมน



เนื่องจากแกนสมมาตรที่มีจุดยอด ไม่อยู่ในโดเมน ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดนั้นไม่สัมพันธ์กับแกนสมมาตร (พิจารณาเฉพาะปลายทั้งสองด้านของโดเมน)

เมื่อโดเมนมีลิมิต → สังเกตตำแหน่งของแกนสมมาตรที่มีจุดยอด และปลายทั้งสองด้านของโดเมน

EXERCISE

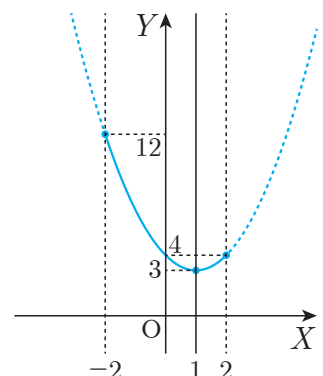
◆ จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 - 2x + 4$ ในโดเมนต่อไปนี้ พร้อมทั้งระบุค่า x

(1) $-2 \leq x \leq 2$

โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ทางด้านขวา เราจะได้ $y = (x-1)^2 + 3$ ดังนั้นแกนสมมาตรคือ $x=1$

ดังนั้น จากรูปภาพด้านขวา เมื่อ $x=-2$ ค่าสูงสุดคือ 12 และเมื่อ $x=1$ ค่าต่ำสุดคือ 3

ค่าสูงสุด ... 12 (เมื่อ $x=-2$)
ค่าต่ำสุด ... 3 (เมื่อ $x=1$)

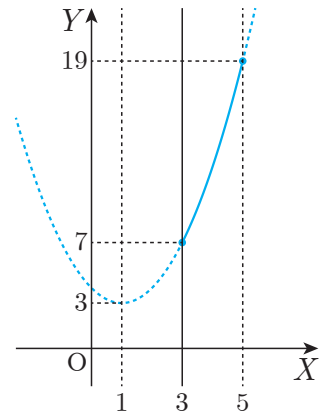


(2) $3 \leq x \leq 5$

โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ทางด้านขวา เราจะได้ $y = (x-1)^2 + 3$ ดังนั้นแกนสมมาตรคือ $x=1$

ดังนั้น จากรูปภาพด้านขวา เมื่อ $x=5$ ค่าสูงสุดคือ 19 และเมื่อ $x=3$ ค่าต่ำสุดคือ 7

ค่าสูงสุด ...19 (เมื่อ $x=5$)
ค่าต่ำสุด ...7 (เมื่อ $x=3$)

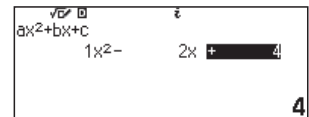
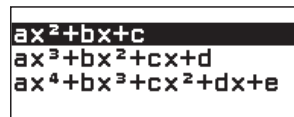
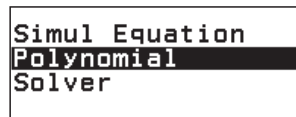
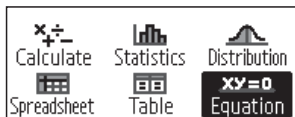


check

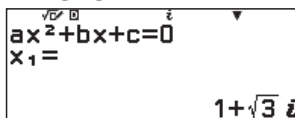
จงวาดกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 - 2x + 4$ และยืนยันค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของโดเมน

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด $\odot$ เลือก [$ax^2 + bx + c$] กด $\odot$ ① EXE ② EXE ③ EXE ④ EXE ⑤ EXE



กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

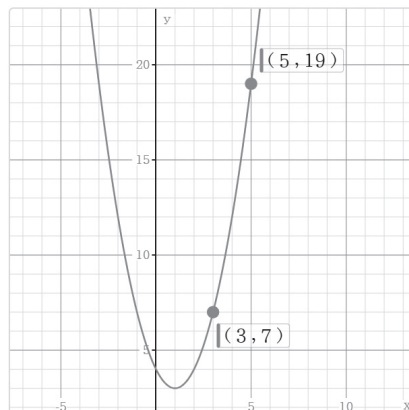
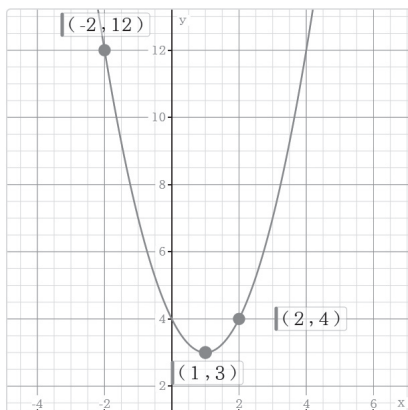


(1) หลังจากปรับเรนจ์ของกราฟแล้ว กำหนดให้ $x=-2$ และ $x=2$ และยืนยันค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในเรนจ์

จากกราฟ หากโดเมนคือ $-2 \leq x \leq 2$ เราสามารถยืนยันได้ว่าเมื่อ $x=-2$ ค่าสูงสุดคือ 12 และเมื่อ $x=1$ ค่าต่ำสุดคือ 3

(2) หลังจากปรับเรนจ์ของกราฟแล้ว กำหนดให้ $x=3$ และ $x=5$ และยืนยันค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในเรนจ์

จากกราฟ หากโดเมนคือ $3 \leq x \leq 5$ เราสามารถยืนยันได้ว่าเมื่อ $x=5$ ค่าสูงสุดคือ 19 และเมื่อ $x=3$ ค่าต่ำสุดคือ 7



PRACTICE

- ① จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = -x^2 - 4x + 5$ โดยกำหนดให้ $-4 \leq x \leq 1$ และหาค่าของ x

ADVANCED

- ② รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีเส้นรอบรูป 12 ซม. จง
หาค่าสูงสุดของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดัง
กล่าว

1cm



5cm

2cm



4cm

3cm



3cm

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง (3)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองเมื่อโดเมนด้านหนึ่งของฟังก์ชันกำลังสองเป็นตัวแปร

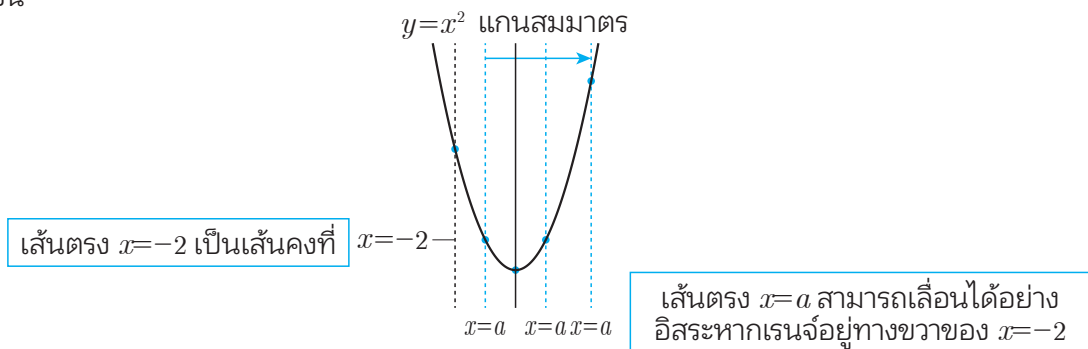
STUDY GUIDE

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองเมื่อโดเมนเป็นตัวแปร

เมื่อมีตัวแปรอยู่ในโดเมนของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองจะเปลี่ยนตามค่าที่กำหนดให้กับตัวแปรนั้น ในกรณีต่าง ๆ เหล่านี้ เราสามารถเข้าใจได้ดังต่อไปนี้

พิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเมื่อเส้นตรงที่ประกอบด้วยตัวแปรถูกเลื่อน

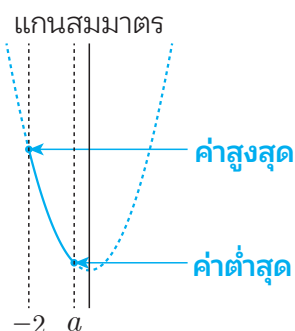
Ex. โดยกำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว ($a > -2$) แล้วเมื่อโดเมนของ $y = x^2$ คือ $-2 \leq x \leq a$ เราสามารถคิดได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



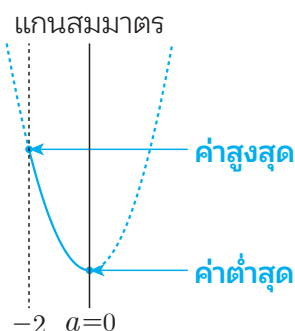
ตามที่เห็นในแผนภาพด้านบน ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดจะเปลี่ยนตามตำแหน่งของเส้นตรง $x = a$ ดังนั้น เราจึงจำเป็นต้องพิจารณาตำแหน่งต่าง ๆ ของเส้นตรง เมื่อเลื่อน $x = a$ ไปทางขวาเล็กน้อย ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดจะเปลี่ยนดังต่อไปนี้

เราสามารถพิจารณากรณีของ (i) ถึง (v) แยกกันตามความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของเส้นตรง $x = -2$, $x = 0$, $x = a$ และ $x = 2$ ได้

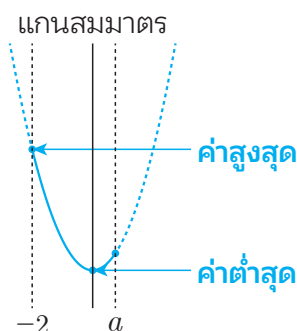
(i) $-2 < a < 0$



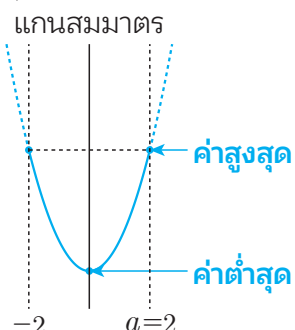
(ii) $a = 0$



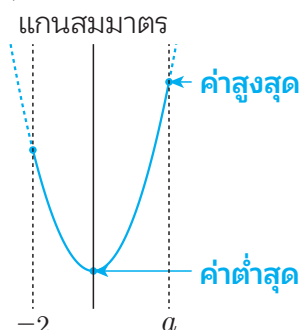
(iii) $0 < a < 2$



(iv) $a = 2$



(v) $2 < a$



EXERCISE

◆ โดยกำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 + 2x$ ($a \leq x \leq a+2$)

จาก $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ เราจะได้แกนสมมาตร $x = -1$

จาก $a+2 < -1$ เราจะได้ $a < -3$... (i)

จาก $a+1 < -1 \leq a+2$ เราจะได้ $-3 \leq a < -2$... (ii)

จาก $a < -1 \leq a+1$ เราจะได้ $-2 \leq a < -1$... (iii)

$-1 \leq a$... (iv)

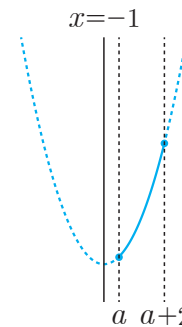
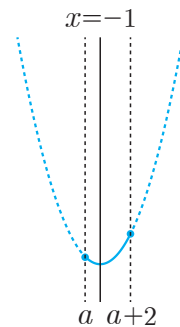
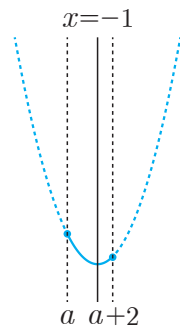
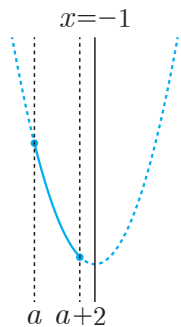
ดังนั้นให้พิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้แยกกัน

(i) $a < -3$

(ii) $-3 \leq a < -2$

(iii) $-2 \leq a < -1$

(iv) $-1 \leq a$



ดังนั้น ใน (i) และ (ii) สำหรับ $x = a$ เราจะได้ค่าสูงสุด $a^2 + 2a$

ใน (iii) และ (iv) สำหรับ $x = a+2$ เราจะได้ค่าสูงสุด $(a+2)^2 + 2(a+2) = a^2 + 6a + 8$

**เมื่อ $a < -2$ แล้วสำหรับ $x = a$ ค่าสูงสุดคือ $a^2 + 2a$
เมื่อ $-2 \leq a$ แล้วสำหรับ $x = a+2$ ค่าสูงสุดคือ $a^2 + 6a + 8$**

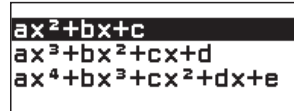
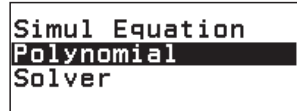
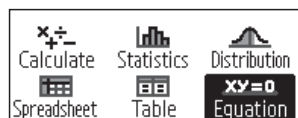


check

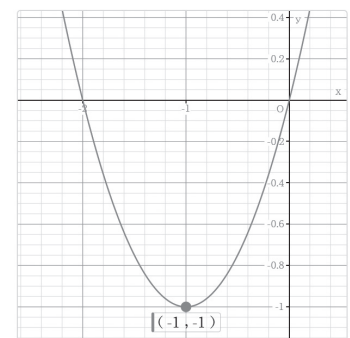
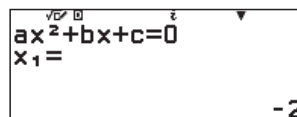
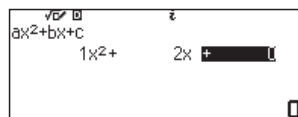
ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อสร้างกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 + 2x$ และพิจารณาโดเมน

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด OK



1 EXE 2 EXE 0 EXE EXE



กด $\uparrow$ EXE สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

- ◆ โดยกำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 + 4x - 3$ ($a \leq x \leq a+4$)

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง (4)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองเมื่อมีตัวแปรในสัมประสิทธิ์และค่าคงตัว

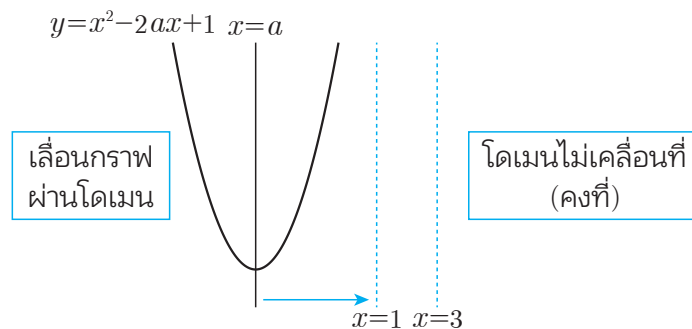
STUDY GUIDE

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสองเมื่อมีตัวแปรในสัมประสิทธิ์และค่าคงตัว

เมื่อสัมประสิทธิ์ x ของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ เป็นตัวแปร แล้วค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดมีแกนสมมาตรที่มีตัวแปรอยู่ด้วย ดังนั้นเราจึงพิจารณาได้ดังนี้

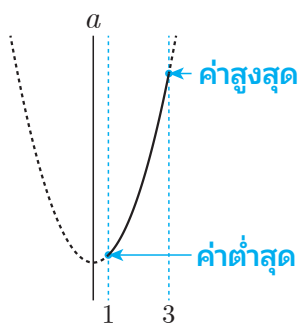
พิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเมื่อแกนสมมาตรถูกเลื่อน

Ex โดยกำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว และเมื่อโดเมนของ $y = x^2 - 2ax + 1 = (x - a)^2 - a^2 + 1$ คือ $1 \leq x \leq 3$ เราสามารถคิดได้ว่าเป็น “การเลื่อนแกนสมมาตร” กล่าวคือ “การเลื่อนกราฟ”

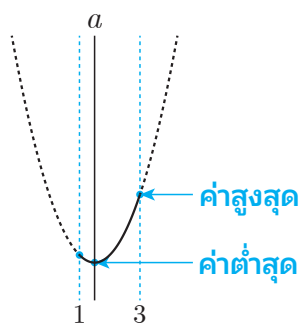


ในแผนภาพด้านบน โดยการเลื่อนกราฟไปทางขวาเรื่อย ๆ เราจะเห็นว่าค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเปลี่ยนไป

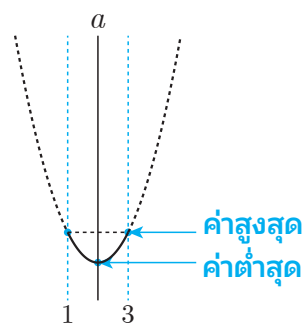
(i) $a < 1$



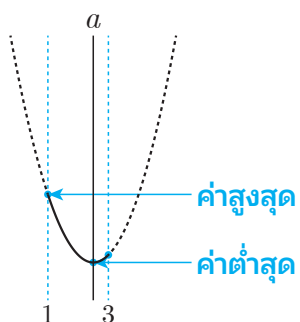
(ii) $1 \leq a < 2$



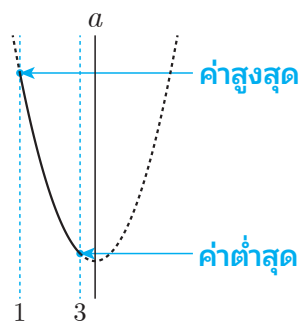
(iii) $a = 2$



(iv) $2 < a \leq 3$



(v) $3 < a$



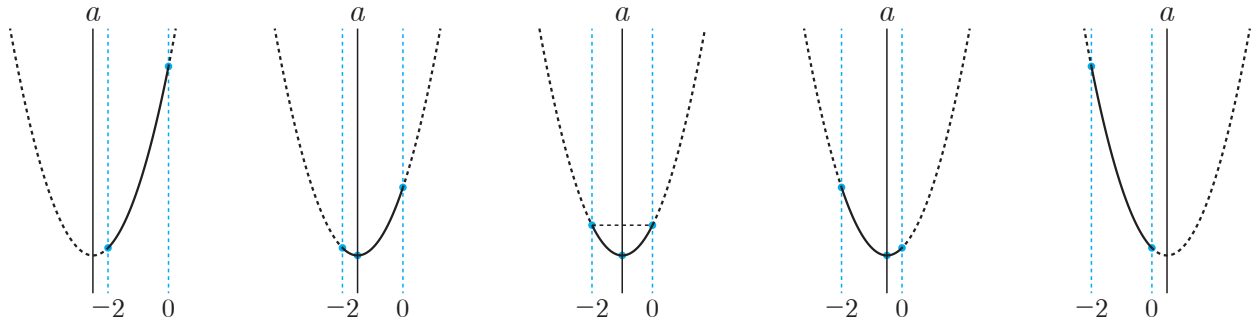
EXERCISE

- ① โดยกำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 - 2ax$ ($-2 \leq x \leq 0$)

จาก $y = x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$ เราจะได้แกนสมมาตร $x = a$

ดังนั้นให้พิจารณาแต่ละข้อตามที่แสดงด้านล่างนี้แยกกัน

- (i) $a < -2$ (ii) $-2 \leq a < -1$ (iii) $a = -1$ (iv) $-1 < a \leq 0$ (v) $0 < a$



ดังนั้น ใน (i) และ (ii) เราจะได้ค่าสูงสุด $0^2 - 2a \cdot 0 = 0$ สำหรับ $x = 0$

ใน (iii) สำหรับ $x = -2$ หรือ 0 เราจะได้ค่าสูงสุด $0^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 0$

ใน (iv) และ (v) สำหรับ $x = -2$ เราจะได้ค่าสูงสุด $(-2)^2 - 2a \cdot (-2) = 4a + 4$

เมื่อ $a < -1$ แล้วสำหรับ $x = 0$ ค่าสูงสุดคือ 0
เมื่อ $a = -1$ แล้วสำหรับ $x = -2$ หรือ 0 ค่าสูงสุดคือ 0
เมื่อ $-1 < a$ แล้วสำหรับ $x = -2$ ค่าสูงสุดคือ $4a + 4$

- ② โดยกำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 - 4ax + 4a^2$ ($-4 \leq x \leq 0$)

จาก $y = x^2 - 4ax + 4a^2 = (x - 2a)^2$ เราจะได้แกนสมมาตร $x = 2a$

จาก $2a < -4$ เราจะได้ $a < -2$... (i)

จาก $-4 \leq 2a < -2$ เราจะได้ $-2 \leq a < -1$... (ii)

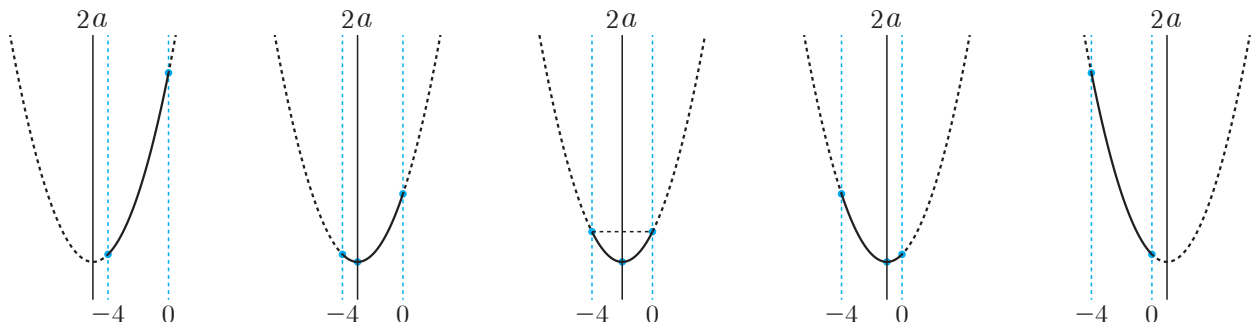
จาก $2a = -2$ เราจะได้ $a = -1$... (iii)

จาก $-2 < 2a \leq 0$ เราจะได้ $-1 < a \leq 0$... (iv)

จาก $0 < 2a$ เราจะได้ $0 < a$... (v)

ดังนั้นให้พิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้อย่างแยกกัน

- (i) $a < -2$ (ii) $-2 \leq a < -1$ (iii) $a = -1$ (iv) $-1 < a \leq 0$ (v) $0 < a$



ดังนั้น ใน (i) สำหรับ $x = -4$ เราจะได้ค่าต่ำสุด $(-4)^2 - 4a \cdot (-4) + 4a^2 = 4a^2 + 16a + 16$

ใน (ii), (iii) และ (iv) สำหรับ $x = 2a$ เราจะได้ค่าต่ำสุด $(2a)^2 - 4a \cdot (2a) + 4a^2 = 0$

ใน (v) สำหรับ $x = 0$ เราจะได้ค่าต่ำสุด $0^2 - 4a \cdot 0 + 4a^2 = 4a^2$

เมื่อ $a < -2$ แล้วสำหรับ $x = -4$ ค่าต่ำสุดคือ $4a^2 + 16a + 16$
เมื่อ $-2 \leq a \leq 0$ แล้วสำหรับ $x = 2a$ ค่าต่ำสุดคือ 0
เมื่อ $0 < a$ แล้วสำหรับ $x = 0$ ค่าต่ำสุดคือ $4a^2$

PRACTICE

① โดยกำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 - 2ax + 3a^2$ ($0 \leq x \leq 2$)

② โดยกำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง $y = x^2 - 2ax - 1$ ($0 \leq x \leq 4$)

จุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง (1)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

STUDY GUIDE

พิกัดของจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

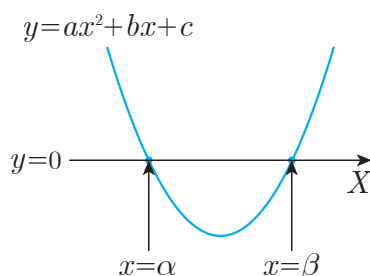
เมื่อเราแทนที่ $y=0$ ในฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ ฟังก์ชันกำลังสองดังกล่าวจะกลายเป็นสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$

โดยการแก้สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ ซึ่งเราแทนที่ $y=0$ แล้ว คำตอบที่เราพบคือพิกัด x ของจุดตัดบนเส้น $y=0$ บนกราฟของสมการกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ กล่าวโดยเจาะจงก็คือพิกัด x ของจุดตัดบนแกน X

พิกัด x ของจุดตัดบนแกน X
ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง
 $y = ax^2 + bx + c$

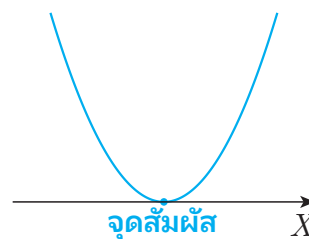


คำตอบของสมการกำลังสอง
คือ $ax^2 + bx + c = 0$



แก้สมการกำลังสอง
 $ax^2 + bx + c = 0$
 $\Downarrow$
 $x = \alpha, \beta$

เมื่อมีจุดตัดเพียง 1 จุดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง เรากล่าวได้ว่ากราฟ และแกน X คือ **เส้นสัมผัส** และในกรณีนี้ เราเรียกจุดตัดว่า **จุดสัมผัส**



EXERCISE

① จงหาพิกัด x ของจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

(1) $y = x^2 + 5x + 6$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x+2)(x+3) = 0$$

$$x = -2, -3$$

(2) $y = x^2 - 2x + 1$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

-2, -3

1

2 จงหาพิกัด x ของจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

(1) $y = x^2 - 2x - 1$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

$$1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$$

(2) $y = 2x^2 + 3x - 4$

$$2x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}, \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$$



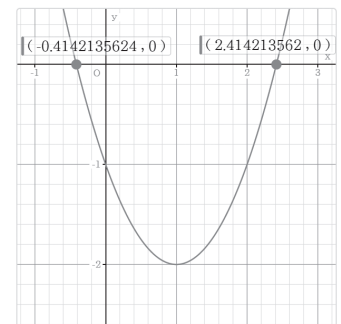
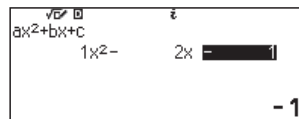
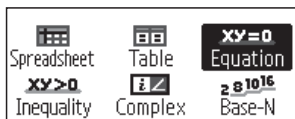
check

ใช้ Equation (สมการ) เพื่อยืนยันคำตอบของสมการกำลังสอง

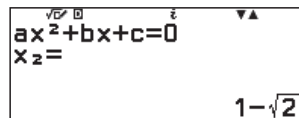
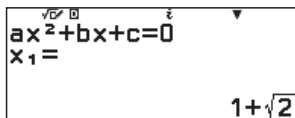
(1)

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

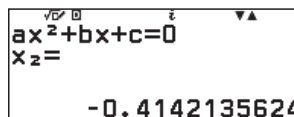
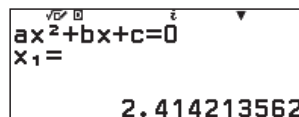
เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก [$ax^2 + bx + c$] กด OK ① EXE ② EXE ③ EXE ④ EXE



EXE กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



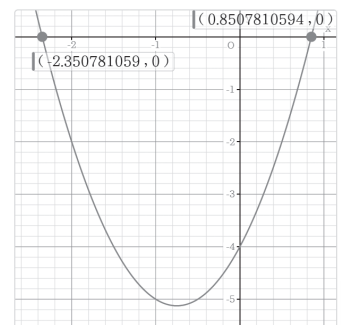
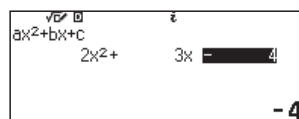
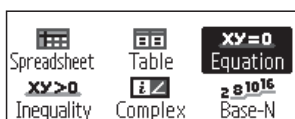
นอกจากนี้ ค่าด้านบนที่มีเครื่องหมาย $\sqrt{}$ สามารถแสดงเป็นเลขฐานสิบได้โดยกด $\odot$ เลือก [Decimal (เลขฐานสิบ)] และกด OK



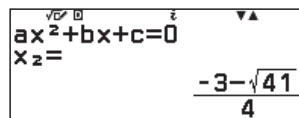
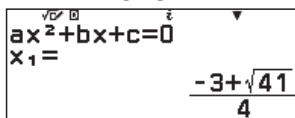
(2)

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

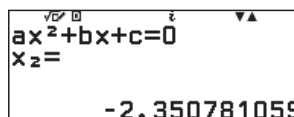
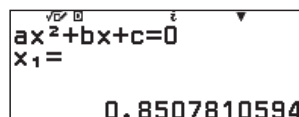
เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก [$ax^2 + bx + c$] กด OK ② EXE ③ EXE ④ EXE ⑤ EXE



EXE กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



นอกจากนี้ ค่าด้านบนที่มีเครื่องหมาย $\sqrt{}$ สามารถแสดงเป็นเลขฐานสิบได้โดยกด $\odot$ เลือก [Decimal (เลขฐานสิบ)] และกด OK



PRACTICE

① จงหาพิกัด x ของจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

(1) $y = x^2 - 3x - 4$

(2) $y = x^2 + 6x + 9$

② จงหาพิกัด x ของจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

(1) $y = 3x^2 + 6x + 2$

(2) $y = 2x^2 + 5x - 5$

จุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง (2)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาจำนวนจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

STUDY GUIDE

จำนวนจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

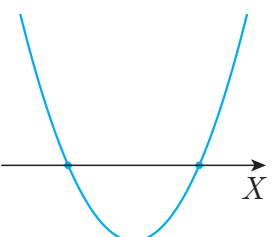
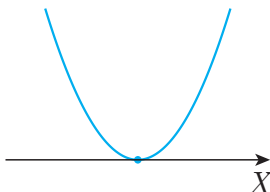
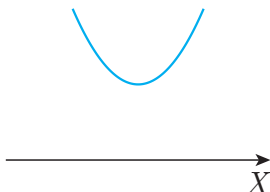
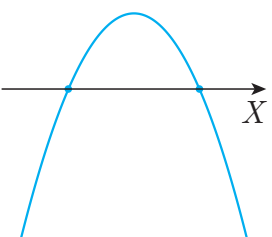
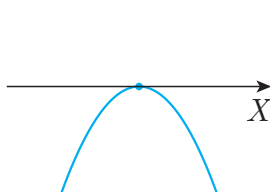
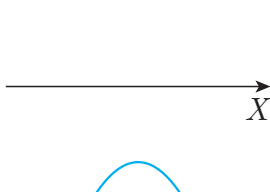
จำนวนรากคำตอบของจำนวนจริงของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ สามารถกำหนดได้โดยใช้ดิสคริมีแนนต์ $D = b^2 - 4ac$

นอกจากนี้ รากคำตอบของจำนวนจริงของสมการกำลังสองคือพิกัด X ของจุดตัดบนแกน x ของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$

ดังนั้น เราสามารถหาจำนวนจุดตัดบนแกน X บนกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ ได้โดยใช้ดิสคริมีแนนต์ $D = b^2 - 4ac$ ตามที่แสดงด้านล่าง

 $D > 0 \Rightarrow$ มีจุดตัด 2 จุด $D = 0 \Rightarrow$ มีจุดตัด 1 จุด $D < 0 \Rightarrow$ มีจุดตัด 0 จุด (ไม่มีจุดตัด)ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของแกน X และกราฟฟังก์ชันกำลังสอง

ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของแกน X และกราฟฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ แสดงอยู่ด้านล่างสำหรับ D ซึ่งก็คือดิสคริมีแนนต์ของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$

เครื่องหมายของดิสคริมีแนนต์ D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของแกน X และกราฟ	ตัดกันที่จุดต่าง 2 จุด	เส้นสัมผัสที่จุด 1 จุด	ไม่มีจุดตัด
จำนวนของจุดตัด	2	1	0
การตัดกันที่แกน X เมื่อ $a > 0$			
การตัดกันที่แกน X เมื่อ $a < 0$			

EXERCISE

- ◆ จงหาจำนวนของจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสองที่ด้านล่าง นอกจากนี้ หากมีจุดตัดบนแกน X ให้หาพิกัด x ของจุดตัดด้วย

(1) $y = x^2 + 3x + 2$

โดยกำหนดให้ดิสคริมีแนนต์ของ $x^2 + 3x + 2 = 0$ คือ D ซึ่งเราจะได้ $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$

ดังนั้นจึงมีจุดตัด 2 จุดบนแกน X

และพิกัด x ของจุดตัดคือ:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$x = -1, -2$$

จำนวนของจุดตัด ...2 พิกัด x ของจุดตัด ...-1, -2

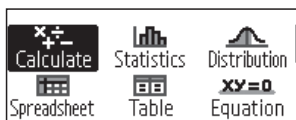


check

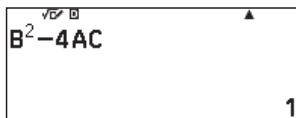
ใช้ฟังก์ชัน VARIABLE (ตัวแปร) เพื่อตรวจสอบค่าของดิสคริมีแนนต์ D

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

กด 2nd หลังจากป้อน $[A=1, B=3 \text{ และ } C=2]$ แล้ว ให้กด $\odot$



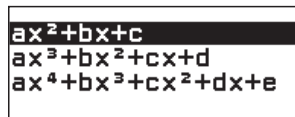
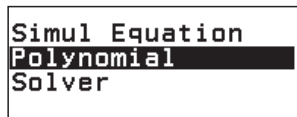
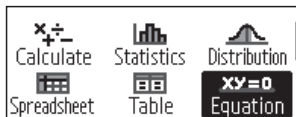
$\uparrow$ $\odot$ 2nd $\odot$ $\odot$ $\odot$ $\uparrow$ $\odot$ $\uparrow$ $\odot$ $\odot$ EXE



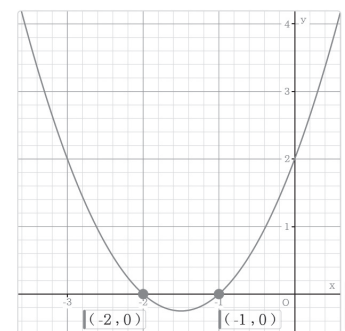
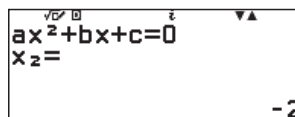
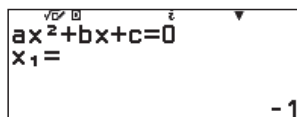
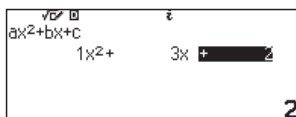
ใช้ Equation (สมการ) และกราฟเพื่อยืนยันจุดตัดบนแกน X

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด OK



$\odot$ EXE $\odot$ EXE $\odot$ EXE EXE EXE



กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

- ◆ จงหาจำนวนของจุดตัดบนแกน X ของกราฟฟังก์ชันกำลังสองที่ด้านล่าง นอกจากนี้ หากมีจุดตัดบนแกน X ให้หาพิกัด x ของจุดตัดด้วย

(1) $y = x^2 + 6x + 8$

(2) $y = x^2 - 14x + 49$

(3) $y = 3x^2 - 6x + 4$

จุดตัดบนพาราโบลาและเส้น

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาจุดตัดของพาราโบลาและเส้น

STUDY GUIDE

จุดตัดบนพาราโบลาและเส้น

สามารถหาจุดตัดบนเส้นและพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ได้โดยการแก้สมการกำลังสองที่ได้มาจากการแก้ระบบสมการแต่ละข้อด้วยการตัด y ออก

(1) พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ และแกน X (เส้น $y=0$)

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

(2) พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ และเส้น $y=k$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = k \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = k$$

(3) พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ และเส้น $y=mx+n$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = mx + n$$

เมื่อสมการกำลังสองที่ได้จากการตัด y ออกมีรากหลายตัว เราจึงกล่าวได้ว่ามี **เส้นสัมผัส**กับพาราโบลา และเรียกจุดตัดว่า **จุดสัมผัส**

EXERCISE

◆ จงหาพิกัดจุดตัดของเส้นและพาราโบลาด้านล่าง

(1) พาราโบลา $y = x^2 - 3$ และเส้น $y = x - 1$

จงแก้ระบบสมการโดยการตัด y ออก แล้วจึงแก้สมการกำลังสอง

$$x^2 - 3 = x - 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1, 2$$

ดังนั้น เมื่อ $x = -1$, $y = -2$ และเมื่อ $x = 2$, $y = 1$

$(-1, -2), (2, 1)$

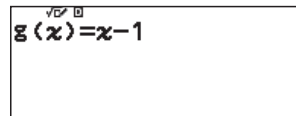
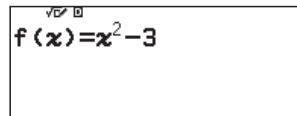
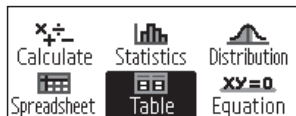


check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^2 - 3$ แล้ว ให้กด EXE

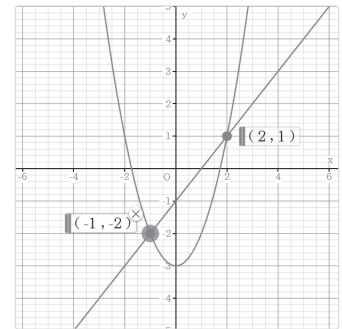
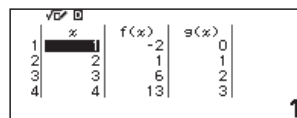
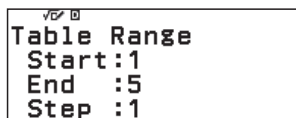
และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = x - 1$



กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):5, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



(2) พาราโบลา $y = x^2 - 3x$ และเส้น $y = x - 4$

จงแก้ระบบสมการโดยการตัด y ออก แล้วจึงแก้สมการกำลังสอง

$$x^2 - 3x = x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

ดังนั้น เมื่อ $x = 2$, $y = -2$

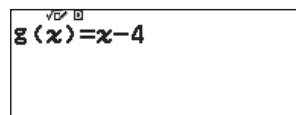
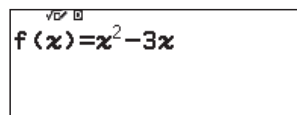
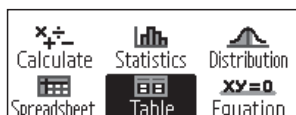
$(2, -2)$

check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^2 - 3x$ แล้ว ให้กด EXE

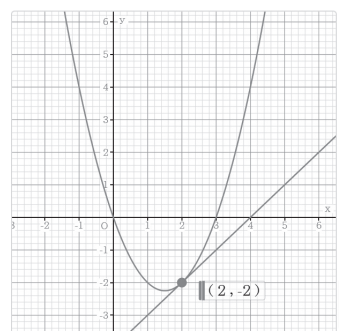
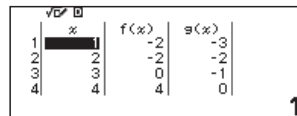
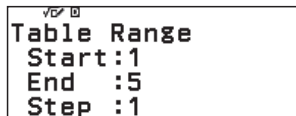
และด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = x - 4$



กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

- ◆ จงหาพิกัดจุดตัดของเส้นและพาราโบลาด้านล่าง
- (1) พาราโบลา $y = x^2 - 4x + 2$ และเส้น $y = 2x - 3$

(2) พาราโบลา $y = -3x^2 - 2x + 2$ และเส้น $y = 2x + \frac{10}{3}$

อสมการกำลังสอง

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแก้อสมการกำลังสอง

STUDY GUIDE

อสมการกำลังสอง

สำหรับอสมการของ x เมื่อเราเรียงพจน์ทั้งหมดของอสมการโดยย้ายไปทางด้านซ้าย ด้านซ้ายของอสมการจะกลายเป็นสมการกำลังสองสำหรับ x ดังนั้นเราจึงเรียกว่า **อสมการกำลังสอง** อสมการกำลังสองสามารถแก้ได้โดยใช้กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ ตามที่แสดงด้านล่าง โปรดทราบว่าในส่วนนี้เรากำลังพิจารณาว่า $a > 0$ ทั้งหมด แต่หาก $a < 0$ เราจะคูณทั้งสองข้างด้วย -1 เพื่อที่จะได้ $a > 0$ (โปรดทราบว่าทิศทางของเครื่องหมายอสมการจะกลับด้านกัน)

วิธีแก้อสมการกำลังสอง

คำตอบของสมการกำลังสองจำแนกตามดิสคริมีแนนต์ D ของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ และเราจะพิจารณาตำแหน่งของค่า y บนกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ เพื่อหาเรนจ์บนแกน X จากคำตอบของ $ax^2 + bx + c = 0$ เราจะได้ $x = \alpha, \beta (\alpha < \beta)$

(1) เมื่อ $D > 0$ (กราฟตัดกับแกน X ที่จุดต่าง 2 จุด)

พิจารณาว่ากราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ อยู่ทางด้านบนหรือด้านล่างของแกน X

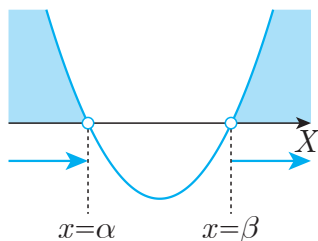
(a) คำตอบของ $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x < \alpha, \beta < x$

(b) คำตอบของ $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x \leq \alpha, \beta \leq x$

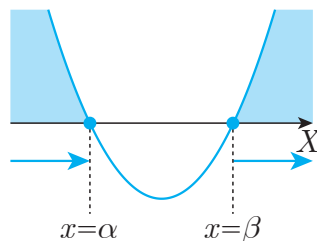
(c) คำตอบของ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \alpha < x < \beta$

(d) คำตอบของ $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta$

(a) $ax^2 + bx + c > 0$

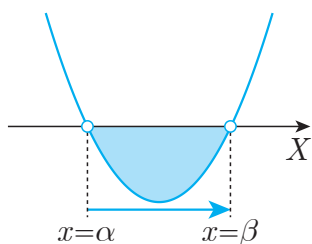


(b) $ax^2 + bx + c \geq 0$

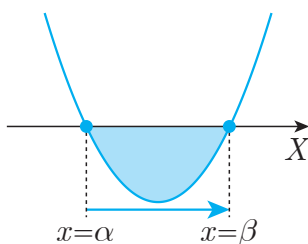


คำตอบคือเรนจ์ของ x ซึ่งค่า y อยู่ทางด้านบนของแกน X

(c) $ax^2 + bx + c < 0$



(d) $ax^2 + bx + c \leq 0$



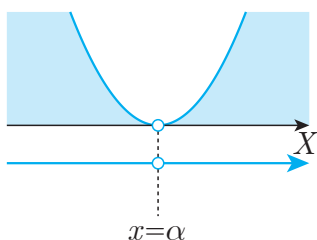
คำตอบคือเรนจ์ของ x ซึ่งค่า y อยู่ด้านล่างของแกน X

(2) เมื่อ $D=0$ (กราฟเป็นเส้นสัมผัสกับแกน X)

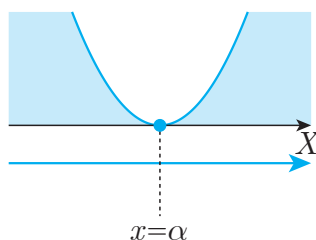
พิจารณาว่ากราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ และแกน X มีจุดสัมผัส $x=\alpha$ หรือไม่

- (a) คำตอบของ $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow$ จำนวนจริงทั้งหมดนอกเหนือจาก α
- (b) คำตอบของ $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow$ จำนวนจริงทั้งหมด
- (c) คำตอบของ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow$ ไม่มีคำตอบ
- (d) คำตอบของ $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x=\alpha$

(a) $ax^2 + bx + c > 0$

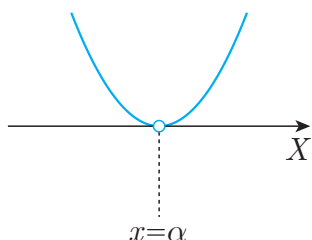


(b) $ax^2 + bx + c \geq 0$

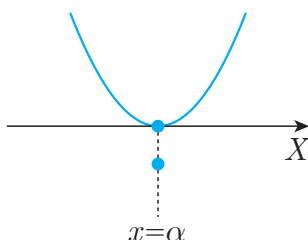


คำตอบคือเรนจ์ของ x ซึ่งค่า y อยู่ทางด้านบนของแกน X

(c) $ax^2 + bx + c < 0$



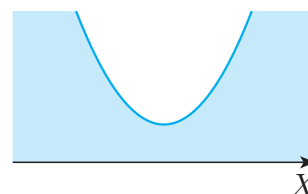
(d) $ax^2 + bx + c \leq 0$



คำตอบคือเรนจ์ของ x ซึ่งค่า y อยู่ด้านล่างของแกน X

(3) เมื่อ $D<0$ (กราฟไม่มีจุดตัดกับแกน X)

- (a) คำตอบของ $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow$ จำนวนจริงทั้งหมด
- (b) คำตอบของ $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow$ จำนวนจริงทั้งหมด
- (c) คำตอบของ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow$ ไม่มีคำตอบ
- (d) คำตอบของ $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow$ ไม่มีคำตอบ



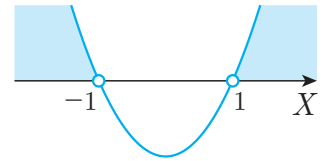
EXERCISE

◆ จงแก้สมการกำลังสองต่อไปนี้

(1) $x^2 - 1 > 0$

โดยการแก้ $x^2 - 1 = 0$ เราจะได้ $x = -1, 1$

ดังนั้น จากรูปภาพด้านขวา เราจะได้ $x < -1, 1 < x$



$x < -1, 1 < x$

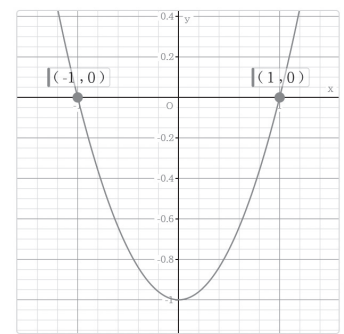
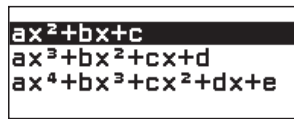
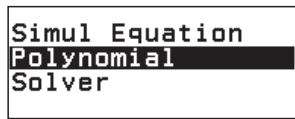
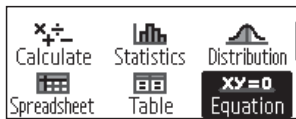


check

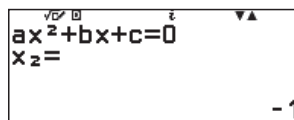
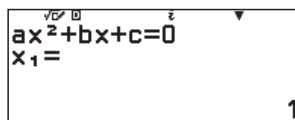
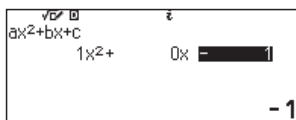
ใช้ Equation (สมการ) ในการวาดกราฟเพื่อยืนยันจุดตัดบนแกน x แล้วจึงหาเรนจ์ของคำตอบของสมการ

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด $\odot$ เลือก [$ax^2 + bx + c$] กด $\odot$



$\odot$ EXE $\odot$ EXE $\ominus$ $\odot$ EXE $\odot$ EXE



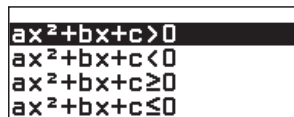
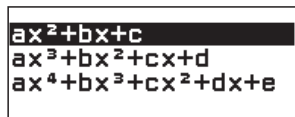
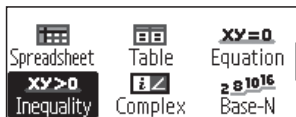
กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



นอกจากนี้ คุณยังสามารถใช้ Inequality (อสมการ) เพื่อแก้สมการกำลังสองโดยตรงและแสดงผลลัพธ์ในแผนภาพได้

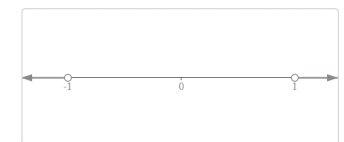
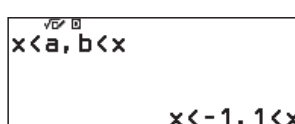
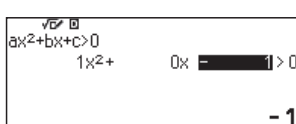
กด $\odot$ เลือก [Inequality (อสมการ)] กด $\odot$

เลือก [$ax^2 + bx + c$] กด $\odot$ เลือก [$ax^2 + bx + c > 0$] กด $\odot$



$\odot$ EXE $\odot$ EXE $\ominus$ $\odot$ EXE $\odot$ EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ แล้วใช้คิวอาร์โค้ด เพื่อแสดงผลลัพธ์ในแผนภาพ

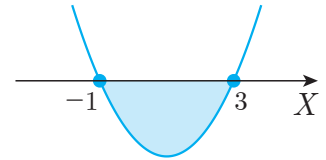


(2) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

โดยการแก้ $x^2 - 2x - 3 = 0$ เราจะได้ $x = -1, 3$

ดังนั้น จากรูปภาพด้านขวา เราจะได้ $-1 \leq x \leq 3$

$-1 \leq x \leq 3$

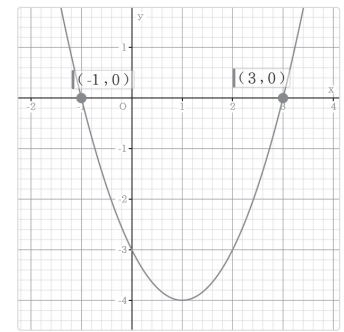
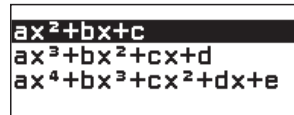
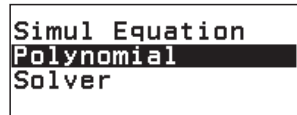
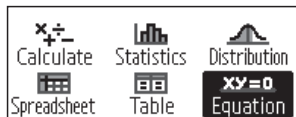


check

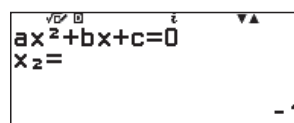
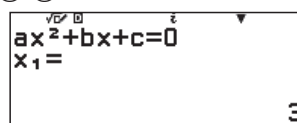
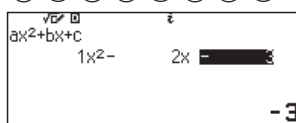
ใช้ Equation (สมการ) ในการวาดกราฟเพื่อยืนยันจุดตัดบนแกน X แล้วจึงหาเรนจ์ของคำตอบของสมการ

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK

เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก [$ax^2 + bx + c$] กด OK



① EXE ② EXE ③ EXE EXE EXE



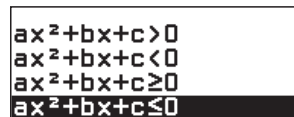
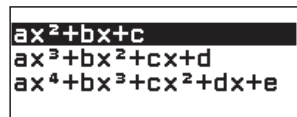
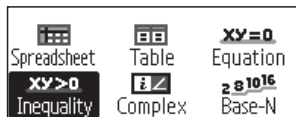
กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



นอกจากนี้ คุณยังสามารถใช้ Inequality (อสมการ) เพื่อแก้สมการกำลังสองโดยตรงและแสดงผลลัพธ์ในแผนภาพได้

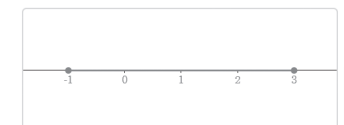
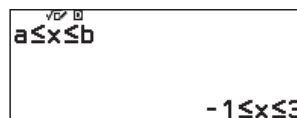
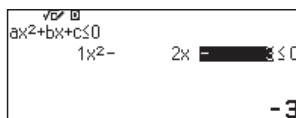
กด $\odot$ เลือก [Inequality (อสมการ)] กด OK

เลือก [$ax^2 + bx + c$] กด OK เลือก [$ax^2 + bx + c \leq 0$] กด OK



① EXE ② EXE ③ EXE EXE EXE

กด $\uparrow$ X แล้วใช้คิวอาร์โค้ด เพื่อแสดงผลลัพธ์ในแผนภาพ



PRACTICE

① จงแก้สมการกำลังสองต่อไปนี้

(1) $x^2 + 8x + 15 > 0$

(2) $x^2 - 10x + 25 < 0$

(3) $x^2 - 3x + 6 \geq 0$

ADVANCED

2 จงแก้ระบบอสมการ
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ x^2 - 5x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

- ③ สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีเส้นรอบรูปขนาด 16 เมตร โดยกำหนดให้ความยาวแนวดิ่งน้อยกว่าความยาวแนวนอน หากต้องการให้พื้นที่ภายในเส้นรอบรูปมากกว่า 12m^2 เรงจ์ที่เหมาะสมสำหรับความยาวแนวดิ่งคืออะไร?

มากกว่า 12m^2

เงื่อนไขในการหาคำตอบของสมการกำลังสอง

TARGET

การทำความเข้าใจเกี่ยวกับเงื่อนไขในการหาคำตอบของสมการกำลังสอง

STUDY GUIDE

เงื่อนไขในการหาคำตอบของสมการกำลังสอง

พิจารณาเงื่อนไขในการหาคำตอบของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ ดังต่อไปนี้ สำหรับ D ซึ่งก็คือดิสคริมีแนนต์

- | | |
|---|---------------------|
| เงื่อนไขคือมีรากคำตอบของจำนวนจริงที่ต่างกัน 2 ค่า | $\Rightarrow D > 0$ |
| เงื่อนไขคือมีรากคำตอบของจำนวนจริงที่ต่างกัน 1 ค่า | $\Rightarrow D = 0$ |
| เงื่อนไขคือมีไม่มีรากคำตอบของจำนวนจริง | $\Rightarrow D < 0$ |

เงื่อนไขในการหาคำตอบของอสมการกำลังสอง

พิจารณาเงื่อนไขในการหาคำตอบของอสมการกำลังสองดังต่อไปนี้

- (1) สร้างสมการกำลังสองโดยให้ (ด้านซ้ายของอสมการกำลังสอง) = 0
- (2) หาดิสคริมีแนนต์ D ของสมการกำลังสองที่สร้างขึ้นในข้อ (1)
- (3) พิจารณาสัญลักษณ์ของดิสคริมีแนนต์ D ที่สัมพันธ์กับเงื่อนไขที่พบในอสมการกำลังสอง

EXERCISE

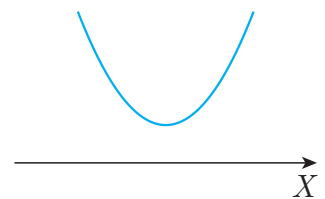
- 1 จงแก้โจทย์อสมการกำลังสอง $x^2 + 6x + 10 < 0$

โดยกำหนดให้ดิสคริมีแนนต์ของ $x^2 + 6x + 10 = 0$ คือ D ซึ่งเราจะได้

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0$$

ตามที่แสดงบนกราฟในรูปภาพด้านขวา อสมการกำลังสอง

$$x^2 + 6x + 10 < 0 \text{ ไม่มีคำตอบ}$$



ไม่มีคำตอบ

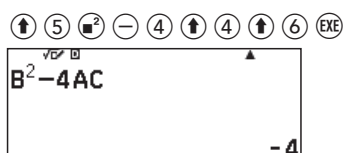
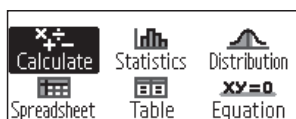


check

ใช้ฟังก์ชัน VARIABLE (ตัวแปร) เพื่อตรวจสอบค่าของดิสคริมีแนนต์ D

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$

กด $\odot$ หลังจากป้อน $[A=1, B=6 \text{ และ } C=10]$ แล้ว ให้กด $\odot$



2 จงหาเรนจ์ของค่าคงตัว k ที่ทำให้คำตอบของสมการกำลังสอง

$$x^2 - 2kx + k + 2 > 0 \text{ เป็นจำนวนจริงทั้งหมด}$$

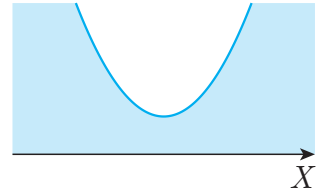
โดยกำหนดให้ D เป็นดิสคริมิแนนต์ของ $x^2 - 2kx + k + 2 = 0$

$$D = (-2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 2) = 4k^2 - 4k - 8 = 4(k + 1)(k - 2)$$

เมื่อคำตอบของนิพจน์นี้เป็นจำนวนจริงทั้งหมด และเนื่องจาก $D < 0$

$$\text{เราจึงได้ } 4(k + 1)(k - 2) < 0$$

โดยการแก้อย่างนี้ เราจึงได้ $-1 < k < 2$



$$\underline{-1 < k < 2}$$

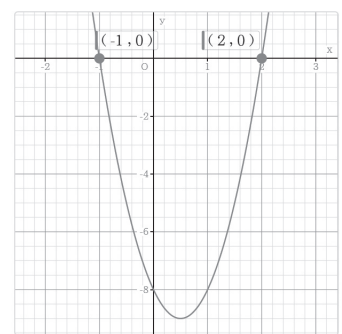
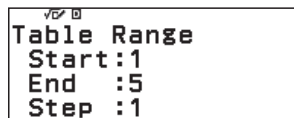
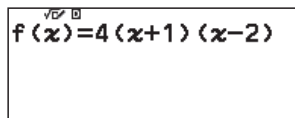
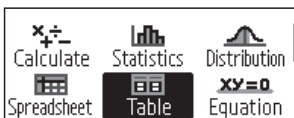


check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด 2nd เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = 4(x + 1)(x - 2)$ แล้วให้กด EXE

กด 2nd เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1] แล้วให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE



กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

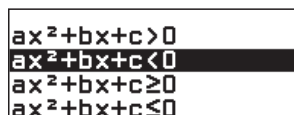
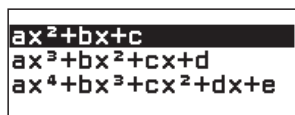
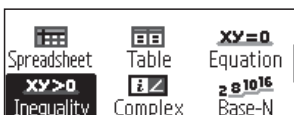
	x	$f(x)$	$g(x)$
1	-8		ERROR
2	0		ERROR
3	16		ERROR
4	40		ERROR



นอกจากนี้ คุณยังสามารถใช้ Inequality (อสมการ) เพื่อแก้สมการกำลังสองโดยตรงและแสดงผลลัพธ์ในแผนภาพได้

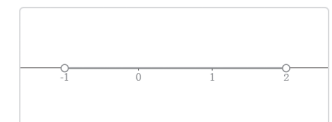
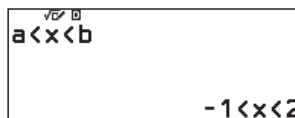
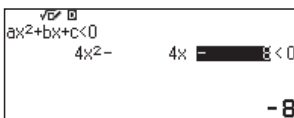
กด $\odot$ เลือก [Inequality (อสมการ)] กด OK

เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด OK เลือก $[ax^2 + bx + c < 0]$ กด OK



4 EXE $-$ 4 EXE $-$ 8 EXE EXE

กด $\uparrow$ X แล้วใช้คิวอาร์โค้ด เพื่อแสดงผลลัพธ์ในแผนภาพ



PRACTICE

- ① จงแก้โจทย์สมการกำลังสอง $x^2 + 2x + 5 > 0$

2 จงหาเรนจ์ของค่าคงตัว k ที่ทำให้คำตอบของอสมการกำลังสอง $x^2 - kx + k > 0$ เป็นจำนวนจริงทั้งหมด

เงื่อนไขสำหรับการแก้สมการกำลังสอง

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาค่าคงตัวในสมการกำลังสองจากเงื่อนไขสำหรับการแก้สมการกำลังสอง

STUDY GUIDE

เงื่อนไขสำหรับการแก้สมการกำลังสอง

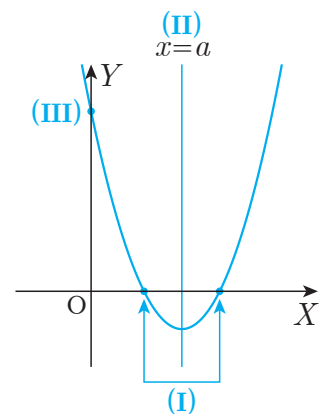
สำหรับการพิจารณาเงื่อนไขที่รากคำตอบของจำนวนจริงของสมการกำลังสอง $f(x)=0$ อยู่ในเรนจ์ที่กำหนด ดังนั้นเราควรพิจารณาเงื่อนไขที่กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $y=f(x)$ นั้นต้องถูกต้อง โดยมีเงื่อนไข 3 ข้อดังต่อไปนี้

- (I) ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของกราฟฟังก์ชัน $y=f(x)$ และแกน X
 $\Rightarrow$ ดิสคริมีแนนต์
- (II) ตำแหน่งแกนสมมาตรของกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$
 $\Rightarrow$ เรนจ์ที่อยู่ในแกนสมมาตร
- (III) เงื่อนไขที่ตรงกับจุดบนกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$
 $\Rightarrow$ สำหรับ $x=a, f(a)$ เป็นบวก เป็นต้น

EXERCISE

- ◆ จงหาเรนจ์ของค่าคงตัว a ที่ทำให้สมการกำลังสอง $x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$ มีรากคำตอบของจำนวนจริงบวกต่างกันสองตัว

โดยกำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ สำหรับสมการกำลังสอง $f(x)=0$ เพื่อที่จะได้รากคำตอบของจำนวนจริงบวกที่ต่างกัน 2 ค่า กราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ ต้องตัดกับด้านบวกของแกน x ที่จุดต่าง 2 จุด ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวา



- (I) สำหรับความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ และแกน X โดยกำหนดให้ D คือดิสคริมีแนนต์ของสมการกำลังสอง $f(x)=0$ และเนื่องจาก $D>0$ เราจะได้ $D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a + 3) = 4a^2 - 8a - 12 = 4(a+1)(a-3) > 0$ จากข้อนี้ เราจึงได้ $a < -1, 3 < a \dots (i)$

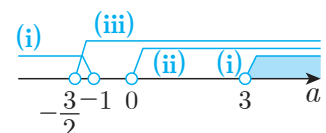
- (II) สำหรับตำแหน่งแกนสมมาตรของกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ แกนสมมาตรต้องอยู่บนด้านบวกของแกน X

จาก $f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3 = (x-a)^2 - a^2 + 2a + 3$ เราจะได้แกนสมมาตรคือ $x=a$ ดังนั้น $a>0 \dots (ii)$

- (III) สำหรับเงื่อนไขที่ตรงกับจุดบนกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$

เนื่องจากจำเป็นต้องตัดกันบนส่วนบวกของแกน Y (เส้น $x=0$) จาก $f(0) = 2a + 3 > 0$ เราจะได้ $a > -\frac{3}{2} \dots (iii)$

ดังนั้น เรนจ์ของค่า a ซึ่งตรงกับข้อ (i) ถึง (iii) คือ $a>3$ ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวา



$a>3$

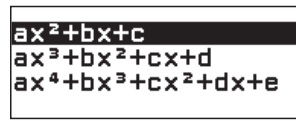
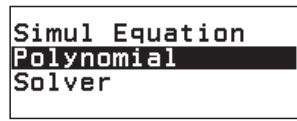
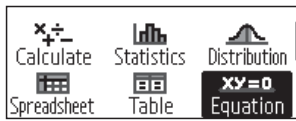


check

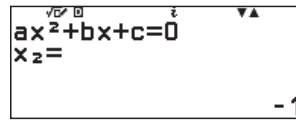
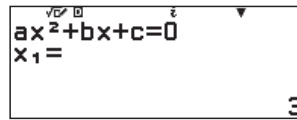
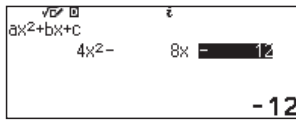
ใช้ Equation (สมการ) เพื่อยืนยันว่าค่า a บนกราฟนั้นตรงกับ $4a^2 - 8a - 12 > 0$

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด $\odot$

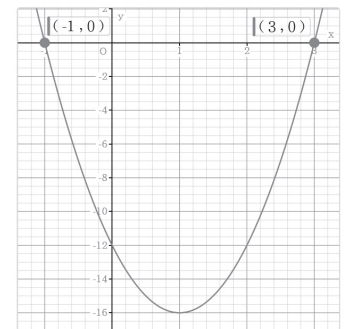
เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด $\odot$ เลือก $[ax^2 + bx + c]$ กด $\odot$



$\odot$ EXE $\ominus$ $\odot$ EXE $\ominus$ $\odot$ $\odot$ EXE



กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

- ① จงหาเรนจ์ของค่าคงตัว a ที่ทำให้สมการกำลังสอง $x^2 - ax + a + 8 = 0$ มีรากคำตอบของจำนวนจริงบวกต่างกันสองตัว

- ๒ จงหาเรนจ์ของค่าคงตัว a ที่ทำให้สมการกำลังสอง $x^2 - 2ax + 2a^2 - 1 = 0$ มีรากคำตอบของจำนวนจริงบวกต่าง
กันสองตัว