**แผนการจัดการเรียนรู้**

**รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5  
หน่วยการเรียนรู้ เมทริกซ์   
เรื่อง การคูณระหว่างเมทริกซ์ เวลา 50 นาที  
...................................................................................................................................................................**

**สาระสำคัญ**

ในปัจจุบันการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์นอกจากจะเป็นพื้นฐานของการเพิ่มทักษะกระบวนการคิด แล้วในระดับชั้นอุดมศึกษายังมุ่งเน้นการประยุกต์ใช้และการแก้ปัญหากับศาสตร์แขนงอื่น ๆ อาจจะเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หรือ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) สำหรับแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์  
มีหลากหลายรูปแบบ เมทริกซ์เป็นเนื้อหาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาต่าง ๆ โดยในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ได้มีการกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา ที่มีการนำสมการเชิงเส้นไปใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ และความสัมพันธ์ต่าง ๆ เช่น การประยุกต์ทางธุรกิจ การประยุกต์ทางเศรษฐศาสตร์การประยุกต์ทางฟิสิกส์ (วงจรไฟฟ้า) การวิเคราะห์การเลื่อนไหลของการจราจร เป็นต้น

**สาระการวัดและเรขาคณิต** ใช้นิพจน์ สมการ อสมการและเมทริกซ์ อธิบายความสัมพันธ์ หรือช่วยแก้ปัญหาที่กำหนดให้

**ผลการเรียนรู้**

เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่าง  
เมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ n x n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

**จุดประสงค์การเรียนรู้**  
 นักเรียนสามารถนำการคูณระหว่างเมทริกซ์ไปใช้แก้ปัญหาที่กำหนดให้

**สาระการเรียนรู้**  
 การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์

**การต่อยอด 1 (40 นาที)  
บทนำ**

* ครูชี้แจงจุดประสงค์ของบทเรียนนี้  
  ให้นักเรียนเข้าใจว่า แนวคิดเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์สามารถใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

และธุรกิจได้ โดยการใช้แบบฝึกหัด

* พิจารณาโจทย์ด้านธุรกิจต่อไปนี้

โจทย์:

มีผู้ผลิตโทรศัพท์มือถืออยู่ 4 บริษัท คือ บริษัท S บริษัท A บริษัท H และบริษัท N มีการสำรวจวิจัยด้านการตลาดเกี่ยวกับโทรศัพท์มือถือของแต่ละบริษัท แบ่งเป็นสี่ด้าน คือ ประสิทธิภาพ ราคา ความง่ายในการใช้ และการออกแบบ ผลลัพธ์เป็นดังตารางข้างล่าง

|  | **ประสิทธิภาพ** | **ราคา** | **ความง่ายในการใช้** | **การออกแบบ** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| บริษัท S | 10 | 5 | 3 | 7 |
| นริษัท A | 8 | 2 | 9 | 10 |
| บริษัท H | 6 | 10 | 4 | 4 |
| บริษัท N | 5 | 7 | 10 | 4 |

จากการสำรวจทั้งสี่บริษัทพบว่า บริษัท S อยู่ในอันดับสาม โดยมีการรวม  
คะแนนง่าย ๆ โดยไม่มีการถ่วงน้ำหนักของคุณสมบัติแต่ละข้อ สมมติว่าคุณเป็น  
ตัวแทนขายของบริษัท S คุณจะวางแผนกลยุทธ์การประชาสัมพันธ์อย่างไรให้บริษัทขายผลิตภัณฑ์ได้ดีกว่าคู่แข่ง ถ้าดูผ่าน ๆ เหมือนคณิตศาสตร์จะไม่เกี่ยวข้องครูอธิบายนักเรียนว่าแนวคิดเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์มีประโยชน์ในการแก้โจทย์ปัญหาลักษณะนี้

→ โจทย์นี้จะอภิปรายในภายหลังของบทเรียนนี้ ตอนนี้ให้นักเรียนพิจารณาโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการคูณ  
 เมทริกซ์กับเมทริกซ์โดยใช้แบบฝึกหัด

* พิจารณาโจทย์ด้านธุรกิจต่อไปนี้

ตารางต่อไปนี้แสดงจำนวนผลไม้ที่ขายได้ในหนึ่งวันของร้าน A และ B

|  | **วันที่ 1** | | | **วันที่ 2** | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **แอปเปิ้ล** | **มะม่วง** | **ทุเรียน** | **แอปเปิ้ล** | **มะม่วง** | **ทุเรียน** |
| ร้าน ก | 8 | 5 | 3 | 4 | 6 | 1 |
| ร้าน ข | 7 | 5 | 4 | 9 | 7 | 2 |

ตารางต่อไปนี้แสดงราคาต่อหน่วยของผลไม้แต่ละชนิด

| **ผลไม้** | **ราคาต่อหน่วย (บาท)** |
| --- | --- |
| แอปเปิ้ล | 20 |
| มะม่วง | 50 |
| ทุเรียน | 100 |

แบบฝึกหัด 1:

ครูให้นักเรียนคำนวณยอดขายของร้าน A และ B ในวันที่ 1 โดยใช้เมทริกซ์  
ข้อมูลในตารางสามารถเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้  
จำนวนผลไม้ที่ขาย: วันที่ 1   
ราคาขายต่อหน่วย:   
ยอดขาย = จำนวนผลไม้ที่ขายได้ x ราคาต่อหน่วย

เขียนในรูปเมทริกซ์

ครูอธิบายว่าผลคูณของเมทริกซ์สามารถแปลความหมายได้ตามตารางต่อไปนี้

| **วันที่ 1** | **แอปเปิ้ล** | **มะม่วง** | **ทุเรียน** | **ยอดขายทั้งหมด (บาท)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ร้าน A | 8 x 20 = 160 | 5 x 50 = 250 | 3 x 100 = 300 | 710 |
| ร้าน B | 7 x 20 = 140 | 5 x 50 = 250 | 4 x 100 = 400 | 790 |

* จากนั้น ครูให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบของแบบฝึกหัดด้วยเครื่องคำนวณ

<การดำเนินการกับเครื่องคำนวณ>

1. เปลี่ยนเป็นโหมด เมทริกซ์ (Matrix)   
 wRRR|IA black and white text on a white background

Description automatically generated



A black and white sign with white text

Description automatically generated

2. ใส่ค่า เมทริกซ์ (Matrix) A (2 แถว 3 หลัก)   
 |R$RR||A black text on a white background

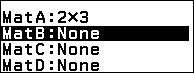
Description automatically generated

8B5B3B7B5B4BA black and white image of a number

Description automatically generated

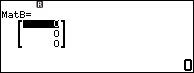
A black rectangle with black lines

Description automatically generated

3. ใส่ค่า เมทริกซ์ (Matrix) B (3 แถว 1 หลัก) 

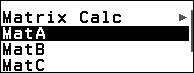
|$RR||||

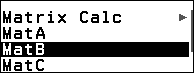




20B50B100B

4. เปลี่ยนเป็นโหมดคำนวณเมทริกซ์ (Matrix Calculation)   
 และคำนวณเมทริกซ์ (Mattrix) A x เมทริกซ์ (Matrix) B  
 T|R|OT|RR|BA black and white sign with black text

Description automatically generated



A white background with black text

Description automatically generated

A white rectangular object with black lines

Description automatically generated

※จะต้องกำหนดเมทริกซ์ในขั้นตอนที่ 2 และ 3 ก่อน จะสามารถคำนวณได้ในขั้นตอนที่ 4

ตรวจสอบว่าผลลัพธ์ตรงกับที่คำนวณผลคูณของเมทริกซ์หรือไม่

* กิจกรรม

ตอนนี้ ให้นักเรียนพิจารณาโจทย์ปัญหาด้านธุรกิจในบทนำ

โจทย์:

มีผู้ผลิตโทรศัพท์มือถืออยู่ 4 บริษัท คือ บริษัท S บริษัท A บริษัท H และบริษัท N มีการสำรวจวิจัยด้านการตลาดเกี่ยวกับโทรศัพท์มือถือของแต่ละบริษัท แบ่งเป็นสี่ด้าน คือ ประสิทธิภาพ ราคา ความง่ายในการใช้ และการออกแบบ ผลลัพธ์เป็นดังตารางข้างล่าง

| **การสำรวจด้าน**  **บริษัท** | **ประสิทธิภาพ** | **ราคา** | **ความง่าย**  **ในการใช้** | **การออกแบบ** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| บริษัท S | 10 | 5 | 3 | 7 |
| บริษัท A | 8 | 2 | 9 | 10 |
| บริษัท H | 6 | 10 | 4 | 4 |
| บริษัท N | 5 | 7 | 10 | 4 |

จากการสำรวจทั้งสี่บริษัทพบว่า บริษัท S อยู่ในอันดับสาม โดยมีการรวมคะแนนง่าย ๆ โดยไม่มีการถ่วงน้ำหนักของคุณสมบัติแต่ละข้อ สมมติว่าคุณเป็นตัวแทนขายของบริษัท S คุณจะวางแผนกลยุทธ์การประชาสัมพันธ์อย่างไรให้บริษัทขายผลิตภัณฑ์ได้ดีกว่าคู่แข่ง

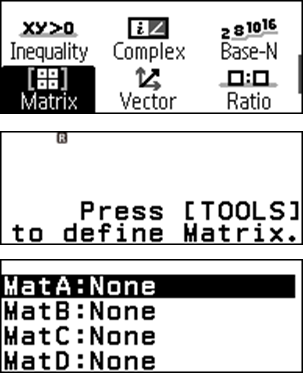
\* ครูให้นักเรียนคิดคนเดียวหรือเป็นคู่อย่างอิสระเกี่ยวกับวิธีแก้โจทย์ปัญหา  
\* ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายและนำเสนอความคิดเห็น จากนั้นครูอธิบาย  
 ขั้นที่ (1) ถึง (3) เพื่อให้นักเรียนรู้วิธีคิดเป็นขั้นตอน  
\* ครูให้เวลานักเรียน 10 นาที เพื่อหาคำตอบในแต่ละขั้น (1) ถึง (3)   
 หลังจากนั้นให้นักเรียนนำเสนอคำตอบ

(1) หากน้ำหนักของประสิทธิภาพ ราคา ความง่ายในการใช้ และการออกแบบนั้นเท่ากัน (1:1:1:1)   
 ผู้ผลิตบริษัทใดจะได้คะแนนรวมสูงสุดจากการสำรวจ

(2) หากน้ำหนักเป็น 1:3:4:2 ผู้ผลิตบริษัทใดจะได้คะแนนรวมสูงสุดจากการสำรวจ

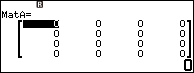
(3) ถ้าน้ำหนักเป็น 1, 2, 3 และ 4 นักเรียนสามารถตัดสินใจด้วยตนเองว่าจะให้น้ำหนักเป็นเท่าไรกับ  
 แต่ละคุณสมบัติในการสำรวจ จาก 1 ถึง 4 (ลักษณะนี้แสดงให้เห็นวิธีประชาสัมพันธ์ผลิตภัณฑ์)   
 ในฐานะตัวแทนขายของบริษัท S ให้หาวิธีการกำหนดน้ำหนักที่จะทำให้ได้เปรียบมากที่สุด   
 นอกจากนั้น ครูให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมควรกำหนดน้ำหนักเช่นนั้น

อันดับแรก ให้แสดงคำตอบ  
(1) บริษัท A

(2) บริษัท N (1 × 5 + 3 × 7 + 4 × 10 + 2 × 4 = 74 คำนวณแบบเดียวกับผู้ผลิตบริษัทอื่นเพื่อให้เห็นว่า  
 ค่าของบริษัท N สูงที่สุด)  
(3) 4:3:2:1 หรือ 4:3:1:2  
 <การดำเนินการกับเครื่องคำนวณ>  
 1. เปลี่ยนเป็นโหมดเมทริกซ์ (Matrix)  
 wRRR|I

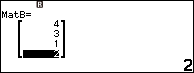
2. ใส่คะแนนสำรวจให้เมทริกซ์(Matrix) A (4 แถว 4 หลัก)   
 |$RRR|$RRR||A black text on a white background

Description automatically generated

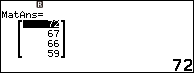


หลังจากนั้น ใส่ค่าสมการด้วยแนวทางเดียวกันA number on a white background

Description automatically generated

3. ใส่ค่าน้ำหนักให้เมทริกซ์ (Matrix) B (4 แถว 1 หลัก)  
 (ใส่ค่า 4:3:1:2 ตามตัวอย่าง)  
  
 4. เปลี่ยนเป็นโหมด คำนวณเมทริกซ์(Matrix Calculation)   
 และคำนวณเมทริกซ์(Matrix) A× เมทริกซ์ (Matrix) BA white background with black text

Description automatically generated

T|R|OT|RR|B

ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายและนำเสนอเหตุผลสำหรับค่าน้ำหนักที่ใช้ในขั้นตอนที่ (3) โดยครูอาจใช้คำถามขั้นสูงเพื่อให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายในเชิงลึกได้มากขึ้น และคำตอบของนักเรียนที่อาจเป็นไปได้ดังนี้

[คำตอบที่อาจเป็นไปได้สำหรับเหตุผล]

* สามารถกำหนดน้ำหนักได้หลายแบบ อาจลองหาคำตอบด้วยการลองผิดลองถูกโดยใส่ค่าในเครื่องคำนวณแบบสุ่ม
* บริษัท S ได้ 10 คะแนนในด้านประสิทธิภาพ ซึ่งถือเป็นจุดแข็ง ดังนั้นต้องกำหนดน้ำหนักให้กับประสิทธิภาพเป็น 4
* บริษัท S ได้คะแนนน้อยที่สุด เพียง 3 คะแนน ในด้านความง่ายในการใช้ ดังนั้นควรกำหนดน้ำหนักให้ความง่ายในการใช้อยู่ที่ 1
* กำหนดน้ำหนักให้กับบริษัท S โดยให้น้ำหนักมากในคุณสมบัติการสำรวจที่ได้คะแนนมาก (นั่นคือ 4 สำหรับประสิทธิภาพ 3 สำหรับการออกแบบ 2 สำหรับราคา และ 1 สำหรับความง่ายในการใช้) แต่การคำนวณค่าเหล่านี้ยังแสดงให้เห็นว่า บริษัท A ได้อันดับสูงกว่า ดังนั้นจึงต้องดำเนินการอย่างอื่นอีก
* เมื่อนับคะแนนรวมแบบไม่มีการถ่วงน้ำหนัก บริษัท A ได้คะแนนสูงสุด ดังนั้น คู่แข่งที่มีการแข่งขันกันมากที่สุดคือบริษัท A เนื่องจากบริษัท S มีคะแนนมากกว่าบริษัท A สามคะแนนในเรื่องราคา จึงได้เปรียบมากที่สุดในคุณสมบัติข้อนี้ ดังนั้นควรต้องกำหนดน้ำหนักมากขึ้นให้กับราคา

[ตัวอย่างคำถามที่ทำให้อภิปรายในเชิงลึกได้มากขึ้น]

* สำหรับการลองผิดลองถูก มีรูปแบบการกำหนดน้ำหนักที่ต้องตรวจสอบถึง 24 รูปแบบ มีวิธีใดบ้างที่จะสามารถจำกัดจำนวนการทดลองลงได้
* มีวิธีใดบ้างในการกำหนดน้ำหนักที่ทำให้บริษัท S อยู่ระดับสูงสุด แม้ว่าคุณสมบัติอื่น ๆ นอกเหนือไปจากประสิทธิภาพของบริษัทอื่นจะเป็น 10 คะแนน
* แม้ว่าจะกำหนดน้ำหนักมากๆให้กับคุณสมบัติที่ได้คะแนนมาก แต่บริษัท A ก็ยังได้อันดับสูงกว่า Sควรต้องทำเช่นไรต่อไป
* ถ้านักเรียนเสนอว่าให้กำหนดน้ำหนักที่มากขึ้นให้กับราคา จะเกิดอะไรขึ้นถ้ากำหนดน้ำหนักเป็น 4

<บันทึกย่อสำหรับครู: ตัวอย่างของเหตุผล>

บริษัท S ได้คะแนน 10 คะแนนในด้านประสิทธิภาพ และมีจุดแข็งที่สุดในคุณสมบัติข้อนี้ ให้กำหนดน้ำหนัก 4 ให้กับประสิทธิภาพ เราต้องการให้น้ำหนักการออกแบบอยู่ที่ 3 แต่บริษัท S ก็ยังเอาชนะบริษัท A ไม่ได้ด้วยวิธีนี้ ให้กำหนดน้ำหนักสำหรับราคาไว้ที่ 3 แทน เพราะเมื่อคูณเทียบกันแล้วคะแนนห่างจาก บริษัท A ที่สุด และบริษัท Sสามารถแข่งขันได้ในคุณสมบัติข้อนี้ จากนั้น ให้ลองผิดลองถูกด้วยการคำนวณทั้งสองแบบที่เหลือ โดยกำหนดน้ำหนัก 4:3:2:1 และ 4:3:1:2 ในแต่ละกรณี บริษัท S จะอยู่อันดับสูงสุด แต่ถ้าน้ำหนักเป็น 4:3:1:2 ทำให้คะแนนรวมของบริษัท S ชนะห่างจากคะแนนรวมของบริษัท A ซึ่งเป็นอันดับสองมากขึ้น จึงพิจารณาว่าเป็นวิธีการให้น้ำหนักที่ได้เปรียบกว่า

※ลองคิดวิธีประชาสัมพันธ์ผลิตภัณฑ์ตามผลลัพธ์นี้ กลยุทธ์หนึ่งที่เป็นไปได้คือการเน้นเรื่องประสิทธิภาพ และ  
 บอกว่าราคา “เข้าถึงได้” เนื่องจากราคาไม่ได้ต่ำมาก บริษัท A มีข้อได้เปรียบด้านการออกแบบ ดังนั้นจึง  
 ไม่สามารถเน้นเรื่องการออกแบบได้ด้วยวิธีนี้ องค์ประกอบต่าง ๆ อาจดูเหมือนไม่สามารถเปรียบเทียบเชิง  
 ตัวเลขได้ในทีแรก แต่จริง ๆ แล้วสามารถแปลงเป็นตัวเลขเพื่อหาทางออกที่ดีที่สุดได้ วิธีการเช่นนี้เรียกว่า   
 การทำแบบจำลอง ซึ่งเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่เรียกว่า การวิจัยเชิงปฏิบัติการ

**ตรวจสอบความเข้าใจ / แบบทดสอบ (10 นาที)**

ทำแบบทดสอบ