**แผนการจัดการเรียนรู้**

**รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5  
หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
เรื่อง ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
..........................................................................................................................................................................**

**ผลการเรียนรู้**หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

**สาระสำคัญ**

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดโดเมนเพื่อให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน มีโดเมนและเรนจ์เป็นดังนี้

| **ฟังก์ชัน** | **โดเมน** | **เรนจ์** |
| --- | --- | --- |
|  |  | [-1, 1] |
|  |  | [-1, 1] |
|  |  |  |

ฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

| **ฟังก์ชัน** | **โดเมน** | **เรนจ์** |
| --- | --- | --- |
|  |  | [-1, 1] |
|  |  | [-1, 1] |
|  |  |  |

2. มุมก้มและมุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตา และแนวเส้นจากตาไปยังวัตถุ ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าแนวเส้น  
 ระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมก้ม** แต่ถ้าวัตถุอยู่สูงกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมเงย** โดยขนาด  
 ของมุมก้มและมุมเงยจะเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ

A white background with black text and a triangle

Description automatically generated

**จุดประสงค์การเรียนรู้**

ใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ และตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อวางแผนการทำงานของรถเครนสำหรับการติดตั้งนั่งร้านบนอาคาร

**ความรู้พื้นฐานที่ต้องทราบก่อนเรียน**1. สูตรอัตราส่วนตรีโกณมิติ  
 

2. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
 - ตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์  
 เมื่อ )และมุม จะเขียนแสดงดังนี้  หรือ

- ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์  
 เมื่อ ) และมุม จะเขียนแสดงดังนี้

หรือ

- ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์  
 เมื่อ*)* และมุมจะเขียนแสดงดังนี้หรือ

**สื่อการเรียนรู้**1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO CLASSWIZ รุ่น fx-991CW  
2. ใบงาน  
3. สื่อการสอนของ CASIO (สื่อนำเสนอก่อนเรียน)

**แนวทางการจัดการเรียนรู้**

จัดการเรียนรู้ผ่านการทำงานแบบกลุ่ม เน้นการพัฒนาทักษะในการแก้ปัญหาของนักเรียนผ่านการมอบหมายภารกิจโดยใช้กระบวนการเรียนรู้แบบสืบเสาะ ดังต่อไปนี้



ถามคำถาม

เริ่มต้นการเรียนการสอนด้วยการถามคำถามหรือถามปัญหา ที่มุ่งความสนใจไปที่ปรากฏการณ์และสิ่งต่าง ๆ   
ที่อยู่รอบตัวนักเรียน ถามคำถามหรือปัญหาที่นักเรียนสนใจ เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นในกระบวนการเรียนรู้แบบสืบเสาะ  
และควรระบุกับนักเรียนให้ชัดเจนว่า มีปัญหาใดบ้างที่ต้องการทำการแก้ไข

รวบรวมข้อมูล

เป็นกระบวนการรวบรวมข้อมูลและจัดระเบียบข้อมูล โดยคัดเลือกข้อมูลที่จำเป็นในการแก้ปัญหาหรือตอบปัญหา และเรียงลำดับความสำคัญของข้อมูล

วิเคราะห์ข้อมูล

เป็นกระบวนการวิเคราะห์ข้อมูล แสดงผลในรูปแบบของกราฟหรือแผนภูมิ การวิเคราะห์ข้อมูลนี้จะช่วยให้เกิดสมมติฐานสำหรับคำถามหรือปัญหาที่เกิดขึ้น

อภิปรายผล

เป็นกระบวนการพูดคุยหรือถกประเด็นเกี่ยวกับผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ข้อมูล ว่าสมมติฐานที่สร้างขึ้นนั้นถูกต้องหรือไม่ และปรึกษาหารือกันว่ามีสิ่งใดบ้างที่ควรเพิ่มเติมหรือพิจารณา โดยเคารพความคิดเห็นที่หลากหลายของผู้อื่น รวมทั้งนำมุมมองของผู้อื่นมาเป็นประเด็นในการพิจารณาด้วย

สรุปผล

เป็นกระบวนการหาข้อสรุปของคำถามหรือปัญหาให้อยู่ในรูปแบบของคำตอบที่ชัดเจน สามารถอธิบายให้ผู้ฟังเข้าใจได้

สะท้อนผลย้อนกลับ  
เป็นขั้นตอนเพื่อส่งเสริมการเรียนรู้แบบสืบเสาะต่อไป เพื่อเชื่อมโยงความสนใจให้เข้ากับผลสรุปที่ได้มา

**กระบวนการจัดการเรียนรู้**

มอบหมายงานให้กับนักเรียน (15 นาที)

ในการทาสีผนังอาคาร 1 ในภาพที่ 1 จงพิจารณาแผนการทำงานเพื่อติดตั้งนั่งร้านในพื้นที่ที่แรเงา  
ในการติดตั้งนั่งร้าน ต้องใช้รถเครนแขวนวัสดุที่จุด C ที่อยู่ที่พื้น แต่เนื่องจากมีอาคารอื่นอยู่ในระยะใกล้เคียง   
จึงจำเป็นต้องจอดรถเครนในจุดที่แสดงในภาพที่ 1 ซึ่งภาพที่ 1 แสดงแผนผังจากมุมสูงของภาพที่ 2 และภาพที่ 3 เป็นภาพของการติดตั้งนั่งร้าน

ในการแขวนวัสดุที่จุด C ในภาพที่ 1 จำเป็นต้องหมุนหรือยืดแขน AB ของรถเครนเท่านั้น และลดระดับเส้นลวดจากปลาย B (จาก B') ของแขนที่อยู่เหนือจุด C พอดี เพื่อให้ทำงานได้ประสิทธิภาพ ไม่ต้องหมุนและ  
ยืดแขนเครนหลายครั้ง จงพิจารณาเงื่อนไขและแผนการทำงานในการหมุนและยืดแขนเครน โดยสมมติว่าตนเอง  
เป็นผู้ควบคุมการก่อสร้าง ตามเงื่อนไขอย่างละเอียดที่ให้ไว้ในข้อ Q1-2 นี้

A diagram of a truck

Description automatically generated

**ขั้นตอนต้นแบบ**

A diagram of a truck pulling a box

Description automatically generated with medium confidence

เงื่อนไขอย่างละเอียด (5 นาที)

**อาคาร 1**

* เป็นอาคารทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีความกว้าง 12 เมตร ยาว 9 เมตร
* มีความสูง 8.2 เมตร และหลังคาอาคารเป็นแนวราบ
* ความหนาของกำแพงและหลังคาไม่นำมาพิจารณาด้วย

**รถเครน**

* จุดหมุนของแขนเครนอยู่ที่จุด A และปลายอยู่ที่จุด B ตามในภาพ
* ในตอนเริ่มต้นแขนของเครนอยู่ในแนวราบและชี้ไปทางทิศเหนือ ตามภาพที่ 2
* แขนของเครนมีจุดหมุนอยู่ที่จุด A และอาคาร 1 มีตำแหน่งดังที่แสดงในภาพ
* ตอนเริ่มต้นความยาวของแขนเครนอยู่ที่ 2 เมตร และความยาวของแขนสามารถยืดไปได้ถึง 25 เมตร
* สามารถหมุนแขนเครนได้อย่างอิสระในแนวตั้งและแนวนอน
* ตำแหน่งของจุดหมุนไม่เปลี่ยนไปตามการหมุนของแขน
* ความสูงของจุดหมุนของแขนอยู่ที่ 2 เมตร
* ความยาวของเส้นลวดในการแขวนวัสดุสามารถปรับได้อิสระ

**นั่งร้าน**

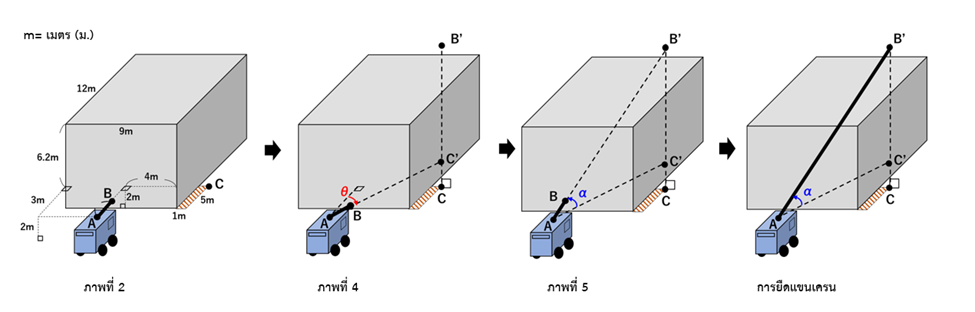
* ความกว้างของนั่งร้านเป็น 1 เมตร จากกำแพงของอาคาร 1
* จุดที่สูงที่สุดของนั่งร้านที่ติดตั้ง ต้องอยู่ต่ำกว่าหลังคา
* จุดที่สัมผัสกับพื้นในมุมทิศตะวันออกเฉียงเหนือของนั่งร้านอยู่ที่ C ดังแสดงในภาพที่ 2
* ในการยกวัสดุขึ้นที่จุด C จำเป็นต้องจัดวางปลายของแขนเครนไว้เหนือจุด C พอดี และแขวนด้วยเส้นลวด
* น้ำหนักของวัสดุนั่งร้านจะน้อยกว่าน้ำหนักที่แขนเครนยกได้ และไม่นำขนาดของวัสดุมาพิจารณาในที่นี้

A diagram of a truck

Description automatically generated

Q1 (10 นาที)

จากภาพที่ 4 เราต้องการหมุนแขน AB ในแนวนอนและชี้ไปในทิศทางของจุด C' (2 เมตรเหนือจุด C พอดี) จงหามุม เพื่อหมุนแขนไปในแนวนอน



**(คำตอบและตัวอย่างคำอธิบาย)**

A diagram of a rectangle and a rectangle with red lines

Description automatically generatedダイアグラム, 概略図

自動的に生成された説明

ql5a8$)B

Q2 (15 นาที)

หลังจากดำเนินการในข้อ Q1 แล้ว ในการยืดแขนเครนไปยังจุด B' (เหนือจุด C' พอดี) เราต้องการหมุนแขน AB ในแนวตั้งและชี้ไปยังทิศของ B' ดังแสดงในภาพที่ 5 ในกรณีนี้จงพิจารณาหามุมที่เหมาะสม เพื่อหมุนแขนไปในแนวตั้ง และอธิบายว่าทำไมค่าดังกล่าวจึงเหมาะสม

**(คำตอบและตัวอย่างคำอธิบาย)  
I. การพิจารณาค่า เมื่อแขนเครนแตะส่วนบนของกำแพงพอดี**ค่าของ จะต้องมากกว่าค่าที่กำหนดให้ เพื่อป้องกันไม่ให้แขนเครนชนกับผนังทางทิศใต้เมื่อแขนถูกยืดออกไป   
ดังนั้น เราจึงพิจารณาว่าค่า คือค่าที่แขนแตะขอบด้านบนของกำแพงทางทิศใต้ (ภาพที่ *7*)

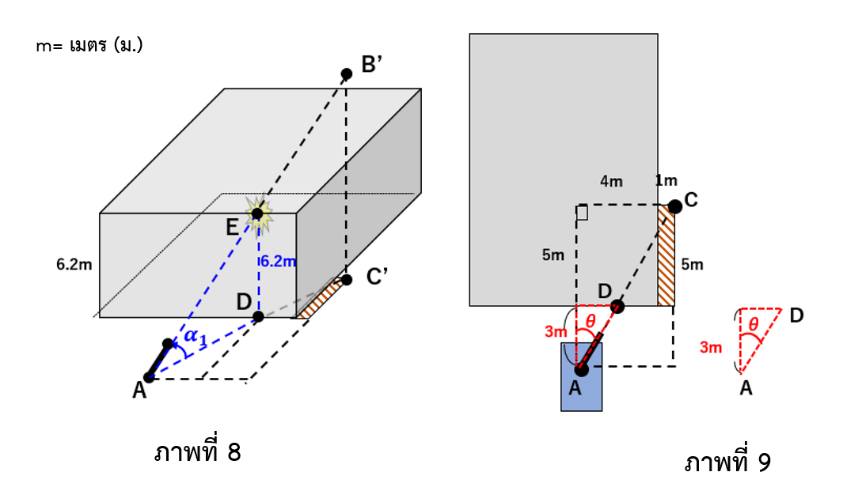
เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนขึ้น ความสูงของอาคาร 1 ถูกกำหนดไว้ที่ 8.2 เมตร – 2 เมตร = 6.2 เมตร   
โดยตัดความสูงของอาคาร 1 ออก 2 เมตร ดังแสดงในภาพ 8   
ดังนั้น ความสูงของจุดหมุนเครนจึงเท่ากับ 0 เมตร

ดังนั้น หากทราบความยาวของ AD ก็จะสามารถหาค่าของ ได้**A diagram of a box with a truck and a truck with a wheel

Description automatically generated with medium confidence**

หาความยาวของ AD ให้พิจารณารูปสามเหลี่ยมในภาพ 9 (ภาพมุมสูงของภาพที่ 8)  
จาก Q1:   
ดังนั้น เมตร  
  
 3akM)Bテキスト

自動的に生成された説明



จากสมการ (1), ค่าของ คือ  
テキスト

中程度の精度で自動的に生成された説明

ดังนั้น ค่าของ จะต้องมากกว่า 60.3

**II. การพิจารณาค่าสูงสุดของ**  **เมื่อความยาวแขนอยู่ที่ 25 เมตร**

เมื่อมุมของแขนเพิ่มขึ้น ความยาวของ AB' ก็จะเพิ่มตามไปด้วยในทางกลับกัน เนื่องจากความยาวสูงสุดของแขนอยู่ที่ 25 เมตร ค่าของ เมื่อความยาวของแขนอยู่ที่ 25 เมตร คือค่าสูงสุด ()

A diagram of a rectangular object with lines and points

Description automatically generated

จากภาพ 10 ค่าของ คือ

นอกจากนั้น ค่าของ AC' ยังได้มาจากทฤษฎีบทพีทาโกรัสダイアグラム

中程度の精度で自動的に生成された説明

ดังนั้น

qkas89R25$)B

สรุป I และ II (5 นาที)

=　　　　　　　　　　　　　=

A two dimensional cubes with a yellow label

Description automatically generated with medium confidence

จากข้างต้น ค่าที่เหมาะสมของ คือ ระหว่าง 60.3° และ 67.8°  
ดังนั้น ตัวอย่างคำตอบคือ 61°, 62°, 63°, 64°, 65°, 66° และ 67°  
หาก เล็กเกินไป แขนจะชนเข้ากับกำแพง และถ้าใหญ่เกินไป แขนจะไม่ยาวมากพอ   
ดังนั้นค่า 64° ที่ใกล้กับช่วงกลางของ จึงดีกว่า

รายงาน *(*การบ้าน*)*

จากปัญหาที่พิจารณาไปแล้ว กลับมาทบทวนว่าสิ่งใดควรคิดใคร่ครวญเป็นพิเศษ เพื่อให้สามารถทำงานในสถานการณ์จริงได้ และสามารถทำงานได้อย่างชาญฉลาด โดยให้นักเรียนเขียนสิ่งที่นักเรียนคิดได้ลงไป   
สร้างสถานการณ์สมมติ ปรับเปลี่ยนปัญหา และสร้างแผนการทำงานที่คล้ายกันออกมา

**ใบงาน**

| **บทเรียน** | ฟังก์ชันตรีโกณมิติ | **หัวข้อ** | ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ |
| --- | --- | --- | --- |
| **ชื่อ** |  | **ชั้น** |  |

**ภาระงานมอบหมาย**

ในการทาสีผนังอาคาร 1 ในภาพที่ 1 จงพิจารณาแผนการทำงานเพื่อติดตั้งนั่งร้านในพื้นที่ที่แรเงาในการติดตั้งนั่งร้าน   
ต้องใช้รถเครนแขวนวัสดุที่จุด C ที่อยู่ที่พื้น แต่เนื่องจากมีอาคารอื่นอยู่ในระยะใกล้เคียง จึงจำเป็นต้องจอดรถเครนในจุดที่แสดง  
ในภาพที่ 1 ซึ่งภาพที่ 1 แสดงแผนผังจากมุมสูงของภาพที่ 2 และภาพที่ 3 เป็นภาพของการติดตั้งนั่งร้าน  
 ในการแขวนวัสดุที่จุด C ในภาพที่ 1 จำเป็นต้องหมุนหรือยืดแขน AB ของรถเครนเท่านั้น และลดระดับเส้นลวด  
จากปลาย B (จาก B') ของแขนที่อยู่เหนือจุด C พอดี เพื่อให้ทำงานได้ประสิทธิภาพ ไม่ต้องหมุนและยืดแขนเครนหลายครั้ง   
จงพิจารณาเงื่อนไขและแผนการทำงานในการหมุนและยืดแขนเครน โดยสมมติว่าตนเองเป็นผู้ควบคุมการก่อสร้าง ตามเงื่อนไขอย่างละเอียดที่ให้ไว้ในข้อ Q1-2 นี้A diagram of a truck

Description automatically generated

เงื่อนไขอย่างละเอียด (5 นาที)  
**อาคาร 1**

* เป็นอาคารทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีความกว้าง 12 เมตร ยาว 9 เมตร
* มีความสูง 8.2 เมตร และหลังคาอาคารเป็นแนวราบ
* ความหนาของกำแพงและหลังคาไม่นำมาพิจารณาด้วย

**รถเครน**

* จุดหมุนของแขนเครนอยู่ที่จุด A และปลายอยู่ที่จุด B ตามในภาพ
* ในตอนเริ่มต้นแขนของเครนอยู่ในแนวราบและชี้ไปทางทิศเหนือ ตามภาพที่ 2
* แขนของเครนมีจุดหมุนอยู่ที่จุด A และอาคาร 1 มีตำแหน่งดังที่แสดงในภาพ
* ตอนเริ่มต้นความยาวของแขนเครนอยู่ที่ 2 เมตร และความยาวของแขนสามารถยืดไปได้ถึง 25 เมตร
* สามารถหมุนแขนเครนได้อย่างอิสระในแนวตั้งและแนวนอน
* ตำแหน่งของจุดหมุนไม่เปลี่ยนไปตามการหมุนของแขน
* ความสูงของจุดหมุนของแขนอยู่ที่ 2 เมตร
* ความยาวของเส้นลวดในการแขวนวัสดุสามารถปรับได้อิสระ

**นั่งร้าน**

* ความกว้างของนั่งร้านเป็น 1 เมตร จากกำแพงของอาคาร 1
* จุดที่สูงที่สุดของนั่งร้านที่ติดตั้ง ต้องอยู่ต่ำกว่าหลังคา
* จุดที่สัมผัสกับพื้นในมุมทิศตะวันออกเฉียงเหนือของนั่งร้านอยู่ที่ C ดังแสดงในภาพที่ 2
* ในการยกวัสดุขึ้นที่จุด C จำเป็นต้องจัดวางปลายของแขนเครนไว้เหนือจุด C พอดี และแขวนด้วยเส้นลวด
* น้ำหนักของวัสดุนั่งร้านจะน้อยกว่าน้ำหนักที่แขนเครนยกได้ และไม่นำขนาดของวัสดุมาพิจารณาในที่นีA diagram of a truck

  Description automatically generated

| **Q1**  จากภาพที่ 4 เราต้องการหมุนแขน AB ในแนวนอนและชี้ไปในทิศทางของจุด C' (2 เมตรเหนือจุด C พอดี) จงหามุม เพื่อหมุนแขนไปในแนวนอน |
| --- |
| **Q2**  หลังจากดำเนินการในข้อ Q1 แล้ว ในการยืดแขนเครนไปยังจุด B' (เหนือจุด C' พอดี) เราต้องการหมุนแขน AB ในแนวตั้งและชี้ไปยังทิศของ B' ดังแสดงในภาพที่ 5 ในกรณีนี้จงพิจารณาหามุมที่เหมาะสม เพื่อหมุนแขนไปในแนวตั้ง และอธิบายว่าทำไมค่าดังกล่าวจึงเหมาะสม  A diagram of a truck  Description automatically generated |
| **รายงาน *(*การบ้าน*)***  จากปัญหาที่พิจารณาไปแล้ว กลับมาทบทวนว่าสิ่งใดควรคิดใคร่ครวญเป็นพิเศษ เพื่อให้สามารถทำงานในสถานการณ์จริงได้ และสามารถทำงานได้อย่างชาญฉลาด โดยให้นักเรียนเขียนสิ่งที่นักเรียนคิดได้ลงไป  สร้างสถานการณ์สมมติ ปรับเปลี่ยนปัญหา และสร้างแผนการทำงานที่คล้ายกันออกมา |