**แผนการจัดการเรียนรู้**

**รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

**หน่วยการเรียนรู้ เวกเตอร์**

**เรื่อง การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ เวลา 50 นาที**

# 

**สาระสำคัญ**

บทนิยาม ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity)   
ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity)

บทนิยาม ให้ และ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เขียนเวกเตอร์ โดยให้จุดเริ่มต้นของ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ ผลบวก  
ของ และ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ ผลบวกของ และ เขียนแทนด้วย

บทนิยาม นิเสธของ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ นิเสธของ  
 เขียนแทนด้วย −

บทนิยาม ให้ และ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เวกเตอร์ ลบด้วย เขียนแทนด้วย − คือ ผลบวกของ และ   
นิเสธของ นั้นคือ −=+(−)

บทนิยาม ให้ 𝑘 เป็นสเกลาร์ และ เป็นเวกเตอร์ผลคูณของ กับสเกลาร์ 𝑘 เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย 𝑘 โดยที่

1. ถ้า 𝑘=0 แล้ว

2. ถ้า 𝑘>0 แล้ว จะมีขนาด |𝑘||| หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ

3. ถ้า 𝑘<0 แล้ว จะมีขนาด |𝑘||| หน่วย และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ

บทนิยาม ให้ = และ = เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ และ เขียนแทนด้วย ∙

กำหนดดังนี้ ∙= ＋

**สาระการวัดและเรขาคณิต**

เข้าใจเวกเตอร์ การดำเนินการของเวกเตอร์ และนำไปใช้

**ผลการเรียนรู้**

หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์

**จุดประสงค์การเรียนรู้**

เข้าใจความหมายของเวกเตอร์ และสามารถหาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

**สาระการเรียนรู้**

- เวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์

- การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

- ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์



**การต่อยอด 1 (40 นาที)**

บทนำ

* ครูชี้แจงจุดประสงค์ของบทเรียนนี้

เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจความหมายของเวกเตอร์มากขึ้น ผ่านการบวก การลบเวกเตอร์และการหาผลคูณ  
เชิงสเกลาร์

* ทบทวนนิยามของเวกเตอร์

**1) นิยามของเวกเตอร์**

บทนิยาม 

ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางเรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) **เราแทนเวกเตอร์ด้วยส่วนของเส้นตรง (เส้นตรงที่มีทิศทางเชื่อมสองจุด) เขียนแสดงด้วย**  (**เมื่อ** 𝑨 **เป็นจุดเริ่มต้น และ** 𝑩 **เป็นจุดสิ้นสุด) ,**

อธิบายว่า เนื่องจากเวกเตอร์ถูกนิยามด้วยขนาดและทิศทาง จุดเริ่มต้นของ   
เวกเตอร์สามารถกำหนดได้อย่างอิสระA black line with a black arrow

Description automatically generated

**2) การเท่ากันของเวกเตอร์**

บทนิยาม และ ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงข้ามกัน

บทนิยาม เท่ากับ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน

**และเขียนแทนด้วย**  =

**3) ขนาดของเวกเตอร์**

ขนาดของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย A black and blue arrows

Description automatically generated

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector): เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นหนึ่ง

เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) : เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย

**4) นิเสธของเวกเตอร์**

บทนิยาม

นิเสธของ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ A black arrows pointing to different directions

Description automatically generated

แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ นิเสธของ เขียนแทนด้วย

**5) การบวกเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์**

* การบวกเวกเตอร์

บทนิยาม

ให้ และ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เขียนเวกเตอร์ โดยให้จุดเริ่มต้นของ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ ผลบวกของ และ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ ผลบวกของ และ เขียนแทนด้วย +A red green and black triangle with black letters

Description automatically generated

กำหนดให้ = และ =

ดังที่แสดงในภาพ + จะสามารถเขียนแสดงได้หลายเส้นทาง เพื่อให้ง่ายต่อการวาดแผนภาพ เราจะ กำหนดว่าเป็นเวกเตอร์ที่เชื่อมระหว่างจุดสิ้นสุดของ กับจุดเริ่มต้นของ และเชื่อมระหว่างจุดเริ่มต้น ของ กับจุดสิ้นสุดของ

ดังนั้น

ในทำนองเดียวกัน สามารถเห็นได้ว่า และ

* การลบเวกเตอร์

บทนิยาม A triangle with arrows and letters

Description automatically generated

ให้ และ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เวกเตอร์ ลบด้วย เขียนแทนด้วย  
 − คือผลบวกของ และ นิเสธของ นั้นคือ − = + (−)

เมื่อ = , = ดังที่แสดงในภาพ

สามารถเขียนแสดงได้ว่า − = + (−) เนื่องจากเป็นการบวกของเวกเตอร์ กับนิเสธของ คือ −

จะได้ว่า ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

* ผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์

บทนิยาม

ให้ 𝑘 เป็นสเกลาร์ และ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของ กับสเกลาร์ 𝑘 เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย 𝑘

โดยที่ 1. ถ้า 𝑘 = 0 แล้ว 𝑘 = 0⃑⃑

2. ถ้า 𝑘 > 0 แล้ว 𝑘 จะมีขนาด |𝑘||| หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ

3. ถ้า 𝑘 < 0 แล้ว 𝑘 จะมีขนาด |𝑘||| หน่วย และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ

* คำศัพท์ต่างๆเกี่ยวกับเวกเตอร์ A red line in a graph

  Description automatically generated

เวกเตอร์ คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เวกเตอร์สามารถเขียนแสดงได้ดังนี้

ค่า เรียกว่า **ส่วนประกอบ** ของเวกเตอร์

เวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ ที่แสดงในภาพด้านขวา

สามารถเขียนได้เป็น หรือ

เวกเตอร์ยังสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ 𝑛 แถว 1 หลัก ได้ดังนี้

เวกเตอร์ที่เขียนแสดงเช่นนี้เรียกว่า **เวกเตอร์หลัก**

* การบวกเวกเตอร์โดยใช้เครื่องคำนวณ

ครูอธิบาย **สูตรสำหรับการบวกเวกเตอร์**

เมื่อ และ จะได้ว่า และ

**แบบฝึกหัด 1**

1) ให้ และ จงคำนวณหา และ

(คำตอบ) ให้ใช้สูตรสำหรับบวกเวกเตอร์ในการคำนวณ

จากนั้นให้บวกเวกเตอร์โดยใช้เครื่องคำนวณ

กด w เลือกเมนู เวกเตอร์ (Vector)

กำหนดเวกเตอร์ (vector) A เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ โดยกำหนดค่าส่วนประกอบ (Components) เป็น 3,2,0

I||R||3B2B0BB

A black and white image of a black and white sign

Description automatically generatedA white background with black text

Description automatically generatedA black and white sign with white text

Description automatically generatedA black and white sign with black text

Description automatically generated

A black rectangle with a square in the middle

Description automatically generated

และ B เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ โดยกำหนดค่าส่วนประกอบ (Components) เป็น 2,4,0

IR||R||2B4B0BB

A black and white text

Description automatically generatedA white background with black text

Description automatically generatedA black and white sign with black text

Description automatically generated



คำนวณหา (VctA + VctB)

T|R|+T|RR||

A black and white sign with black text

Description automatically generatedA black and white sign with black text

Description automatically generatedA white rectangular frame with black border

Description automatically generated

A black and white rectangular sign with a black line

Description automatically generatedA black text on a white background

Description automatically generatedA black rectangle with a square in the middle

Description automatically generated

คำนวณหา (VctB + VctA)

T|RR|+T|R||

A black and white sign with black text

Description automatically generatedA black and white rectangular sign with a black line

Description automatically generatedA white rectangular frame with black border

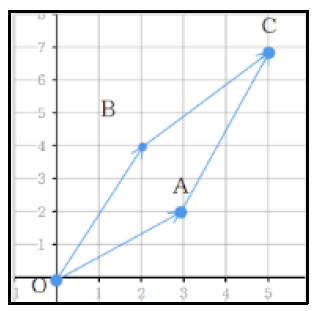
Description automatically generated

A black and white sign with black text

Description automatically generatedA black rectangle with a square in the middle

Description automatically generatedA black text on a white background

Description automatically generated



ดังแสดงในภาพ

* การเรียนรู้แบบสืบเสาะ เพื่อหาสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

ครูให้นักเรียนแสดงว่า โดยใช้แบบฝึกหัด

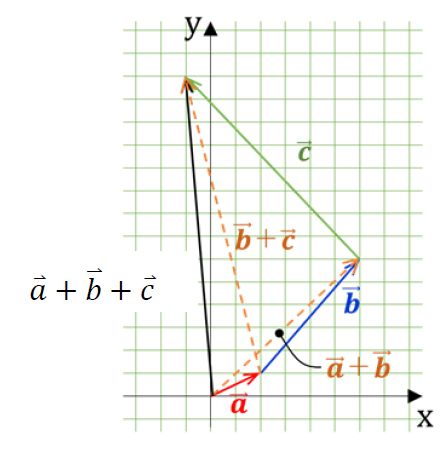
แบบฝึกหัด

1) ให้ , และ

จงคำนวณหา และ

วาดภาพบนกระดาษกราฟเพื่ออธิบายการคำนวณ

ในการอธิบายโจทย์ข้อนี้ ให้แสดงคำตอบก่อน

จากภาพที่แสดงด้านขวามือ จะได้ว่า 

ให้ทิศทางที่หลากหลายในระหว่างการคำนวณ

**แต่ผลลัพธ์สุดท้ายจะเป็นเวกเตอร์เดิมเสมอ**

ดังนั้น สามารถนิยามได้ว่า

ครูอธิบายนิยามนี้ให้แก่นักเรียน

* ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม

ให้ และ เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ และ เขียนแทนด้วย ∙ กำหนดดังนี้ ∙＋

จากนั้น ให้นักเรียนคำนวณโดยใช้นิยามนี้

ตัวอย่าง 1 เมื่อ และ

จะได้ว่า = (1×1)+(2×3) = 7

ตัวอย่าง 2 เมื่อ และ

จะได้ว่า = (2×(−4))+(0×2) = −8

ตัวอย่าง 3 เมื่อ และ

จะได้ว่า = (1×4)+(2×5)+(3×6) = 32

**แบบฝึกหัด 2**

ให้ และ จงตอบคำถามต่อไปนี้

(1) ค่าของ เป็นเท่าใด

(คำตอบ) = (4×0)+(3×5)+(0×0) = 15

A graph of a line with arrows

Description automatically generated

(2) วาด และ บนกระดาษกราฟ

ตรวจสอบให้แน่ใจว่าจุดเริ่มต้นของแต่ละเวกเตอร์อยู่ที่จุดเดียวกัน

เนื่องจากส่วนประกอบของ เป็น 0 ไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาด้วย

(3) ค่าของ คืออะไร

พิจารณาจากภาพในข้อ (2) เนื่องจากผลการคำนวณค่าของ คือ 3×5 จะพบว่ารายละเอียดในภาพ ① และ ② ด้านล่าง มีความเกี่ยวข้องกับผลการคำนวณค่าของ 

ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายในแต่ละภาพเพื่อหาค่าที่ผลลัพธ์มีความเกี่ยวข้องกับค่าของ

[แนะนำ: ภาพที่ ① ลากเส้นตรงจากจุด 𝐴 ให้ตั้งฉากกับ ที่จุด 𝑃 และหาค่าของ  
 ในภาพที่ ② ทำในทำนองเดียวกันกับภาพที่ ①

A close-up of a test

Description automatically generated

* ตรวจคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณ

กด w เลือกเมนู เวกเตอร์ (Vector)

กำหนดเวกเตอร์ (vector) A เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ

I||R||4B3B0BB

A black and white image of a black and white sign

Description automatically generatedA white background with black text

Description automatically generatedA black and white sign with white text

Description automatically generated

A black and white sign with black text

Description automatically generatedA black rectangle with a square in the middle

Description automatically generated

และ B เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ

IR||R||0B5B0BB

A black and white text

Description automatically generatedA white background with black text

Description automatically generatedA black and white sign with black text

Description automatically generated

A black rectangle with a square in the middle

Description automatically generated

คำนวณหา

T|R|T|||T|RR|

A white rectangular frame with black border

Description automatically generatedA black and white sign with black text

Description automatically generatedA black and white sign with black text

Description automatically generated

A black and white rectangular sign with white text

Description automatically generatedA black and white label with black text

Description automatically generatedA black and white rectangular sign with a black line

Description automatically generated

A black text on a white background

Description automatically generated

**ภาคผนวก** 

* นิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์

เนื้อหาต่อไปนี้ จะเป็นการอธิบายที่มาของสูตรผลคูณเชิงสเกลาร์ ที่เกี่ยวข้องกับมุมระหว่างเวกเตอร์

บทนิยาม

มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึงมุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนาน และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ทั้งสอง A diagram of a circle with arrows and a circle with a circle in the center

Description automatically generated

จากรูป กำหนดจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ คือ และ มีจุดเริ่มต้นเดียวกันที่จุดกำเนิด 𝑂

จะได้ว่า และ และ ซึ่ง หมายถึง **ขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์**  และ

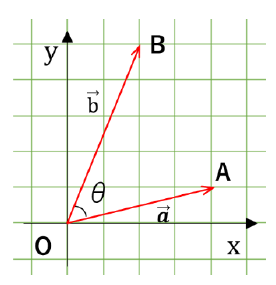
* ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม

ให้ และ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือ สามมิติ และ 𝜃 เป็นขนาดของมุมระหว่าง และ ซึ่ง จะได้ว่า 

กำหนดให้เวกเตอร์ และ มีขนาดมุมระหว่าง และ เป็น 𝜃 ผลคูณเชิงสเกลาร์ ของเวกเตอร์ และ ตามบทนิยามคือ

เราจะพิสูจน์ว่า

1. ใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส คำนวณหา: 

และ

2. ต่อมา ใช้สูตรของโคไซน์ในการหาค่าของ 𝑐𝑜𝑠𝜃

จาก

ดังนั้น

จากนั้น ใช้สูตรของโคไซน์ในการหา

A math equations on a white background

Description automatically generated

3. จะได้ว่า

A math equations on a white background

Description automatically generated