

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ สามเหลี่ยมโปเลียน

เรื่อง การประยุกต์ใช้ตัวเลขบนระนาบเชิงซ้อน (ขั้นสูง)

เวลา 50 นาที

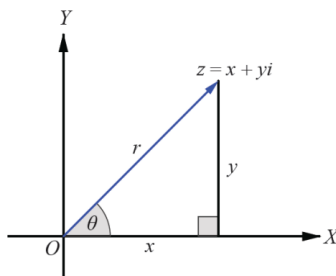
ผลการเรียนรู้

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

1. รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ จะสามารถเขียนแสดง z ด้วยเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



เมื่อกำหนดให้ r แทนระยะทางระหว่างจุดกำเนิด O กับ z และ θ เป็นขนาดของมุม ซึ่งถ้าวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{Oz}$ จะได้ $\theta > 0$ และถ้าวัดมุมตามเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{Oz}$ จะได้ $\theta < 0$ และได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = r \cos \theta \text{ และ } y = r \sin \theta$$

นอกจากนี้ ยังได้ความสัมพันธ์ที่ทำให้หา r และ θ จาก x และ y ดังนี้

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ และ } \tan \theta = \frac{y}{x} \text{ เมื่อ } x \neq 0$$

ดังนั้น อาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ในรูป r และ θ ได้ดังนี้

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เรียกว่า รูปเชิงขั้วของ z

และเรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ของ z

2. ทฤษฎีบท

ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ โดยที่ $z_1 \neq 0$ และ $z_2 \neq 0$ จะได้ว่า

$$1) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$2) \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$$

$$3) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_2}{r_1} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$4) \bar{z}_1 = r_1 (\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$$

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เข้าใจความหมายเชิงกราฟของผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน
2. เข้าใจประโยชน์ของจำนวนเชิงซ้อนโดยการประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในปัญหาเชิงตัวเลขในชีวิตประจำวัน

สรุปหัวข้อ

กิจกรรมที่ 1: เรียงลำดับเงื่อนไขที่จำเป็นเพื่อยืนยันว่าสามเหลี่ยมโนเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

กิจกรรมที่ 2: แทนค่าเฉพาะและตรวจสอบว่าสามเหลี่ยมโนเลียนมีด้านเท่ากันหมดหรือไม่

สื่อการเรียนรู้

เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ และใบกิจกรรม

กระบวนการจัดการเรียนรู้

บทนำ

ในบทเรียนนี้ ผู้เรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับความหมายเชิงกราฟของจำนวนเชิงซ้อน และจะได้ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน เพื่อเรียนรู้และทำความเข้าใจถึงประโยชน์ของจำนวนเหล่านี้ผ่านสื่อเรื่องสามเหลี่ยมนโปเลียน

กิจกรรมที่ 1 เรียงลำดับเงื่อนไขต่าง ๆ ที่จำเป็นเพื่อยืนยันว่าสามเหลี่ยมนโปเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

กิจกรรมที่ 2 แทนค่าเฉพาะและตรวจสอบว่าสามเหลี่ยมนโปเลียนมีด้านเท่ากันหมดหรือไม่

กิจกรรมที่ 1

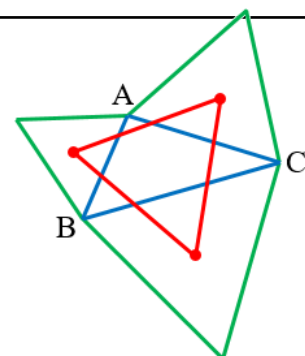
เรียงลำดับขั้นตอนที่จำเป็นเพื่อยืนยันว่าสามเหลี่ยมนโปเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

- อธิบายเกี่ยวกับสามเหลี่ยมนโปเลียน

สามเหลี่ยมนโปเลียนสร้างจาก $\triangle ABC$ ใด ๆ โดยการวาดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสามรูปขนาดเท่ากับที่อยู่ภายนอก $\triangle ABC$ โดยใช้ด้านแต่ละด้าน

※ แหล่งข้อมูลบางแห่งให้เครดิตนโปเลียน โบนาปาร์ต ในการค้นพบรูปสามเหลี่ยมเหล่านี้

รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากเส้นเชื่อมจุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งสามนี้จะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งเรียกว่า สามเหลี่ยมนโปเลียน



- นำเสนอปัญหาสำหรับบทเรียนนี้แก่ผู้เรียน
คำถาม สามเหลี่ยมนโปเลียนมีด้านเท่ากันหมดจริงหรือไม่
ลองพิจารณาวิธีการ เพื่อหาคำตอบ

ถ้ามีเวลาเพียงพอ ผู้สอนให้ผู้เรียนลองคิดหาวิธีที่จะยืนยันว่ารูปสามเหลี่ยมนี้คือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

- กำหนดลำดับขั้นตอนเพื่อยืนยันว่ารูปสามเหลี่ยมมีด้านเท่ากันหมด

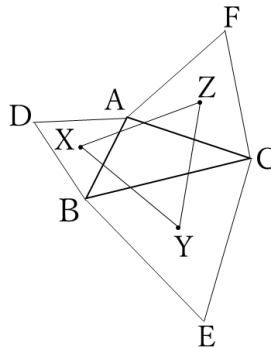
กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่สร้างขึ้นภายนอก $\triangle ABC$ คือ $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ และ $\triangle CAF$ ดังที่แสดงในรูป และให้จุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมเหล่านี้คือ X, Y และ Z ตามลำดับ

(1) สามารถตรวจสอบอะไรเพื่อยืนยันว่า $\triangle XYZ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

$$XY = YZ = ZX \text{ หรือ}$$

$$\angle XYZ = \angle YXZ = \frac{\pi}{3} \text{ หรือ}$$

$$XY = XZ \text{ และ } \angle YXZ = \frac{\pi}{3} \text{ ได้เช่นกัน}$$



ผู้สอนให้ผู้เรียนคิด
เกี่ยวกับเงื่อนไขในการ
สร้างรูปสามเหลี่ยมด้าน
เท่า

(2) จะพิสูจน์ว่า $XY = YZ = ZX$ ได้อย่างไร (สมมติว่าทราบพิกัดของจุด A, B และ C)

จำเป็นต้องคำนวณพิกัดของจุด X, Y และ Z จากพิกัดของจุด A, B และ C แล้วแสดงว่าระยะทางระหว่างจุดเหล่านั้นเท่ากัน

(3) จะคำนวณพิกัดของจุด X ได้อย่างไร

พิกัดจุด X สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม

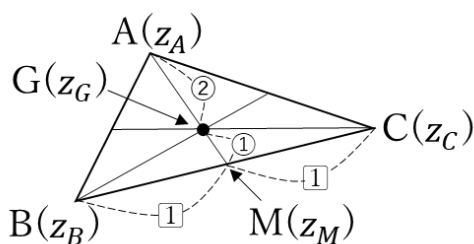
($X = (A+B+D)/3$) โดยใช้พิกัดของจุด A, B และ D (จุด Y และ Z สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน)

(คำอธิบายเพิ่มเติม)

ให้จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC แทนด้วยพิกัด z_A, z_B และ z_C

และให้จุดศูนย์กลาง G แทนด้วยพิกัด z_G

ถ้าจำเป็น ให้ผู้สอน
อธิบายด้วยคำอธิบาย
เพิ่มเติม



พิกัดของจุดกึ่งกลาง $M(z_M)$ ของด้าน BC ถูกกำหนดโดย

$$z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$$

และเนื่องจาก G คือจุดบนส่วนของเส้นตรง AM ที่ถูกแบ่งด้วยอัตราส่วน 2:1

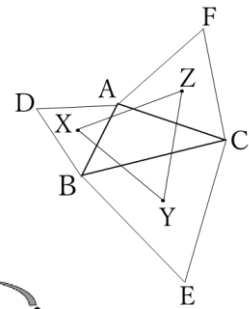
$$z_G = \frac{1 \times z_A + 2 \times z_M}{2 + 1} = \frac{z_A + (z_B + z_C)}{3} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

(4) จะคำนวณพิกัดของจุด D ได้อย่างไร (สมมติว่าทราบพิกัดของจุด A, B และ C)

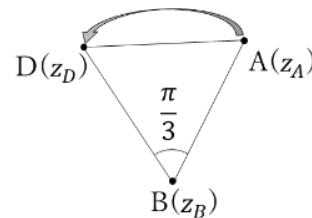
บนระนาบ XY สามารถคำนวณค่าจากความสัมพันธ์ระหว่างจุดกับเส้นต่าง ๆ ได้ แต่ขั้นตอนมีความยุ่งยากและใช้เวลา

➔ นี่คือนิพจน์ที่จะแนะนำแนวคิดเกี่ยวกับระนาบเชิงซ้อน

(5) จะคำนวณหาจำนวนเชิงซ้อน z_D ซึ่งแทนจุด D โดยแนะนำแนวคิดเกี่ยวกับระนาบของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างไร (สมมติว่าทราบพิกัดของจุด A, B และ C)



พิจารณาข้อเท็จจริงที่ว่า การคูณจำนวนเชิงซ้อนจะเป็นการหมุน ซึ่งสามารถคำนวณค่าจำนวนเชิงซ้อน z_D ที่แทนจุด D ได้ หากพิจารณาค่านี้ในฐานะจุด A ที่ถูกหมุน $\frac{\pi}{3}$ หน่วยรอบจุด B



※ ผู้สอนให้คำอธิบายเพิ่มเติมว่า z ในแผนภาพจะแทนค่าของจำนวนเชิงซ้อน ($a + bi$)

- ต่อมา ทบทวนการคูณจำนวนเชิงซ้อนและการหมุนรอบจุดกำเนิด

$$\text{เมื่อ } z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ และ } z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

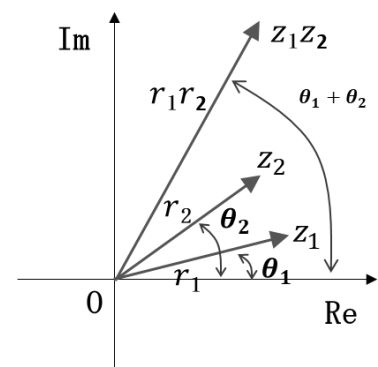
ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

ความหมายเชิงกราฟของผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน

จุด $z_1 z_2$ คือจุดที่ได้จากการหมุน z_1 เป็นมุม θ_2 ทวนเข็มนาฬิกาการรอบ

จุดกำเนิด O และกำหนดความยาวของส่วนของเส้นตรงเป็น $r_1 r_2$



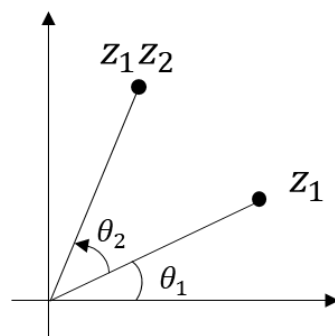
หมุนจุด z_1 รอบจุดกำเนิดเป็นมุม θ_2 โดยไม่เปลี่ยนความยาว
ของส่วนของเส้นตรง

คูณ z_1 ด้วย $z_2 = 1 \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ($r_2 = 1$)

$$z_1 z_2 = z_1 \times 1 \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \dots \star$$

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times 1 \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

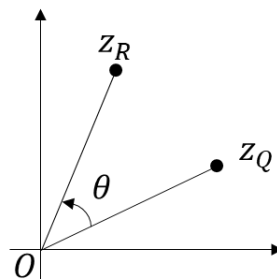
$$z_1 z_2 = r_1 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$



① หมุน z_Q เป็นมุม θ รอบจุดกำเนิด

$$z_R = z_Q (\cos \theta + i \sin \theta)$$

※ สมการนี้คือรูปทั่วไปของสมการ $\star$ ข้างต้น



② หมุน z_Q เป็นมุม θ รอบจุด z_P

เช่นเดียวกับการแปลง z_P เป็นจุดกำเนิดดังรูป จุด z_Q และ z_R ถูกแปลงเป็นจุดใหม่ z'_Q และ z'_R ดังที่แสดงด้านล่าง

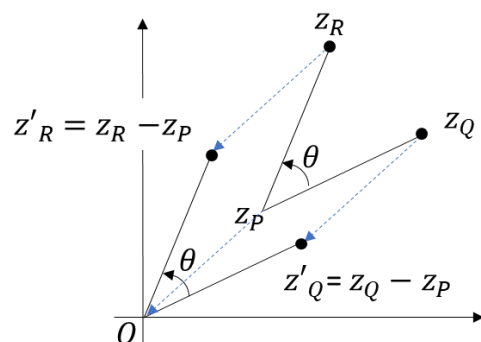
$$z'_Q = z_Q - z_P$$

$$z'_R = z_R - z_P$$

เขียนแสดงค่าโดยใช้ความสัมพันธ์ที่ได้ในข้อ ① จะได้ว่า

$$z'_R = z'_Q (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z_R - z_P = (z_Q - z_P) (\cos \theta + i \sin \theta)$$

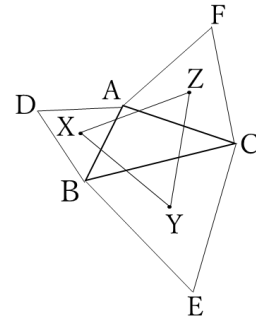


(6) ถ้ามองจุด D เป็นจุดที่ได้จากการหมุนจุด A รอบจุด B

ด้วยมุม $\frac{\pi}{3}$ เราจะใช้สูตรในข้อ (2) เขียนแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่แทนจุด D ได้อย่างไร

$$z_D - z_B = (z_A - z_B) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_D = (z_A - z_B) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + z_B$$



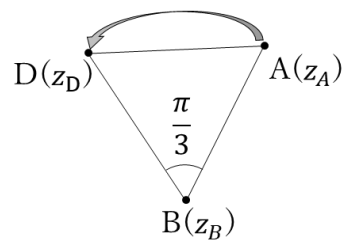
(7) ในทำนองเดียวกัน จะเขียนแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่แทนจุด E และ F ได้อย่างไร

$$z_E - z_C = (z_B - z_C) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_E = (z_B - z_C) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + z_C$$

$$z_F - z_A = (z_C - z_A) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_F = (z_C - z_A) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + z_A$$

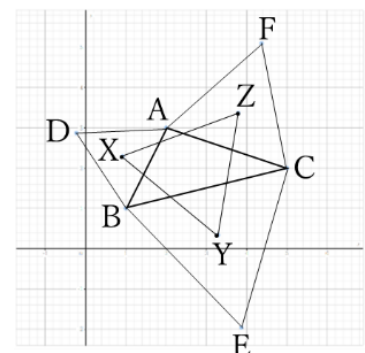


กิจกรรมที่ 2

กิจกรรมนี้ จะแทนค่าเฉพาะและใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์เพื่อยืนยันว่าสามเหลี่ยมโนเปลี่ยนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหรือไม่

ยืนยันว่าสามเหลี่ยมโนเปลี่ยนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เมื่อค่าของ $A(z_A)$, $B(z_B)$, และ $C(z_C)$ มีค่าต่อไปนี้

$$z_A = 2 + 3i, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 5 + 2i$$



ก่อนแก้ปัญหา ให้ปรับการตั้งค่าบนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

ผู้สอนแนะนำผู้เรียนว่า ต้องใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์โนโหมด ขั้นสูง (Complex) และตั้งค่าหน่วยของมุมเป็นเรเดียนก่อนเสมอ

(10) เก็บค่า z_E และ z_F ในฐานะตัวแปร E และ F บนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

จากข้อ (7) จะได้ว่า

$$z_E = (z_B - z_C) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + z_C$$

$$z_F = (z_C - z_A) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + z_A$$

นิพจน์ที่คล้ายกันได้จากข้อ (9) ดังนั้น
สามารถเปลี่ยนค่าที่ป้อนสำหรับตัวแปร
A, B และ C

ในโหมด ขั้นสูง (Complex) ป้อนค่า $(B - C) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + C$

((5 - 6) (cos 7 3 >) + 9 sin 7 3 >) + 6
(EXE) (2.30) (V) (V) (OK) (OK)

(z_E ถูกเก็บในฐานะค่า E)

$$(B-C) \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) + C$$

$$\frac{6+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-4\sqrt{3}}{2}i$$

A=2+3i	B=1+i
C=5+2i	D=-0.232+2.866i
E=0	F=0
x=0	y=0
z=0	

A=2+3i	B=1+i
C=5+2i	D=-0.232+2.866i
E=3.866-1.964i	F=0
x=0	y=0
z=0	

ในโหมด ขั้นสูง (Complex)

ป้อนค่า $(C - A) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + A$

นิพจน์ที่คล้ายกันได้จากข้อ (9)
ดังนั้น สามารถเปลี่ยนค่าที่ป้อน
สำหรับตัวแปร A, B และ C

((6 - 4) (cos 7 3 >) + 9 sin 7 3 >) + 4
(EXE) (2.30) (V) (V) (OK) (OK)

(z_F ถูกเก็บในฐานะค่า F)

$$(C-A) \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) + A$$

$$\frac{7+\sqrt{3}}{2} + \frac{5+3\sqrt{3}}{2}i$$

A=2+3i	B=1+i
C=5+2i	D=-0.232+2.866i
E=3.866-1.964i	F=0
x=0	y=0
z=0	

A=2+3i	B=1+i
C=5+2i	D=-0.232+2.866i
E=3.866-1.964i	F=4.366+5.098i
x=0	y=0
z=0	

(11) ใช้ตัวแปร A, B, C, D, E และ F ที่ถูกเก็บค่าในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์หาจำนวนเชิงซ้อน z_X ,

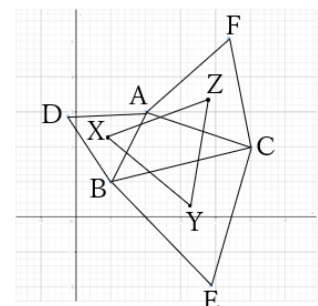
z_Y , และ z_Z ที่แทน X, Y, และ Z

จาก (3) ป้อนค่า $\frac{A+B+D}{3}$ ในฐานะค่าของ z_X ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์และ
เก็บไว้ในฐานะค่า x

((4 + 5 + 1) 3) (EXE)

$$\frac{(A+B+D)}{3}$$

$$\frac{9-2\sqrt{3}}{6} + \frac{12+\sqrt{3}}{6}i$$



⊕ ⊖ ⊗ ⊙ ⊛ ⊛ (z_x ถูกเก็บในฐานค่า X)

A=2+3i	B=1+i
C=5+2i	D=-0.232+2.866i
E=3.866-1.964i	F=4.366+5.098i
x=0	y=0
z=0	

ในทำนองเดียวกัน ป้อนค่า $\frac{B+C+E}{3}$ และ $\frac{A+C+F}{3}$ ในฐานค่าของ z_y และ z_z และเก็บค่าไว้ในฐาน y และ z

$$\frac{(B+C+E)}{3} = \frac{18+\sqrt{3}}{6} + \frac{9-4\sqrt{3}}{6}i$$

ค่าของ Y

$$\frac{(A+C+F)}{3} = \frac{21+\sqrt{3}}{6} + \frac{5+\sqrt{3}}{2}i$$

ค่าของ Z

A=2+3i	B=1+i
C=5+2i	D=-0.232+2.866i
E=3.866-1.964i	F=4.366+5.098i
x=0.9226+2.288i	y=3.2886+0.345i
z=0	

(12) ใช้ z_x, z_y และ z_z เขียนแสดงความยาวแต่ละด้านของ $\triangle XYZ$

เมื่อเขียนแสดงค่าโดยใช้ค่าของจำนวนเชิงซ้อน z_x, z_y และ z_z ความยาวของด้าน XY, YZ และ ZX จะแสดงได้ดังนี้

$$XY = |z_x - z_y|, YZ = |z_y - z_z|, ZX = |z_z - z_x|$$

คำนวณความยาวของแต่ละด้านโดยใช้ตัวแปร x, y และ z ที่เก็บค่าไว้ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

⊕, เลือก [Numeric Calc], ⊛, เลือก [Absolute Value], ⊛

Complex
Func Analysis
Probability
Numeric Calc

Absolute Value
Round Off

| |

|x-y|

|y-z|

|z-x|

3.061827104

3.061827104

3.061827104

จะเห็นว่าทุกด้านมีความยาวเท่ากัน ดังนั้นยืนยันได้แล้วว่า สามเหลี่ยมนโปเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ทบทวน 1

ลองยืนยันว่า ทฤษฎีนี้เป็นจริงสำหรับจุดยอดอื่น ๆ หรือไม่ โดยใช้วิธีการเดียวกัน

จบบทเรียนด้วยคำถามเพิ่มเติม
สำหรับผู้เรียน เช่นคำถามทางซ้าย
นี้เป็นวิธีการกระตุ้นให้ผู้เรียน
พัฒนาความอยากรู้อยากเห็นของ
ตนเอง

ทบทวน 2

ยืนยันได้แล้วว่าสามเหลี่ยมนโปเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยใช้เงื่อนไขที่ว่าด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะต้องมีความยาวเท่ากัน ($XY=YZ=ZX$)

➡ ลองคิดเกี่ยวกับวิธีอื่น ๆ เพื่อยืนยันว่าสามเหลี่ยมนโปเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยใช้เงื่อนไขอื่น ๆ
ที่ได้ในข้อ (1): $\angle XYZ = \angle YXZ = \frac{\pi}{3}$ หรือทั้ง $XY=XZ$ และ $\angle YXZ = \frac{\pi}{3}$

ทบทวน 3

สำหรับ $\triangle ABC$ ใด ๆ ให้วาดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่อยู่ข้างใน $\triangle ABC$ โดยใช้แต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็นที่ทราบกันว่ารูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากเส้นเชื่อมจุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสามรูปนี้จะ
เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าด้วยเช่นกัน

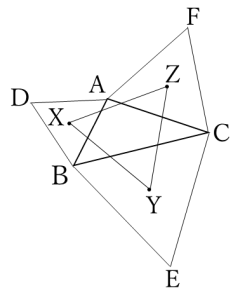
➡ ลองใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ยืนยันว่าทฤษฎีนี้เป็นจริงหรือไม่ โดยใช้วิธีการที่คล้ายคลึงกัน

ใบกิจกรรม

หน่วย	ระนาบเชิงซ้อน	หัวข้อ	สามเหลี่ยมนโปเลียน
ชื่อ		ชั้นเรียน	

มีรูปสามเหลี่ยมชนิดหนึ่งเรียกว่าสามเหลี่ยมนโปเลียน ซึ่งถูกนิยามดังต่อไปนี้

สำหรับ $\triangle ABC$ ใด ๆ เมื่อวาดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสามอันเท่า ที่อยู่ภายนอก $\triangle ABC$ โดยใช้ด้านแต่ละด้าน รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากเส้นเชื่อมจุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งสามนี้จะเป็น รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งเรียกว่า สามเหลี่ยมนโปเลียน



คำถาม สามเหลี่ยมนโปเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจริงหรือไม่ ลองพิจารณาวิธีการตรวจสอบสิ่งนี้

กิจกรรมที่ 1 (ขั้นตอนการยืนยันว่าสามเหลี่ยมนโปเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า)

(1) สามารถตรวจสอบอะไรเพื่อยืนยันว่า $\triangle XYZ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

$$XY = YZ = ZX \text{ (เงื่อนไขของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า), } \angle XYZ = \angle YXZ = \frac{\pi}{3} \text{ หรือทั้ง } XY = XZ \text{ และ } \angle YXZ = \frac{\pi}{3} \text{ หรืออื่น ๆ}$$

(2) จะพิสูจน์ว่า $XY = YZ = ZX$ ได้อย่างไร (สมมติว่าทราบพิกัดของจุด A, B และ C)

จำเป็นต้องคำนวณพิกัดของจุด X, Y และ Z จากพิกัดของจุด A, B และ C แล้วแสดงว่าระยะทางระหว่างจุดเหล่านั้นเท่ากัน

(3) จะคำนวณพิกัดของจุด X ได้อย่างไร

พิกัดจุด X สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ($X = \frac{A+B+D}{3}$) โดยใช้พิกัดของจุด A, B และ D (จุด Y และ Z สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน)

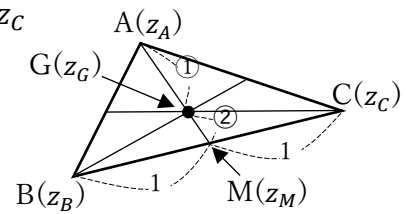
(4) จะคำนวณพิกัดของจุด D ได้อย่างไร (สมมติว่าทราบพิกัดของจุด A, B และ C)

บนระนาบ XY สามารถคำนวณค่าจากความสัมพันธ์ระหว่างจุดกับเส้นต่าง ๆ ได้ แต่ขั้นตอนมีความยุ่งยากและใช้เวลา

➔ นี่คือนิพจน์ที่จะแนะนำแนวคิดเกี่ยวกับระนาบเชิงซ้อน

(คำอธิบายเพิ่มเติม)

ให้จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC แทนด้วยจำนวนเชิงซ้อน z_A , z_B และ z_C
และให้จุดศูนย์กลาง G แทนด้วยจำนวนเชิงซ้อน z_G

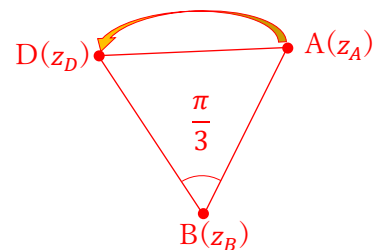


พิกัดของจุดกึ่งกลาง $M(z_M)$ ของด้าน BC ถูกกำหนดโดย $z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$
และเนื่องจาก G คือจุดบนส่วนของเส้นตรง AM ที่ถูกแบ่งด้วยอัตราส่วน 2:1

$$z_G = \frac{1 \times z_A + 2 \times z_M}{2 + 1} = \frac{z_A + (z_B + z_C)}{3} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

- (5) จะคำนวณหาพิกัดของจุด D โดยแนะนำแนวคิดเกี่ยวกับบรรนาบของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างไร
(สมมติว่าทราบพิกัดของจุด A และ B)

พิจารณาข้อเท็จจริงที่ว่า การคูณจำนวนเชิงซ้อนจะเป็นการหมุน
ซึ่งสามารถคำนวณหาพิกัดจุด D ได้ถ้าพิจารณาค่านี้ในฐานะ
จุด A ที่ถูกหมุน $\frac{\pi}{3}$ หน่วยรอบจุด B

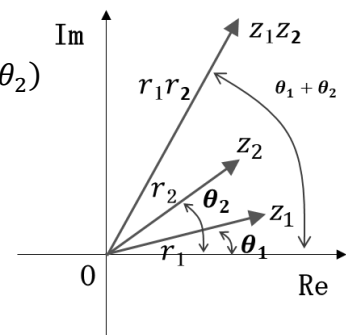


ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน - การหมุนรอบจุดกำเนิด (ทบทวน)

ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, and $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$



ความหมายเชิงกราฟของผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน

จุด $z_1 z_2$ คือจุดที่ได้จากการหมุน z_1 เป็นมุม θ_2 ทวนเข็มนาฬิกาการรอบจุดกำเนิด O
และกำหนดความยาวของส่วนของเส้นตรงเป็น $r_1 r_2$

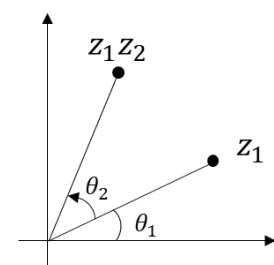
หมุนจุด z_1 รอบจุดกำเนิดเป็นมุม θ_2 โดยไม่เปลี่ยนความยาวของส่วนของเส้นตรง

คูณ z_1 ด้วย $z_2 = 1 \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ($r_2 = 1$)

$$z_1 z_2 = z_1 \times 1 \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \dots \star$$

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times 1 \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

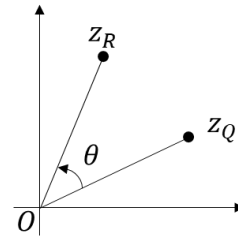
$$z_1 z_2 = r_1 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$



① หมุน z_Q เป็นมุม θ รอบจุดกำเนิด

$$z_R = z_Q (\cos \theta + i \sin \theta)$$

※ สมการนี้คือรูปทั่วไปของสมการ ★ ในหน้าที่แล้ว



② หมุน z_Q เป็นมุม θ รอบจุด z_P

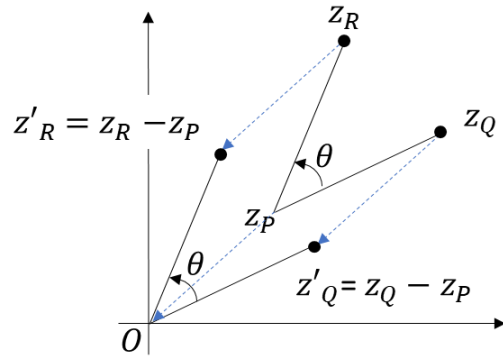
เช่นเดียวกับการแปลง z_P เป็นจุดกำเนิดดังรูป จุด z_Q

และ z_R ถูกแปลงเป็นจุดใหม่ z'_Q และ z'_R ดังที่

แสดงด้านล่าง

$$z'_Q = z_Q - z_P$$

$$z'_R = z_R - z_P$$



เขียนแสดงค่าโดยใช้ความสัมพันธ์ที่ได้ในข้อ ① จะได้ว่า

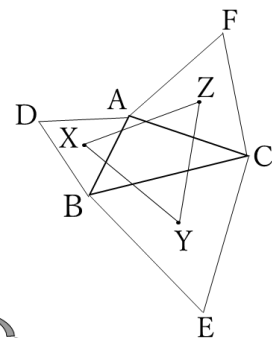
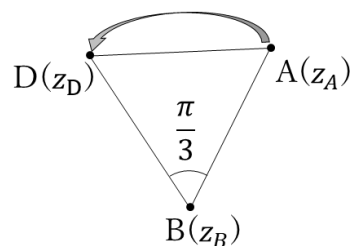
$$z'_R = z'_Q (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z_R - z_P = (z_Q - z_P) (\cos \theta + i \sin \theta)$$

(6) ถ้ามองจุด D เป็นจุดที่ได้จากการหมุนจุด A รอบจุด B ด้วยมุม $\frac{\pi}{3}$ จะใช้สูตรในข้อ ② เขียนแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่แทนจุด D ได้อย่างไร

$$z_D - z_B = (z_A - z_B) (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$z_D = (z_A - z_B) (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) + z_B$$



(7) ในทำนองเดียวกัน จะเขียนแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่แทนจุด E และ F ได้อย่างไร

$$z_E - z_C = (z_B - z_C) (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$z_E = (z_B - z_C) (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) + z_C$$

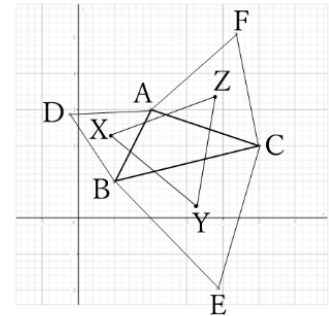
$$z_F - z_A = (z_C - z_A) (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$z_F = (z_C - z_A) (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) + z_A$$

กิจกรรมที่ 2 (ยืนยันโดยใช้การแทนค่า)

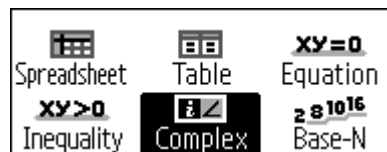
ยืนยันว่าสามเหลี่ยมเปลี่ยนไปเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เมื่อค่าของ $A(z_A)$, $B(z_B)$ และ $C(z_C)$ มีค่าต่อไปนี้

$$z_A = 2 + 3i, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 5 + 2i$$



ก่อนแก้ปัญหา ให้ปรับการตั้งค่าบนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

, เลือก [ชั้นสูง [Complex]], 

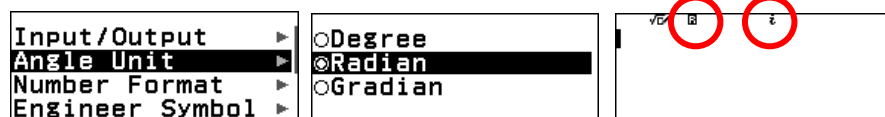


ตั้งค่าหน่วยของมุมเป็นเรเดียน

, เลือก [ตั้งค่าการคำนวณ [Calc Settings]], 



เลือก [หน่วยของมุม [Angle Unit]], , เลือก [เรเดียน [Radian]], , 



ตรวจสอบว่า “i” ที่ระบุโหมด ชั้นสูง (Complex) และ “R” ที่ระบุโหมด เรเดียน (Radian) ปรากฏบนจอ

(8) เก็บค่า $z_A = 2 + 3i$, $z_B = 1 + i$, และ $z_C = 5 + 2i$ ในฐานะตัวแปร A, B และ C บนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

A=2+3i	B=1+i
C=5+2i	D=0
E=0	F=0
X=0	Y=0
Z=0	

(9) เก็บค่า z_D ในฐานะตัวแปร D บนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

จากข้อ (6)

$$\text{ทราบว่า } z_D = (z_A - z_B) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + z_B$$

ดังนั้น ป้อนค่า $(A - B) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + B$ ในโหมด ชั้นสูง (Complex)

$(A-B) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) + z_C$ $\frac{3-2\sqrt{3}}{2} + \frac{4+\sqrt{3}}{2}i$	A=2+3i C=5+2i E=0 x=0 z=0	B=1+i D=0 F=0 y=0
Store Recall Edit	A=2+3i C=5+2i E=0 x=0 z=0	B=1+i D=-0.232+2.866i F=0 y=0

(10) เก็บค่า z_E และ z_F ในฐานตัวแปร E และ F บนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

จากข้อ (7) จะได้ว่า

$$z_E = (z_B - z_C) \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) + z_C$$

$$z_F = (z_C - z_A) \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) + z_A$$

ดังนั้น ป้อนค่า $(B - C) \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) + C$ ในโหมด ขั้นสูง (Complex) แล้วเก็บค่าที่ได้ในฐานค่า E

$(B-C) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) + z_C$ $\frac{6+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-4\sqrt{3}}{2}i$	A=2+3i C=5+2i E=0 x=0 z=0	B=1+i D=-0.232+2.866i F=0 y=0
Store Recall Edit	A=2+3i C=5+2i E=3.866-1.964i x=0 z=0	B=1+i D=-0.232+2.866i F=0 y=0

ป้อนค่า $(C - A) \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) + A$ ในโหมด ขั้นสูง (Complex) แล้วเก็บค่าที่ได้ในฐานค่า F

$(C-A) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) + z_A$ $\frac{7+\sqrt{3}}{2} + \frac{5+3\sqrt{3}}{2}i$	A=2+3i C=5+2i E=3.866-1.964i x=0 z=0	B=1+i D=-0.232+2.866i F=0 y=0
Store Recall Edit	A=2+3i C=5+2i E=3.866-1.964i x=0 z=0	B=1+i D=-0.232+2.866i F=4.366+5.098i y=0

(11) ใช้ตัวแปร A, B, C, D, E, และ F ที่ถูกเก็บค่าในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์หาจำนวนเชิงซ้อน z_X , z_Y และ z_Z ที่แทน X, Y และ Z

จาก (3) ป้อนค่า $\frac{A+B+D}{3}$ ในฐานค่าของ z_X ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์และเก็บไว้ในฐานค่า x

$\frac{(A+B+D)}{3}$ $\frac{9-2\sqrt{3}}{6} + \frac{12+\sqrt{3}}{6}i$	$A=2+3i$ $C=5+2i$ $E=3.866-1.964i$ $x=0$ $z=0$	$B=1+i$ $D=-0.232+2.866i$ $F=4.366+5.098i$ $y=0$
Store Recall Edit	$A=2+3i$ $C=5+2i$ $E=3.866-1.964i$ $x=0.9226+2.288i$ $z=0$	$B=1+i$ $D=-0.232+2.866i$ $F=4.366+5.098i$ $y=0$

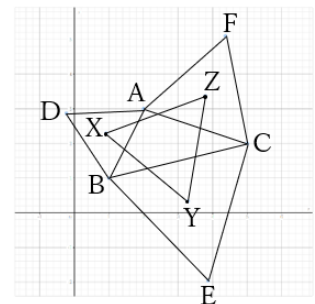
ในทำนองเดียวกัน ป้อนค่า $\frac{B+C+E}{3}$ และ $\frac{A+C+F}{3}$ ในฐานค่าของ z_Y และ z_Z และเก็บค่าไว้ในฐาน y และ z

$\frac{(B+C+E)}{3}$ $\frac{18+\sqrt{3}}{6} + \frac{9-4\sqrt{3}}{6}i$	$\frac{(A+C+F)}{3}$ $\frac{21+\sqrt{3}}{6} + \frac{5+\sqrt{3}}{2}i$	$A=2+3i$ $C=5+2i$ $E=3.866-1.964i$ $x=0.9226+2.288i$ $z=3.7886+3.366i$
		$B=1+i$ $D=-0.232+2.866i$ $F=4.366+5.098i$ $y=3.2886+0.345i$

(12) ใช้ z_X, z_Y และ z_Z เขียนแสดงความยาวแต่ละด้านของ $\triangle XYZ$

เมื่อเขียนแสดงค่าโดยใช้ค่าของจำนวนเชิงซ้อน z_X, z_Y และ z_Z ความยาวของด้าน XY, YZ และ ZX จะแสดงได้ดังนี้

$$XY = |z_X - z_Y|, \quad YZ = |z_Y - z_Z|, \quad ZX = |z_Z - z_X|$$



คำนวณความยาวของแต่ละด้าน โดยใช้ตัวแปร x, y และ z ที่เก็บค่าไว้ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

Complex Func Analysis Probability Numeric Calc	Absolute Value Round Off	$ x-y $
$ x-y $	$ y-z $	$ z-x $
3.061827104	3.061827104	3.061827104

จะเห็นว่าทุกด้านมีความยาวเท่ากัน ดังนั้นยืนยันได้แล้วว่าสามเหลี่ยมนโปเลียนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า