

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เรื่อง ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

.....

ผลการเรียนรู้

หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ

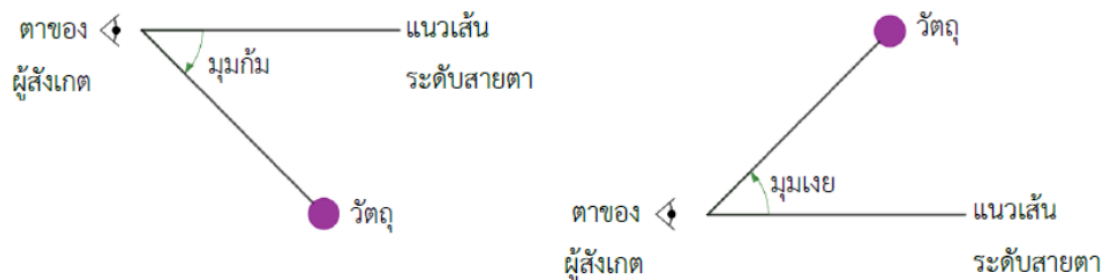
1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดโดเมนเพื่อให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน มีโดเมนและเรนจ์เป็นดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
$y = \cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$y = \tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

ฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \arcsin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
$y = \arccos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$y = \arctan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

2. มุมก้มและมุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตา และแนวเส้นจากตาไปยังวัตถุ ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมก้ม** แต่ถ้าวัตถุอยู่สูงกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมเงย** โดยขนาดของมุมก้มและมุมเงยจะเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ



จุดประสงค์การเรียนรู้

ใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ และตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อวางแผนการทำงานของรถเครน สำหรับการติดตั้งนั่งร้านบนอาคาร

ความรู้พื้นฐานที่ต้องทราบก่อนเรียน

1. สูตรอัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \quad \cos \theta = \frac{b}{c} \quad \tan \theta = \frac{a}{b}$$

2. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- ตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์

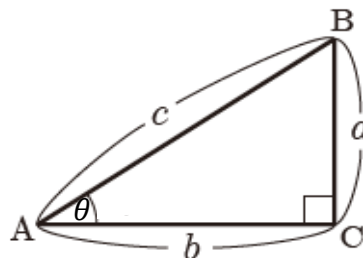
เมื่อ $\sin \theta = \frac{a}{c}$ ($-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) และมุม θ จะเขียนแสดงดังนี้

$$\theta = \arcsin \frac{a}{c} \quad \text{หรือ} \quad \theta = \sin^{-1} \frac{a}{c}$$

- ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

เมื่อ $\cos \theta = \frac{b}{c}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) และมุม θ จะเขียนแสดงดังนี้

$$\theta = \arccos \frac{b}{c} \quad \text{หรือ} \quad \theta = \cos^{-1} \frac{b}{c}$$



- ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

เมื่อ $\tan \theta = \frac{a}{b}$ ($-90^\circ < \theta < 90^\circ$) และมุม θ จะเขียนแสดงดังนี้

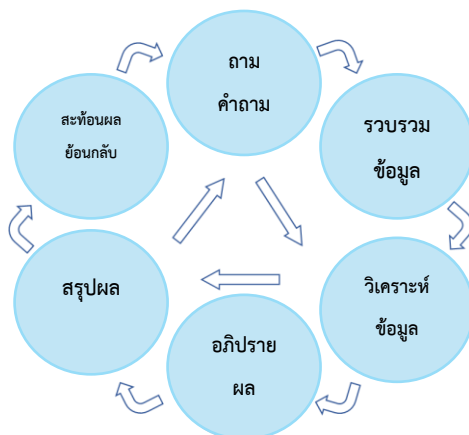
$$\theta = \arctan \frac{a}{b} \quad \text{หรือ} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$$

สื่อการเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO CLASSWIZ รุ่น fx-991CW
2. ใบงาน
3. สื่อการสอนของ CASIO (สื่อนำเสนอก่อนเรียน)

แนวทางการจัดการเรียนรู้

จัดการเรียนรู้ผ่านการทำงานแบบกลุ่ม เน้นการพัฒนาทักษะในการแก้ปัญหาของนักเรียนผ่านการมอบหมายภารกิจโดยใช้กระบวนการเรียนรู้แบบสืบเสาะ ดังต่อไปนี้



ถามคำถาม

เริ่มต้นการเรียนการสอนด้วยการถามคำถามหรือถามปัญหา ที่มุ่งความสนใจไปที่ปรากฏการณ์และสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวนักเรียน ถามคำถามหรือปัญหาที่นักเรียนสนใจ เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นในกระบวนการเรียนรู้แบบสืบเสาะ และควรระบุนักเรียนให้ชัดเจนว่า มีปัญหาใดบ้างที่ต้องการทำการแก้ไข

รวบรวมข้อมูล

เป็นกระบวนการรวบรวมข้อมูลและจัดระเบียบข้อมูล โดยคัดเลือกข้อมูลที่จำเป็นในการแก้ปัญหาหรือตอบปัญหา และเรียงลำดับความสำคัญของข้อมูล

วิเคราะห์ข้อมูล

เป็นกระบวนการวิเคราะห์ข้อมูล แสดงผลในรูปแบบของกราฟหรือแผนภูมิ การวิเคราะห์ข้อมูลนี้จะช่วยให้เกิดสมมติฐานสำหรับคำถามหรือปัญหาที่เกิดขึ้น

อภิปรายผล

เป็นกระบวนการพูดคุยหรือถกประเด็นเกี่ยวกับผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ข้อมูล ว่าสมมติฐานที่สร้างขึ้นนั้นถูกต้องหรือไม่ และปรึกษาหารือกันว่ามีสิ่งใดบ้างที่ควรเพิ่มเติมหรือพิจารณา โดยเคารพความคิดเห็นที่หลากหลายของผู้อื่น รวมทั้งนำมุมมองของผู้อื่นมาเป็นประเด็นในการพิจารณาด้วย

สรุปผล

เป็นกระบวนการหาข้อสรุปของคำถามหรือปัญหาให้อยู่ในรูปแบบของคำตอบที่ชัดเจน สามารถอธิบายให้ผู้ฟังเข้าใจได้

สะท้อนผลย้อนกลับ

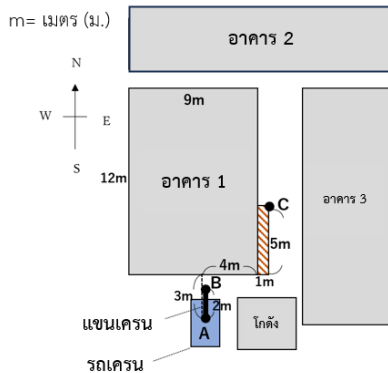
เป็นขั้นตอนเพื่อส่งเสริมการเรียนรู้แบบสืบเสาะต่อไป เพื่อเชื่อมโยงความสนใจให้เข้ากับผลสรุปที่ได้มา

กระบวนการจัดการเรียนรู้

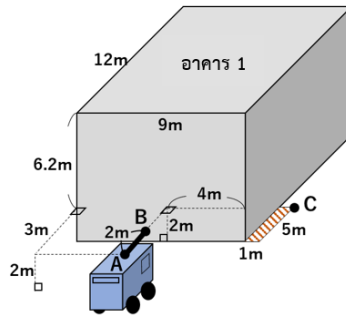
มอบหมายงานให้นักเรียน (15 นาที)

ในการหาสี่ผืนผ้า 1 ในภาพที่ 1 จงพิจารณาแผนการทำงานเพื่อติดตั้งนั่งร้านในพื้นที่ที่แรเงา ในการติดตั้งนั่งร้าน ต้องใช้รถเครนแขวนวัสดุที่จุด C ที่อยู่ที่พื้น แต่เนื่องจากมีอาคารอื่นอยู่ในระยะใกล้เคียง จึงจำเป็นต้องจอดรถเครนในจุดที่แสดงในภาพที่ 1 ซึ่งภาพที่ 1 แสดงแผนผังจากมุมสูงของภาพที่ 2 และภาพที่ 3 เป็นภาพของการติดตั้งนั่งร้าน

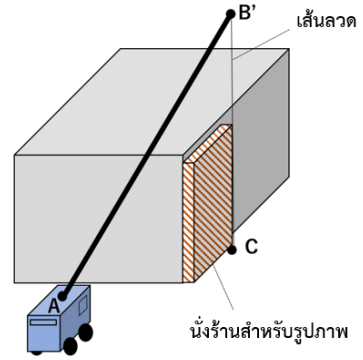
ในการแขวนวัสดุที่จุด C ในภาพที่ 1 จำเป็นต้องหมุนหรือยืดแขน AB ของรถเครนเท่านั้น และลดระดับเส้นลวดจากปลาย B (จาก B') ของแขนที่อยู่เหนือจุด C พอดี เพื่อให้ทำงานได้ประสิทธิภาพ ไม่ต้องหมุนและยืดแขนเครนหลายครั้ง จงพิจารณาเงื่อนไขและแผนการทำงานในการหมุนและยืดแขนเครน โดยสมมติว่าตนเองเป็นผู้ควบคุมการก่อสร้าง ตามเงื่อนไขอย่างละเอียดที่ให้ไว้ในข้อ Q1-2 นี้



ภาพที่ 1

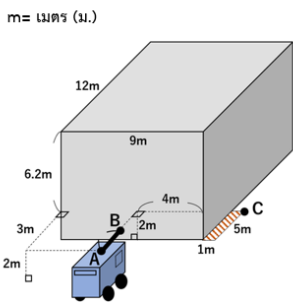


ภาพที่ 2

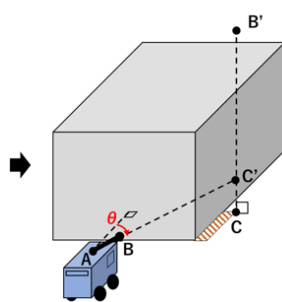


ภาพที่ 3

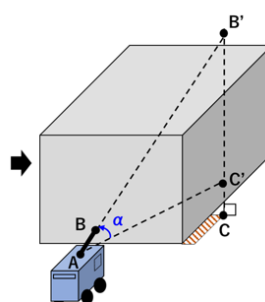
ขั้นตอนต้นแบบ



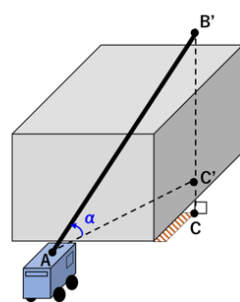
ภาพที่ 2



ภาพที่ 4



ภาพที่ 5



การยืดแขนเครน

เงื่อนไขอย่างละเอียด (5 นาที)

อาคาร 1

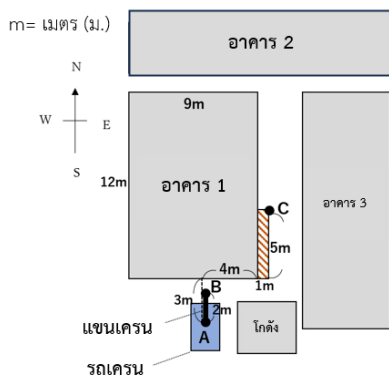
- เป็นอาคารทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีความกว้าง 12 เมตร ยาว 9 เมตร
- มีความสูง 8.2 เมตร และหลังคาอาคารเป็นแนวราบ
- ความหนาของกำแพงและหลังคาไม่นำมาพิจารณาด้วย

รถเครน

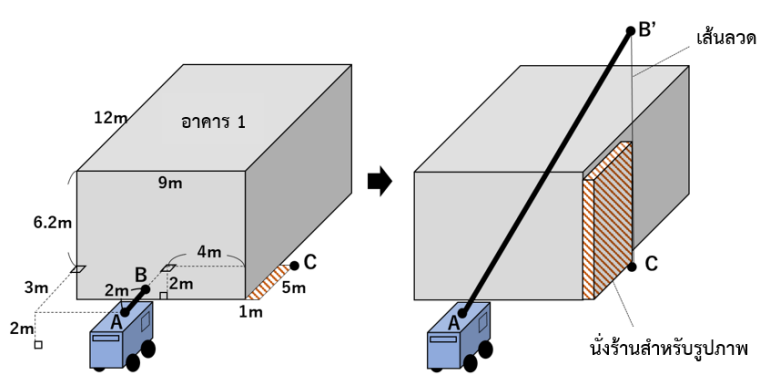
- จุดหมุนของแขนเครนอยู่ที่จุด A และปลายอยู่ที่จุด B ตามในภาพ
- ในตอนเริ่มต้นแขนของเครนอยู่ในแนวราบและชี้ไปทางทิศเหนือ ตามภาพที่ 2
- แขนของเครนมีจุดหมุนอยู่ที่จุด A และอาคาร 1 มีตำแหน่งดังที่แสดงในภาพ
- ตอนเริ่มต้นความยาวของแขนเครนอยู่ที่ 2 เมตร และความยาวของแขนสามารถยืดไปได้ถึง 25 เมตร
- สามารถหมุนแขนเครนได้อย่างอิสระในแนวตั้งและแนวนอน
- ตำแหน่งของจุดหมุนไม่เปลี่ยนไปตามการหมุนของแขน
- ความสูงของจุดหมุนของแขนอยู่ที่ 2 เมตร
- ความยาวของเส้นลวดในการแขวนวัสดุสามารถปรับได้อิสระ

นั่งร้าน

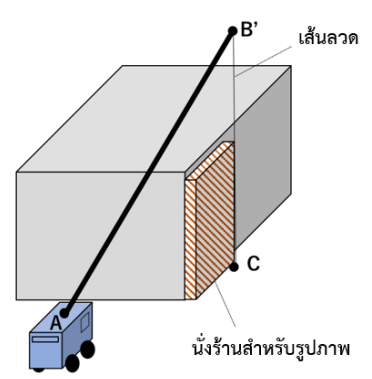
- ความกว้างของนั่งร้านเป็น 1 เมตร จากกำแพงของอาคาร 1
- จุดที่สูงที่สุดของนั่งร้านที่ติดตั้ง ต้องอยู่ต่ำกว่าหลังคา
- จุดที่สัมผัสกับพื้นในมุมทิศตะวันออกเฉียงเหนือของนั่งร้านอยู่ที่ C ดังแสดงในภาพที่ 2
- ในการยกวัสดุขึ้นที่จุด C จำเป็นต้องจัดวางปลายของแขนเครนไว้เหนือจุด C พอดี และแขวนด้วยเส้นลวด
- น้ำหนักของวัสดุนั่งร้านจะน้อยกว่าน้ำหนักที่แขนเครนยกได้ และไม่นำขนาดของวัสดุมาพิจารณาในที่นี้



ภาพที่ 1



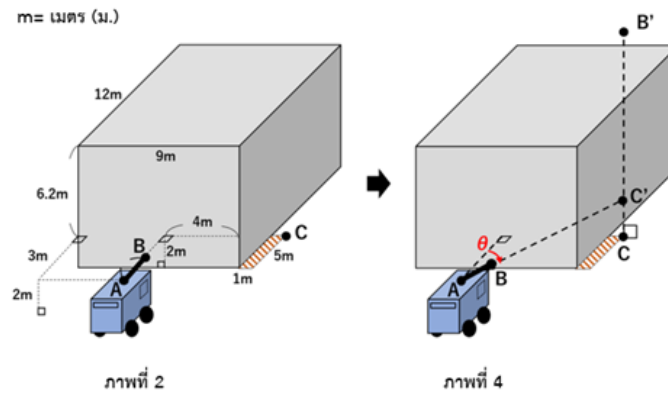
ภาพที่ 2



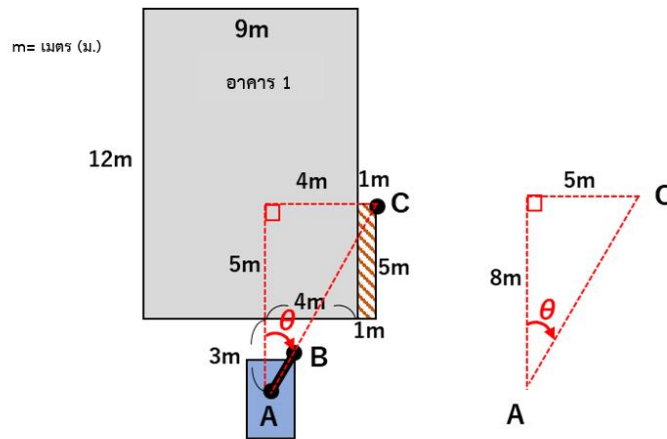
ภาพที่ 3

Q1 (10 นาที)

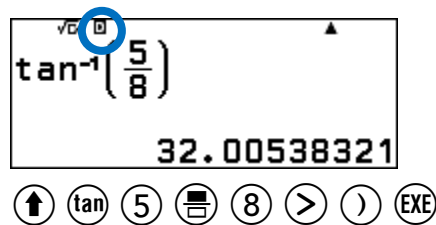
จากภาพที่ 4 เราต้องการหมุนแขน AB ในแนวนอนและชี้ไปในทิศทางของจุด C' (2 เมตรเหนือจุด C พอดี) จงหามุม θ เพื่อหมุนแขนไปในแนวนอน



(คำตอบและตัวอย่างคำอธิบาย)



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 32.0^\circ$$



Q2 (15 นาที)

หลังจากดำเนินการในข้อ Q1 แล้ว ในการยืดแขนเครนไปยังจุด B' (เหนือจุด C' พอดี) เราต้องการหมุนแขน AB ในแนวตั้งและชี้ไปยังทิศของ B' ดังแสดงในภาพที่ 5 ในกรณีนี้จึงพิจารณาหามุมที่เหมาะสม α เพื่อหมุนแขนไปในแนวตั้ง และอธิบายว่าทำไมค่าดังกล่าวจึงเหมาะสม

(คำตอบและตัวอย่างคำอธิบาย)

I. การพิจารณาค่า α_1 เมื่อแขนเครนแต่ละส่วนบนของกัมแพงพอดี้

ค่าของ α จะต้องมากกว่าค่าที่กำหนดให้ เพื่อป้องกันไม่ให้แขนเครนชนกับผนังทางทิศใต้เมื่อแขนถูกยืดออกไป ดังนั้น เราจึงพิจารณาว่าค่า α_1 คือค่าที่แขนแต่ละขอบด้านบนของกัมแพงทางทิศใต้ (ภาพที่ 7)

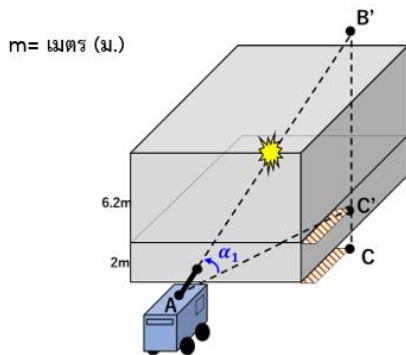
เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนขึ้น ความสูงของอาคาร 1 ถูกกำหนดไว้ที่ 8.2 เมตร – 2 เมตร = 6.2 เมตร

โดยตัดความสูงของอาคาร 1 ออก 2 เมตร ดังแสดงในภาพ 8

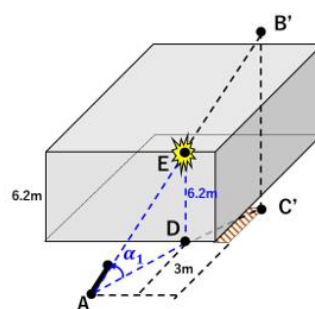
ดังนั้น ความสูงของจุดหมุนเครนจึงเท่ากับ 0 เมตร

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{DE}{AD} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{6.2}{AD} \right) \dots (1)$$

ดังนั้น หากทราบความยาวของ AD ก็จะสามารถหาค่าของ α ได้



ภาพที่ 7

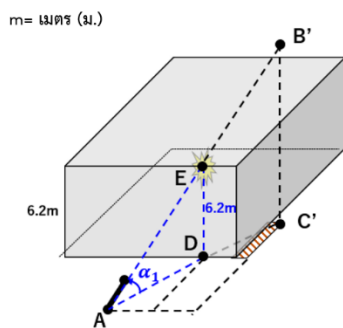


ภาพที่ 8

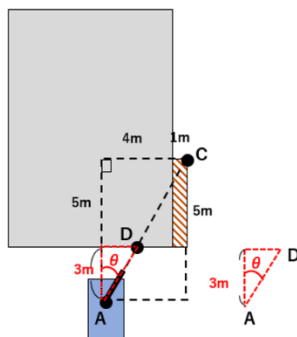
หาความยาวของ AD ให้พิจารณารูปสามเหลี่ยมในภาพ 9 (ภาพมุมสูงของภาพที่ 8)

จาก Q1: $\cos \theta = \cos 32^\circ = \frac{3}{AD}$

ดังนั้น $AD = \frac{3}{\cos 32^\circ} \approx 3.54$ เมตร



ภาพที่ 8



ภาพที่ 9

จากสมการ (1), ค่าของ α_1 คือ

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{6.2}{3.54}\right) \approx 60.3^\circ$$

ดังนั้น ค่าของ α จะต้องมากกว่า 60.3

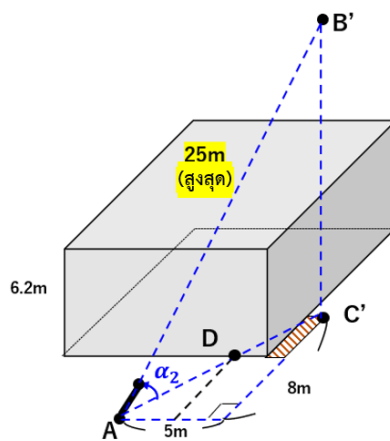
$$\tan^{-1}\left(\frac{6.2}{\text{Ans}}\right)$$

60.29075948

↑ tan 6 . 2 = Ans >) EXE

II. การพิจารณาค่าสูงสุดของ α_2 เมื่อความยาวแขนอยู่ที่ 25 เมตร

เมื่อมุมของแขนเพิ่มขึ้น ความยาวของ AB' ก็จะเพิ่มตามไปด้วย ในทางกลับกัน เนื่องจากความยาวสูงสุดของแขนอยู่ที่ 25 เมตร ค่าของ α เมื่อความยาวของแขนอยู่ที่ 25 เมตร คือค่าสูงสุด (α_2)



ภาพที่ 10

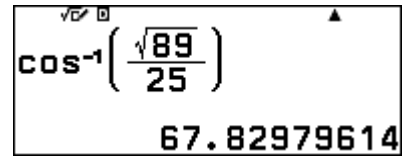
จากภาพ 10 ค่าของ α_2 คือ

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\frac{AC'}{AB'} = \cos^{-1}\frac{AC'}{25}$$

นอกจากนั้น ค่าของ AC' ยังได้มาจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$AC' = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$$

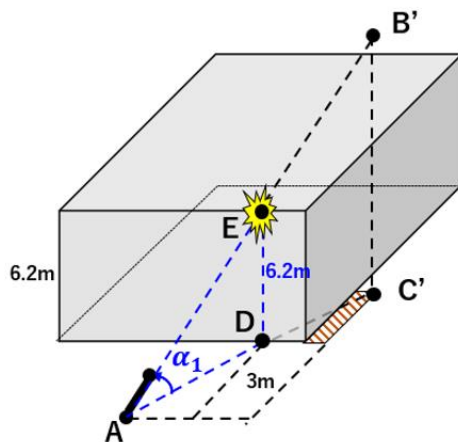
ดังนั้น $\alpha_2 = \cos^{-1} \frac{\sqrt{89}}{25} \approx 67.8^\circ$



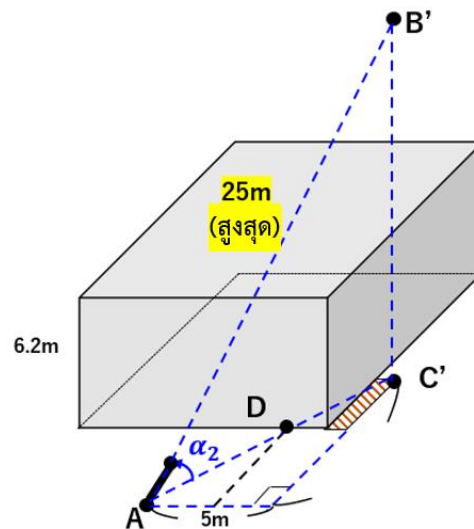


สรุป I และ II (5 นาที)

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{6.2}{3.54} \right) \approx 60.3^\circ$$



$$\alpha_2 = \cos^{-1} \frac{\sqrt{89}}{25} \approx 67.8^\circ$$



จากข้างต้น ค่าที่เหมาะสมของ α คือ ระหว่าง 60.3° และ 67.8°

ดังนั้น ตัวอย่างคำตอบคือ $61^\circ, 62^\circ, 63^\circ, 64^\circ, 65^\circ, 66^\circ$ และ 67°

หาก α เล็กเกินไป แขนจะชนเข้ากับกำแพง และถ้าใหญ่เกินไป แขนจะยาวมากพอ

ดังนั้นค่า 64° ที่ใกล้กับช่วงกลางของ α จึงดีกว่า

รายงาน (การบ้าน)

จากปัญหาที่พิจารณาไปแล้ว กลับมาทบทวนว่าสิ่งใดควรคิดใคร่ครวญเป็นพิเศษ เพื่อให้สามารถทำงานในสถานการณ์จริงได้ และสามารถทำงานได้อย่างชาญฉลาด โดยให้นักเรียนเขียนสิ่งที่นักเรียนคิดได้ลงไป
สร้างสถานการณ์สมมติ ปรับเปลี่ยนปัญหา และสร้างแผนการทำงานที่คล้ายกันออกมา

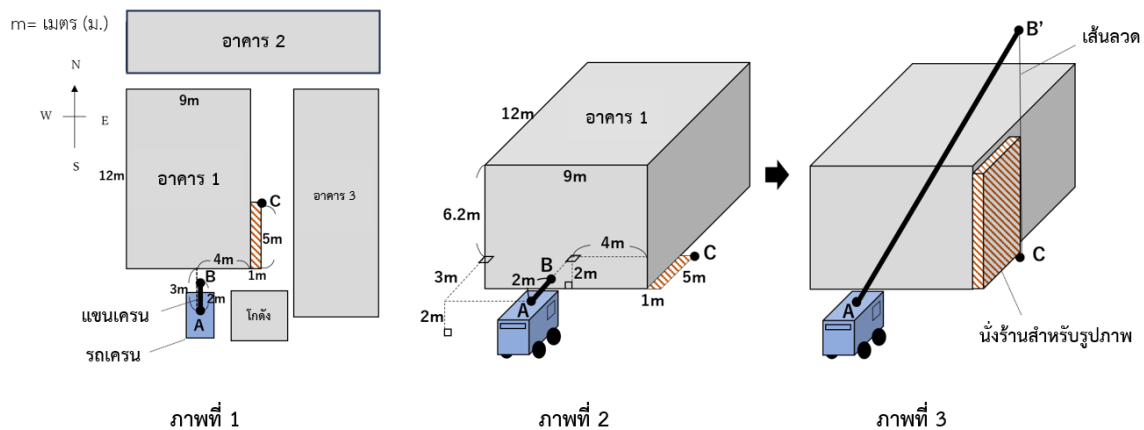
ใบงาน

บทเรียน	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	หัวข้อ	ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ชื่อ		ชั้น	

ภาระงานมอบหมาย

ในการหาสีผนังอาคาร 1 ในภาพที่ 1 จงพิจารณาแผนการทำงานเพื่อติดตั้งนั่งร้านในพื้นที่ที่แรเงาในการติดตั้งนั่งร้านต้องใช้รถเครนแขวนวัสดุที่จุด C ที่อยู่พื้น แต่เนื่องจากมีอาคารอื่นอยู่ในระยะใกล้เคียง จึงจำเป็นต้องจ่อรถเครนในจุดที่แสดงในภาพที่ 1 ซึ่งภาพที่ 1 แสดงแผนผังจากมุมสูงของภาพที่ 2 และภาพที่ 3 เป็นภาพของการติดตั้งนั่งร้าน

ในการแขวนวัสดุที่จุด C ในภาพที่ 1 จำเป็นต้องหมุนหรือยืดแขน AB ของรถเครนเท่านั้น และลดระดับเส้นลวดจากปลาย B (จาก B') ของแขนที่อยู่เหนือจุด C พอดี เพื่อให้ทำงานได้ประสิทธิภาพ ไม่ต้องหมุนและยืดแขนเครนหลายครั้ง จงพิจารณาเงื่อนไขและแผนการทำงานในการหมุนและยืดแขนเครน โดยสมมติว่าตนเองเป็นผู้ควบคุมการก่อสร้าง ตามเงื่อนไขอย่างละเอียดที่ให้ไว้ในข้อ Q1-2 นี้



เงื่อนไขอย่างละเอียด (5 นาที)**อาคาร 1**

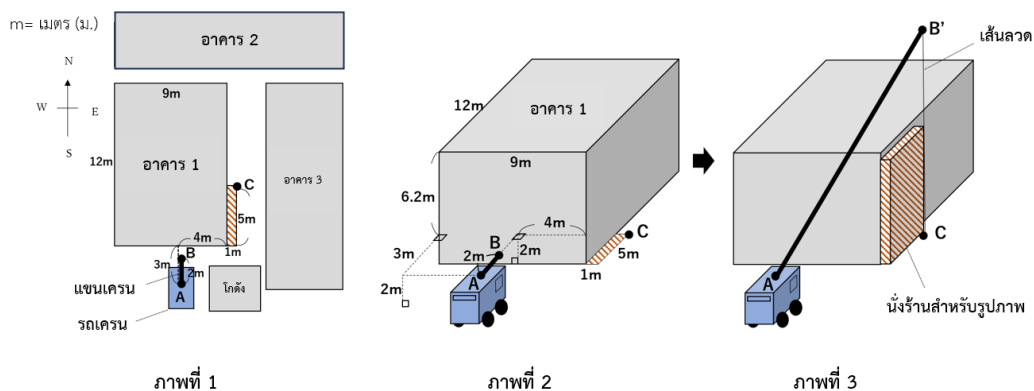
- เป็นอาคารทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีความกว้าง 12 เมตร ยาว 9 เมตร
- มีความสูง 8.2 เมตร และหลังคาอาคารเป็นแนวนราบ
- ความหนาของกำแพงและหลังคาไม่นำมาพิจารณาด้วย

รถเครน

- จุดหมุนของแขนเครนอยู่ที่จุด A และปลายอยู่ที่จุด B ตามในภาพ
- ในตอนเริ่มต้นแขนของเครนอยู่ในแนวนราบและชี้ไปทางทิศเหนือ ตามภาพที่ 2
- แขนของเครนมีจุดหมุนอยู่ที่จุด A และอาคาร 1 มีตำแหน่งดังที่แสดงในภาพ
- ตอนเริ่มต้นความยาวของแขนเครนอยู่ที่ 2 เมตร และความยาวของแขนสามารถยืดไปได้ถึง 25 เมตร
- สามารถหมุนแขนเครนได้อย่างอิสระในแนวตั้งและแนวนอน
- ตำแหน่งของจุดหมุนไม่เปลี่ยนไปตามการหมุนของแขน
- ความสูงของจุดหมุนของแขนอยู่ที่ 2 เมตร
- ความยาวของเส้นลวดในการแขวนวัสดุสามารถปรับได้อิสระ

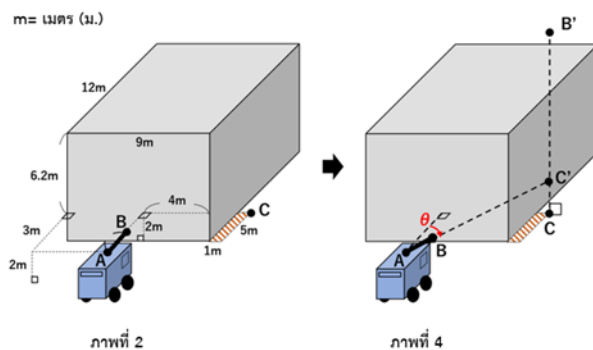
นั่งร้าน

- ความกว้างของนั่งร้านเป็น 1 เมตร จากกำแพงของอาคาร 1
- จุดที่สูงที่สุดของนั่งร้านที่ติดตั้ง ต้องอยู่ต่ำกว่าหลังคา
- จุดที่สัมผัสกับพื้นในมุมทิศตะวันออกเฉียงเหนือของนั่งร้านอยู่ที่ C ดังแสดงในภาพที่ 2
- ในการยกวัสดุขึ้นที่จุด C จำเป็นต้องจัดวางปลายของแขนเครนไว้เหนือจุด C พอดี และแขวนด้วยเส้นลวด
- น้ำหนักของวัสดุบนนั่งร้านจะน้อยกว่าน้ำหนักที่แขนเครนยกได้ และไม่นำขนาดของวัสดุมาพิจารณาในที่นี้

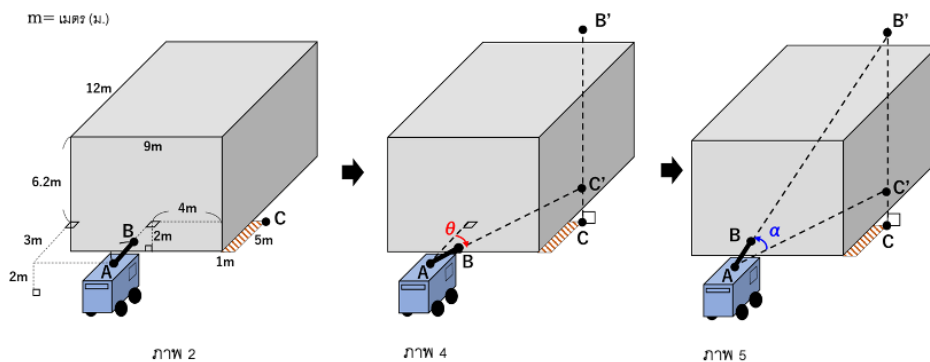


Q1

จากภาพที่ 4 เราต้องการหมุนแขน AB ในแนวนอนและชี้ไปในทิศทางของจุด C' (2 เมตรเหนือจุด C พอดี) จงหามุม θ เพื่อหมุนแขนไปในแนวนอน

**Q2**

หลังจากดำเนินการในข้อ Q1 แล้ว ในการยึดแขนเครนไปยังจุด B' (เหนือจุด C' พอดี) เราต้องการหมุนแขน AB ในแนวตั้งและชี้ไปยังทิศของ B' ดังแสดงในภาพที่ 5 ในกรณีนี้จึงพิจารณาหามุมที่เหมาะสม α เพื่อหมุนแขนไปในแนวตั้ง และอธิบายว่าทำไมค่าดังกล่าวจึงเหมาะสม

**รายงาน (การบ้าน)**

จากปัญหาที่พิจารณาไปแล้ว กลับมาทบทวนว่าสิ่งใดควรคิดใคร่ครวญเป็นพิเศษ เพื่อให้สามารถทำงานในสถานการณ์จริงได้ และสามารถทำงานได้อย่างชาญฉลาด โดยให้นักเรียนเขียนสิ่งที่นักเรียนคิดได้ลงไป
สร้างสถานการณ์สมมติ ปรับเปลี่ยนปัญหา และสร้างแผนการทำงานที่คล้ายกันออกมา