

## แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ เวกเตอร์

เรื่อง การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์

เวลา 50 นาที

### สาระสำคัญ

บทนิยาม ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity)  
ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity)

บทนิยาม ให้  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เขียนเวกเตอร์  $\vec{b}$  โดยให้จุดเริ่มต้นของ  $\vec{b}$  อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ  $\vec{a}$  ผลบวกของ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ  $\vec{a}$  และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ  $\vec{b}$   
ผลบวกของ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เขียนแทนด้วย  $\vec{a} + \vec{b}$

บทนิยาม นิเสธของ  $\vec{a}$  คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ  $\vec{a}$  แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ  $\vec{a}$  นิเสธของ  $\vec{a}$  เขียนแทนด้วย  $-\vec{a}$

บทนิยาม ให้  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เวกเตอร์  $\vec{a}$  ลบด้วย  $\vec{b}$  เขียนแทนด้วย  $\vec{a} - \vec{b}$  คือ ผลบวกของ  $\vec{a}$  และ นิเสธของ  $\vec{b}$  นั่นคือ  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

บทนิยาม ให้  $k$  เป็นสเกลาร์ และ  $\vec{a}$  เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของ  $\vec{a}$  กับสเกลาร์  $k$  เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย  $k\vec{a}$  โดยที่

1. ถ้า  $k=0$  แล้ว  $k\vec{a} = \vec{0}$
2. ถ้า  $k>0$  แล้ว  $k\vec{a}$  จะมีขนาด  $|k||\vec{a}|$  หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ  $\vec{a}$
3. ถ้า  $k<0$  แล้ว  $k\vec{a}$  จะมีขนาด  $|k||\vec{a}|$  หน่วย และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ  $\vec{a}$

บทนิยาม ให้  $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เขียนแทนด้วย  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

กำหนดดังนี้  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

## สาระการวัดและเรขาคณิต

เข้าใจเวกเตอร์ การดำเนินการของเวกเตอร์ และนำไปใช้

## ผลการเรียนรู้

หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์

## จุดประสงค์การเรียนรู้

เข้าใจความหมายของเวกเตอร์ และสามารถหาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

## สาระการเรียนรู้

- เวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์
- การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
- ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์

## การต่อยอด 1 (40 นาที)

### บทนำ

- ครูชี้แจงจุดประสงค์ของบทเรียนนี้

เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจความหมายของเวกเตอร์มากขึ้น ผ่านการบวก การลบเวกเตอร์และการหาผลคูณ

เชิงสเกลาร์

- ทบทวนนิยามของเวกเตอร์

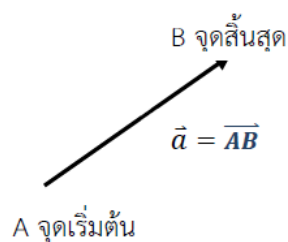
## 1) นิยามของเวกเตอร์

### บทนิยาม

ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางเรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) เราแทนเวกเตอร์ด้วยส่วนของเส้นตรง (เส้นตรงที่มีทิศทางเชื่อมสองจุด) เขียนแสดงด้วย  $\overrightarrow{AB}$  (เมื่อ  $A$  เป็นจุดเริ่มต้น และ  $B$  เป็นจุดสิ้นสุด)  $\vec{a}, \vec{b}$

อธิบายว่า เนื่องจากเวกเตอร์ถูกนิยามด้วยขนาดและทิศทาง จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์สามารถกำหนดได้อย่างอิสระ

เนื้อหาส่วนนี้เป็นการทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน ครูอาจใช้การถาม ตอบ หรือให้นักเรียนร่วมกันนำเสนอและยกตัวอย่าง



## 2) การเท่ากันของเวกเตอร์

บทนิยาม  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงข้ามกัน

บทนิยาม  $\vec{a}$  เท่ากับ  $\vec{b}$  ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน

และเขียนแทนด้วย  $\vec{a} = \vec{b}$

## 3) ขนาดของเวกเตอร์

ขนาดของเวกเตอร์  $\vec{a}$  เขียนแทนด้วย  $|\vec{a}|$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector): เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นหนึ่ง

เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) : เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย  $\vec{0}$



## 4) นิเสธของเวกเตอร์

บทนิยาม

นิเสธของ  $\vec{a}$  คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ  $\vec{a}$

แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ  $\vec{a}$  นิเสธของ  $\vec{a}$  เขียนแทนด้วย  $-\vec{a}$

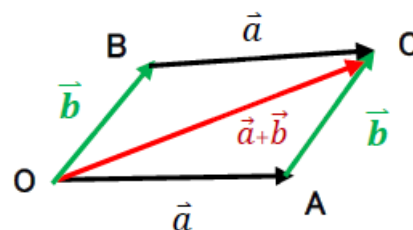


## 5) การบวกเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์

- การบวกเวกเตอร์

บทนิยาม

ให้  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เขียนเวกเตอร์  $\vec{b}$  โดยให้จุดเริ่มต้นของ  $\vec{b}$  อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ  $\vec{a}$  ผลบวกของ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ  $\vec{a}$  และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ  $\vec{b}$  ผลบวกของ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เขียนแทนด้วย  $\vec{a} + \vec{b}$



กำหนดให้  $\vec{OA} = \vec{a}$  และ  $\vec{OB} = \vec{b}$

ดังที่แสดงในภาพ  $\vec{a} + \vec{b}$  จะสามารถเขียนแสดงได้หลายเส้นทาง เพื่อให้ง่ายต่อการวาดแผนภาพ เราจะ กำหนดว่าเป็นเวกเตอร์ที่เชื่อมระหว่างจุดสิ้นสุดของ  $\vec{a}$  กับจุดเริ่มต้นของ  $\vec{b}$  และเชื่อมระหว่างจุดเริ่มต้นของ  $\vec{a}$  กับจุดสิ้นสุดของ  $\vec{b}$

ดังนั้น  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$

ในทำนองเดียวกัน สามารถเห็นได้ว่า  $\vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$  และ  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$

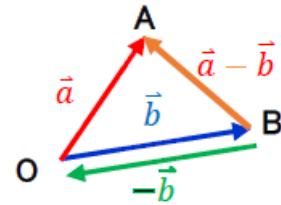
- การลบเวกเตอร์

#### บทนิยาม

ให้  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เวกเตอร์  $\vec{a}$  ลบด้วย  $\vec{b}$  เขียนแทนด้วย

$\vec{a} - \vec{b}$  คือผลบวกของ  $\vec{a}$  และ นิเสธของ  $\vec{b}$  นั่นคือ  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

เมื่อ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  ดังที่แสดงในภาพ



สามารถเขียนแสดงได้ว่า  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  เนื่องจากการบวกของเวกเตอร์  $\vec{a}$  กับนิเสธของ  $\vec{b}$  คือ  $-\vec{b}$  จะได้ว่า  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$  ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

- ผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์

#### บทนิยาม

ให้  $k$  เป็นสเกลาร์ และ  $\vec{a}$  เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของ  $\vec{a}$  กับสเกลาร์  $k$  เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย  $k\vec{a}$

โดยที่ 1. ถ้า  $k = 0$  แล้ว  $k\vec{a} = \vec{0}$

2. ถ้า  $k > 0$  แล้ว  $k\vec{a}$  จะมีขนาด  $|k||\vec{a}|$  หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ  $\vec{a}$

3. ถ้า  $k < 0$  แล้ว  $k\vec{a}$  จะมีขนาด  $|k||\vec{a}|$  หน่วย และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ  $\vec{a}$

- คำศัพท์ต่างๆเกี่ยวกับเวกเตอร์

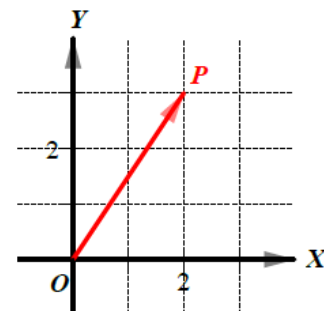
เวกเตอร์ คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เวกเตอร์สามารถเขียนแสดงได้ดังนี้

$$V = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)$$

ค่า  $V_n$  เรียกว่า ส่วนประกอบ ของเวกเตอร์

เวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ  $\overrightarrow{OP}$  ที่แสดงในภาพด้านขวา

สามารถเขียนได้เป็น  $\overrightarrow{OP} = (2,3)$  หรือ  $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$



เวกเตอร์ยังสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์  $n$  แถว 1 หลัก ได้ดังนี้

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} \text{ เวกเตอร์ที่เขียนแสดงเช่นนี้เรียกว่า เวกเตอร์หลัก}$$

- การบวกเวกเตอร์โดยใช้เครื่องคำนวณ

ครูอธิบาย สูตรสำหรับการบวกเวกเตอร์

$$\text{เมื่อ } \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ และ } \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} \text{ และ } \vec{a} - \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$$

### แบบฝึกหัด 1

1) ให้  $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{OB} = \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$  จงคำนวณหา  $\vec{OA} + \vec{OB}$  และ  $\vec{OB} + \vec{OA}$

(คำตอบ) ให้ใช้สูตรสำหรับบวกเวกเตอร์ในการคำนวณ

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 \\ 2+4 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

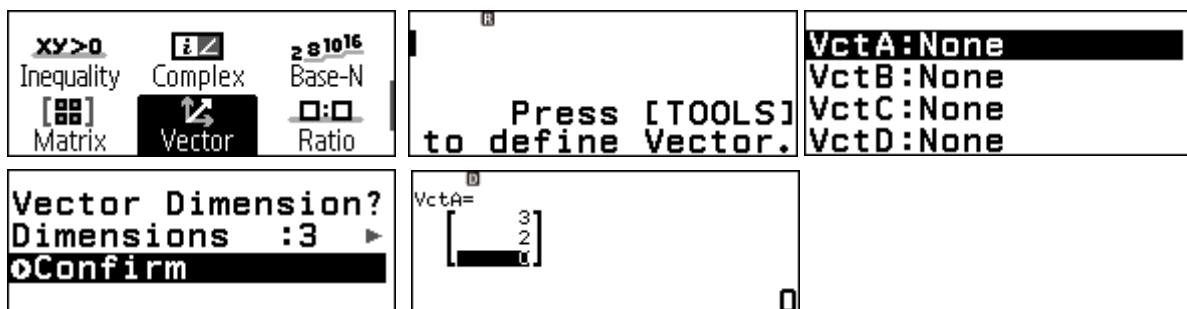
$$\vec{OB} + \vec{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 \\ 4+2 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากนั้นให้บวกเวกเตอร์โดยใช้เครื่องคำนวณ

กด  เลือกเมนู เวกเตอร์ (Vector)

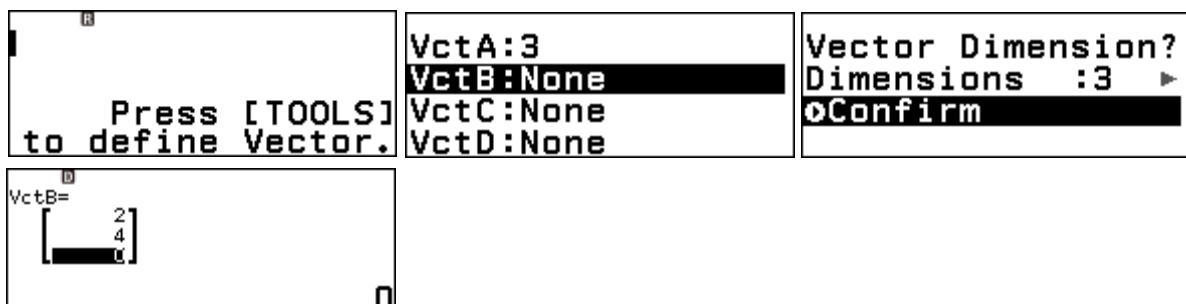
กำหนดเวกเตอร์ (vector) A เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ โดยกำหนดค่าส่วนประกอบ (Components) เป็น 3,2,0

○○ ○K ○K ✓ ○K ○K ③ EXE ② EXE ① EXE EXE



และ B เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ โดยกำหนดค่าส่วนประกอบ (Components) เป็น 2,4,0

○○ ✓ ○K ○K ✓ ○K ○K ② EXE ④ EXE ① EXE EXE



คำนวณหา  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  (VctA + VctB)

⏮ OK ✓ OK + ⏮ OK ✓ ✓ OK OK

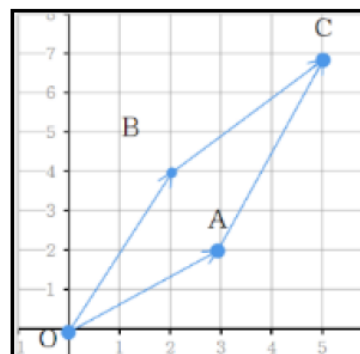
|                                                        |                                     |                                                             |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Vector<br>Func Analysis<br>Probability<br>Numeric Calc | Vector Calc<br>VctA<br>VctB<br>VctC | VctA+<br><br><br><br>                                       |
| Vector Calc<br>VctA<br>VctB<br>VctC                    | VctA+VctB                           | VctAns=<br>$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$<br>5 |

คำนวณหา  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$  (VctB + VctA)

⏮ OK ✓ ✓ OK + ⏮ OK ✓ OK OK

|                                                        |                                     |                                                             |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Vector<br>Func Analysis<br>Probability<br>Numeric Calc | Vector Calc<br>VctA<br>VctB<br>VctC | VctB+<br><br><br><br>                                       |
| Vector Calc<br>VctA<br>VctB<br>VctC                    | VctB+VctA                           | VctAns=<br>$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$<br>5 |

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$  ดังแสดงในภาพ



- การเรียนรู้แบบสืบเสาะ เพื่อหาสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

ครูให้นักเรียนแสดงว่า  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  โดยใช้แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด

1) ให้  $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{OC} = \vec{c} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

จงคำนวณหา  $(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OC}$  และ  $\vec{OA} + (\vec{OB} + \vec{OC})$

วาดภาพบนกระดาษกราฟเพื่ออธิบายการคำนวณ

ในการอธิบายโจทย์ข้อนี้ ให้แสดงคำตอบก่อน

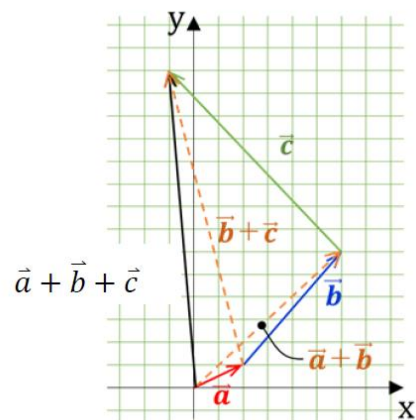
$$(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OC} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 0+0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+(-7) \\ 7+8 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{OA} + (\vec{OB} + \vec{OC}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+(-7) \\ 5+8 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-3) \\ 2+13 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากภาพที่แสดงด้านขวามือ จะได้ว่า

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  ให้ทิศทางที่ลากหลายในระหว่างการคำนวณ

แต่ผลลัพธ์สุดท้ายจะเป็นเวกเตอร์เดิมเสมอ



ดังนั้น สามารถนิยามได้ว่า  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

ครูอธิบายนิยามนี้ให้นักเรียน

- ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม

ให้  $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เขียนแทนด้วย  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  กำหนดดังนี้  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$   
จากนั้น ให้นักเรียนคำนวณโดยใช้นิยามนี้

ตัวอย่าง 1 เมื่อ  $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{OB} = \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (1 \times 1) + (2 \times 3) = 7$

ตัวอย่าง 2 เมื่อ  $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{OB} = \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (2 \times (-4)) + (0 \times 2) = -8$

ตัวอย่าง 3 เมื่อ  $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{OB} = \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (1 \times 4) + (2 \times 5) + (3 \times 6) = 32$

แบบฝึกหัด 2

ให้  $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{OB} = \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$  จงตอบคำถามต่อไปนี้

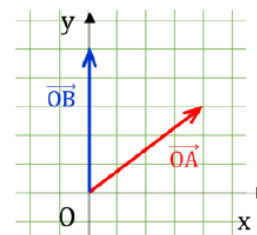
(1) ค่าของ  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  เป็นเท่าใด

(คำตอบ)  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (4 \times 0) + (3 \times 5) + (0 \times 0) = 15$

(2) วาด  $\vec{OA}$  และ  $\vec{OB}$  บนกระดาษกราฟ

ตรวจสอบให้แน่ใจว่าจุดเริ่มต้นของแต่ละเวกเตอร์อยู่ที่จุดเดียวกัน

เนื่องจากส่วนประกอบของ  $\vec{z}$  เป็น 0 ไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาด้วย



(3) ค่าของ  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  คืออะไร

พิจารณาจากภาพในข้อ (2) เนื่องจากผลการคำนวณค่าของ  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  คือ  $3 \times 5$  จะพบว่ารายละเอียดในภาพ ① และ ② ด้านล่าง มีความเกี่ยวข้องกับผลการคำนวณค่าของ  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

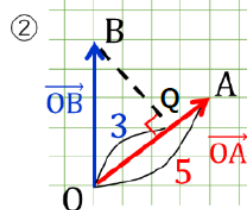
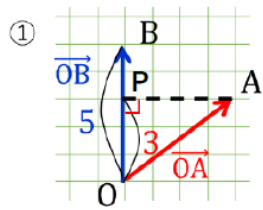
ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายในแต่ละภาพเพื่อหาค่าที่ผลลัพธ์มีความเกี่ยวข้องกับค่าของ  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

[แนะนำ: ภาพที่ ① ลากเส้นตรงจากจุด A ให้ตั้งฉากกับ  $\vec{OB}$  ที่จุด P และหาค่าของ

$|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos \angle AOP$  ในภาพที่ ② ทำในทำนองเดียวกันกับภาพที่ ①

สำหรับข้อ (3) ให้นักเรียน  
พิจารณาคำถามและนำเสนอ  
คำตอบ





- ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณ

กด เลือกเมนู เวกเตอร์ (Vector)

กำหนดเวกเตอร์ (vector) A เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ

4 3 0

|                                                                                     |                                                      |                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $xy > 0$<br>Inequality<br>Matrix<br>Vector<br>$2 \times 10^{16}$<br>Base-N<br>Ratio | Press [TOOLS]<br>to define Vector.                   | VctA:None<br>VctB:None<br>VctC:None<br>VctD:None |
| Vector Dimension?<br>Dimensions :3<br>Confirm                                       | VctA=<br>$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ |                                                  |

และ B เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ

0 5 0

|                                                      |                                               |                                               |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| Press [TOOLS]<br>to define Vector.                   | VctA:3<br>VctB:None<br>VctC:None<br>VctD:None | Vector Dimension?<br>Dimensions :3<br>Confirm |
| VctB=<br>$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ |                                               |                                               |

คำนวณหา  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

|                                                        |                                                      |                                     |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Vector<br>Func Analysis<br>Probability<br>Numeric Calc | Vector Calc<br>VctA<br>VctB<br>VctC                  | VctA                                |
| Vector Calc<br>VctA<br>VctB<br>VctC                    | Dot Product<br>Cross Product<br>Angle<br>Unit Vector | Vector Calc<br>VctA<br>VctB<br>VctC |
| VctA • VctB                                            |                                                      |                                     |

## ภาคผนวก

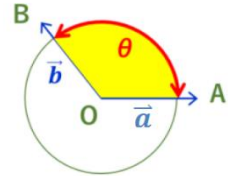
- นิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์

เนื้อหาต่อไปนี้จะเป็นการอธิบายที่มาของสูตรผลคูณเชิงสเกลาร์ ที่เกี่ยวข้องกับมุมระหว่างเวกเตอร์

### บทนิยาม

มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึงมุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนาน และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ทั้งสอง

จากรูป กำหนดจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ คือ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  มีจุดเริ่มต้นเดียวกันที่จุดกำเนิด  $O$



จะได้ว่า  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  และ  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  และ  $\angle AOB = \theta$  ซึ่ง  $\theta$  หมายถึง ขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )

- ผลคูณเชิงสเกลาร์

### บทนิยาม

ให้  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือ สามมิติ และ  $\theta$  เป็นขนาดของมุมระหว่าง  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  ซึ่ง  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  จะได้ว่า  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$

ครูให้อธิบายเพิ่มเติมให้นักเรียนที่สนใจหรือมีคำถาม เกี่ยวกับวิธีนิยาม

กำหนดให้เวกเตอร์  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  และ  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  มีขนาดมุมระหว่าง  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เป็น  $\theta$  ผลคูณเชิงสเกลาร์  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ของเวกเตอร์  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  ตามบทนิยามคือ  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$

เราจะพิสูจน์ว่า  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = a_1b_1 + a_2b_2$

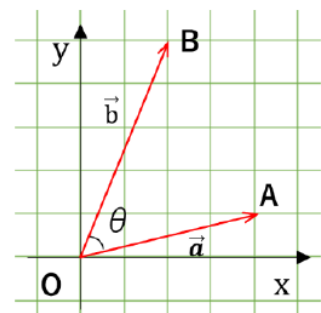
1. ใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส คำนวณหา:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \text{ และ } |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

2. ต่อมา ใช้สูตรของโคไซน์ในการหาค่าของ  $\cos \theta$

$$\text{จาก } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\text{ดังนั้น } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



จากนั้น ใช้สูตรของโคไซน์ในการหา

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 + \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2 - (\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2})^2}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\
 &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2)}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\
 &= \frac{2b_1a_1 + 2b_2a_2}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\
 &= \frac{b_1a_1 + b_2a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}
 \end{aligned}$$

3. จะได้ว่า  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \frac{b_1a_1 + b_2a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\
 &= \mathbf{a_1b_1 + a_2b_2}
 \end{aligned}$$