

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดโดยใช้แผนภาพต้นไม้

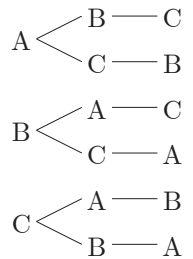
STUDY GUIDE

แผนภาพต้นไม้

แผนภาพต้นไม้เป็นวิธีการนับเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยไม่มีเหตุการณ์ใดซ้ำหรือเหตุการณ์ใดขาดหายไป

Ex. นับวิธีที่เป็นไปได้ในการเรียงตัวอักษร 3 ตัว A, B และ C

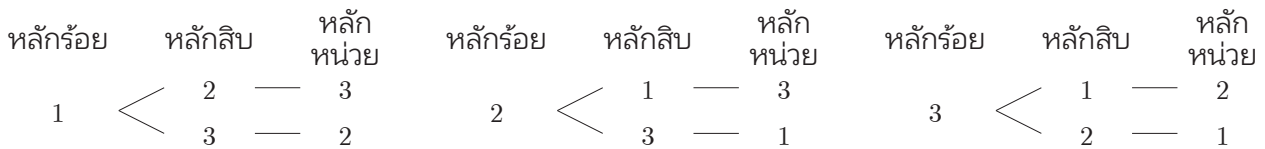
จากแผนภาพต้นไม้ด้านขวา มี 6 วิธีในการเรียงตัวอักษร 3 ตัว



EXERCISE

- ① หาจำนวน 3 หลักที่เรียงโดยใช้ตัวเลข 3 ตัว ได้แก่ 1, 2 และ 3 โดยใช้ตัวเลขแต่ละตัวเพียง 1 ครั้ง

ใช้แผนภาพต้นไม้เพื่อแสดงวิธีเรียงตัวเลข 3 ตัว 1, 2 และ 3

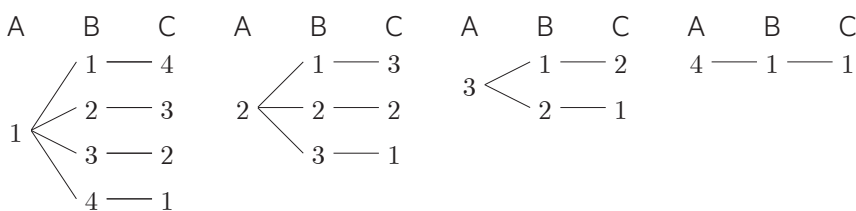


จากแผนภาพต้นไม้ มีการเรียง 6 วิธี

6 วิธี

- ② หาจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่ผลรวมของลูกเต๋าคู่ที่ทอดได้เท่ากับ 6 เมื่อทอดลูกเต๋าคู่ 3 ลูก A, B และ C ลูกละ 1 ครั้ง

ใช้แผนภาพต้นไม้เพื่อแสดงผลของการทอดลูกเต๋าคู่ 3 ครั้ง

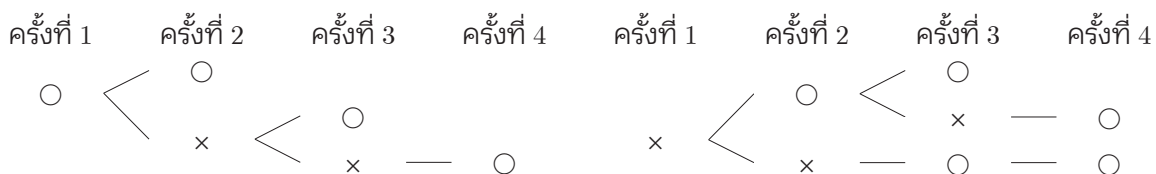


จากแผนภาพต้นไม้ มีการเรียง 10 วิธี

10 วิธี

- ③ ในเกมที่โยนเหรียญ 1 เหรียญซ้ำ ๆ คุณจะชนะเกมโดยที่เหรียญออกหัว 2 ครั้ง อย่างไรก็ตาม เกมจะจบลงหลังจากโยนเหรียญ 4 ครั้งหรือเหรียญออกหัว 2 ครั้ง ค้นหาจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่จะชนะเกมนี้

ใช้แผนภาพต้นไม้เพื่อแสดงผลที่ทำให้ ○ ออกหัว และ × ออกก้อย



จากแผนภาพต้นไม้ มีการเรียง 6 วิธี

6 วิธี

PRACTICE

- ① หาจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่ผลคูณของลูกเต๋าทอดได้เท่ากับ 6 เมื่อทอดลูกเต๋า 3 ลูก A, B และ C ลูกละ 1 ครั้ง
- ② ในเกมที่โยนเหรียญ 1 เหรียญซ้ำ ๆ คุณจะชนะเกมโดยที่เหรียญออกหัว 3 ครั้ง อย่างไรก็ตาม เกมจะจบลงหลังจากโยนเหรียญ 4 ครั้งหรือเหรียญออกหัว 3 ครั้ง ค้นหาจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่จะชนะเกมนี้
- ③ หาจำนวน 3 หลักโดยการเลือกตัวเลข 3 ตัว จาก 4 ตัวที่กำหนดให้โดยใช้ได้เพียงตัวเลข 1 ครั้ง ดังนี้ 1, 2, 3 และ 3

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด

หลักการบวกและหลักการคูณ

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาจำนวนวิธีที่เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจาก 2 เหตุการณ์สามารถเกิดขึ้นได้ หรือทั้งสองเหตุการณ์สามารถเกิดขึ้นได้

STUDY GUIDE

หลักการบวก

สมมติว่ามีเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ คือ เหตุการณ์ A และ B และสองเหตุการณ์ไม่ได้เกิดขึ้นพร้อมกัน เมื่อมี m วิธีที่เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้น และมี n วิธีที่เหตุการณ์ B จะเกิดขึ้น **หลักการบวก**ต่อไปนี้จะสามารถใช้ได้

จำนวนวิธีที่เหตุการณ์ A หรือ B เกิดขึ้น $\Rightarrow (m+n)$ วิธี

(หลักการบวกยังสามารถใช้ได้เมื่อมีเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์ขึ้นไป)

explanation

โดยกำหนดให้เหตุการณ์ A และ B ไม่ได้เกิดขึ้นพร้อมกัน $\rightarrow$ เนื่องจากมี m วิธีจากการเลือก A และ n วิธีจากการเลือก B ดังนั้นวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์สามารถเกิดขึ้นได้คือ $(m+n)$

หลักการคูณ

สมมติว่ามีเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ คือ เหตุการณ์ A และ B เมื่อมี m วิธีที่เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้น และสำหรับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมดเหล่านั้น มี n วิธีที่เหตุการณ์ B จะเกิดขึ้น ดังนั้น**หลักการคูณ**ต่อไปนี้จะสามารถใช้ได้

จำนวนวิธีที่เหตุการณ์ B เกิดขึ้นสำหรับแต่ละเหตุการณ์ A $\Rightarrow (m \times n)$ วิธี

(หลักการคูณยังสามารถใช้ได้เมื่อมีเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์ขึ้นไป)

explanation

โดยกำหนดให้เหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นพร้อมกัน $\rightarrow$ เนื่องจากมี n วิธีจากการเลือกเหตุการณ์ B สำหรับทุก ๆ m วิธีจากการเลือกเหตุการณ์ A ดังนั้นวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์สามารถเกิดขึ้นได้คือ $(m \times n)$

วิธีที่ A เกิดขึ้น (m วิธี) $A_1, A_2, \dots, A_m$

วิธีที่ B เกิดขึ้น (n วิธี) $B_1, B_2, \dots, B_n, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots, B_1, B_2, \dots, B_n$

EXERCISE

- ① ในเมนูเครื่องดื่มของร้านอาหารแห่งหนึ่ง มีน้ำผลไม้ 4 ชนิดและมีน้ำอัดลม 5 ชนิด หาจำนวนวิธีที่คุณสามารถเลือกเครื่องดื่ม 1 ชนิดจากเมนูนี้ได้

คุณไม่สามารถเลือกน้ำผลไม้และน้ำอัดลมพร้อมกันได้

เนื่องจากมี 4 วิธีและ 5 วิธีในการเลือกเครื่องดื่มหนึ่งชนิด จากหลักการบวก เราจะได้ $4+5=9$ วิธี

9 วิธี

- ② หาจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่ผลรวมของลูกเต๋าคือเป็นพหุคูณของ 3 เมื่อทอดลูกเต๋าคือ 2 ลูก A และ B ลูกละ 1 ครั้ง เมื่อผลรวมของลูกเต๋าคือค่าใด ๆ ของ 3, 6, 9 หรือ 12 ซึ่งเป็นพหุคูณของ 3

ผลรวมของลูกเต๋าคือมีผลคูณเป็น 3 มี 2 แบบ ได้แก่ (1, 2) และ (2, 1)

ผลรวมของลูกเต๋าคือมีผลคูณเป็น 6 มี 5 แบบ ได้แก่ (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) และ (5, 1)

ผลรวมของลูกเต๋าคือมีผลคูณเป็น 9 มี 4 แบบ ได้แก่ (3, 6), (4, 5), (5, 4) และ (6, 3)

ผลรวมของลูกเต๋าคือมีผลคูณเป็น 12 มี 1 แบบ ได้แก่ (6, 6)

เนื่องจากผลรวมบนลูกเต๋าคือ 3, 6, 9 และ 12 ไม่สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้ จากหลักการบวก เราจะได้

$2+5+4+1=12$ วิธี

12 วิธี

- ③ มี 5 วิธีในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง B และ 4 วิธีในการเดินทางจากเมือง B ไปเมือง C ในกรณีนี้ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเดินทางจากเมือง A ผ่านเมือง B ไปเมือง C
มี 5 วิธีในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง B และสำหรับแต่ละวิธีเหล่านั้นมี 4 วิธีในการเดินทางจากเมือง B ไปเมือง C
ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ $5 \times 4 = 20$ วิธี

20 วิธี

- ④ คุณ D มีเสื้อเชิ้ต 6 แบบ และกางเกงขาสั้น 5 แบบ หาจำนวนวิธีที่เขาสามารถเลือกเสื้อเชิ้ต 1 แบบและกางเกงขาสั้น 1 แบบเพื่อสวมใส่
มี 6 วิธีในการเลือกเสื้อเชิ้ต และสำหรับแต่ละวิธีเหล่านั้นมี 5 วิธีในการเลือกกางเกงขาสั้น
ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ $6 \times 5 = 30$ วิธี

30 วิธี

- ⑤ จำนวนบวกทั้งหมดที่หาร 144 ลงตัว มีกี่จำนวน
แยกตัวประกอบของ 144 เป็นตัวประกอบเฉพาะจะได้ $144 = 2^4 \times 3^2$
นั่นคือ จะมีจำนวน 5 จำนวนที่สามารถหาร 2^4 ได้ลงตัว คือ $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$ และมีจำนวน 3 จำนวนที่สามารถหาร 3^2 ได้ลงตัว คือ $1, 3, 3^2$
เราจะได้จำนวนบวกทั้งหมดที่หาร 144 ลงตัว โดยหลักการคูณนำจำนวน 5 จำนวนที่หาร 2^4 ได้ลงตัว กับนำจำนวน 3 จำนวนที่หาร 3^2 ได้ลงตัว
ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ $5 \times 3 = 15$ จำนวน

15 จำนวน



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ใช้ฟังก์ชัน FORMAT (รูปแบบ) เพื่อแยกตัวประกอบ 144 เป็นตัวประกอบเฉพาะ
กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

① ④ ④ EXE กด $\odot$

เลือก [Prime Factor (ตัวประกอบเฉพาะ)] กด OK

Standard
Decimal
Prime Factor
ENG Notation

144
 $2^4 \times 3^2$

PRACTICE

- ① ในชั้นเรียนที่กำหนด มีนักเรียน 16 คนที่ขี่จักรยานไปโรงเรียนและมีนักเรียน 19 คนที่นั่งรถบัสไปโรงเรียน หาจำนวนวิธีที่คุณสามารถเลือกนักเรียน 1 คนจากนักเรียนทั้งหมดนั้น

- ② หาจำนวนวิธีที่ผลรวมของลูกเต๋ามากกว่าหรือเท่ากับ 9 เมื่อทอดลูกเต๋่า 2 ลูก ลูกใหญ่และลูกเล็ก ลูกละ 1 ครั้ง

๓ ในเมนูของร้านอาหารแห่งหนึ่ง มีเครื่องดื่ม 6 ชนิด อาหารจานหลัก 8 ชนิด และของหวาน 5 ชนิด หาจำนวนวิธีที่คุณสามารถเลือกของ 1 ชนิดจากแต่ละรายการ

๔ ทอดลูกเต๋า 3 ลูก A, B และ C จำนวน 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น มีทั้งหมดกี่วิธี

๕ จำนวนบวกทั้งหมดที่หาร 360 ลงตัว มีกี่จำนวน

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

การเรียงสับเปลี่ยน

TARGET

การทำความเข้าใจจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถเรียงสิ่งต่าง ๆ เป็นเส้นตรง

STUDY GUIDE

การเรียงสับเปลี่ยน

เมื่อของหลายสิ่งถูกเรียงเป็นเส้นตรง เรียกว่า**การเรียงสับเปลี่ยน** หากคุณนำสิ่งของ r สิ่ง ออกจากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง และนำมาเรียงเป็นแถว 1 แถว เราเรียกว่า**การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่ง ที่นำมาจากสิ่งของ n สิ่ง** และจำนวนทั้งหมดจะแสดงในรูป ${}_nP_r$ อย่างไรก็ตาม $r \leq n$ คุณสามารถหาจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่ง ที่เลือกมาจากสิ่งของ n สิ่งได้ดังต่อไปนี้

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$

ผลคูณของสิ่งของ r สิ่ง

Ex. จำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 5 สิ่ง ที่เลือกมาจากสิ่งของ 8 สิ่งคือ

$${}_8P_5 = 8 \cdot (8-1) \cdot (8-2) \cdot (8-3) \cdot (8-4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$$



check

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 5 สิ่ง ที่เลือกมาจากสิ่งของ 8 สิ่ง กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$

$\odot$ กด $\odot$ เลือก [Probability (ความน่าจะเป็น)] กด $\odot$

เลือก [Permutation (การเรียงสับเปลี่ยน)(P)] กด $\odot$, $\odot$ $\odot$



explanation

โดยพิจารณาการนำสิ่งของทีละ 1 สิ่งตามลำดับจากสิ่งของ n สิ่ง

สิ่งของที่ 1 มี n วิธีในการนำสิ่งของ 1 สิ่งมาจากสิ่งของ n สิ่ง

สิ่งของที่ 2 มี $(n-1)$ วิธีในการนำสิ่งของ 1 สิ่งมาจากสิ่งของที่เหลืออยู่ $(n-1)$ สิ่ง

สิ่งของที่ 3 มี $(n-2)$ วิธีในการนำสิ่งของ 1 สิ่งมาจากสิ่งของที่เหลืออยู่ $(n-2)$ สิ่ง

$\vdots$

สิ่งของที่ r เนื่องจากสิ่งของ $(r-1)$ สิ่ง ถูกเลือกมาจากสิ่งของ n สิ่งแล้ว ดังนั้นจำนวนสิ่งของที่เหลืออยู่คือ

$$n-(r-1)=(n-r+1) \text{ สิ่ง}$$

จึงมี $(n-r+1)$ วิธี ในการนำสิ่งของ 1 สิ่งมาจากจำนวนที่เหลืออยู่

จากหลักการคูณ มี $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$ วิธี ในการนำสิ่งของ n สิ่งมาจากสิ่งของ r สิ่ง

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง จำนวนทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง ที่นำมาจากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง คือ ${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

ผลคูณของจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนนับทั้งหมดจาก 1 ถึง n เช่น ทางขวามือของสมการข้างต้น เรียกว่า

แฟกทอเรียล n และแสดงในรูป $n!$ นอกจากนี้ยังนิยามเป็น $0!=1$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ex. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

check

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณ $6!$

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

⑥ กด $\odot$ เลือก [Probability (ความน่าจะเป็น)] กด OK

เลือก [Factorial (แฟกทอเรียล)(!)] กด OK , EXE

6!
720

โดยใช้เครื่องหมายแฟกทอเรียล ซึ่งเราสามารถแปลงเป็น ${}_9P_5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{4!} = \frac{9!}{(9-5)!}$

ได้ เราสามารถแสดงสูตรสำหรับการหาจำนวนทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยนได้ดังต่อไปนี้

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

เมื่อ $r=0$ ในสูตรข้างต้น จะกลายเป็น ${}_nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ ซึ่งเรานิยามเป็น ${}_nP_0 = 1$

EXERCISE

① จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาค่าของ ${}_6P_4$

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

360

⑥ $\odot$ $\vee$ OK $\vee$ $\vee$ OK 4 EXE

6P4
360

(2) หาค่าของ ${}_{10}P_3$

$${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

720

① ⑩ $\odot$ $\vee$ OK $\vee$ $\vee$ OK 3 EXE

10P3
720

(3) เมื่อ $\frac{15!}{15} = A!$ จงหาค่าของ A

$$\text{จาก } \frac{15!}{15} = \frac{15 \cdot 14!}{15} = 14! \text{ เราจะได้ } A=14$$

14

① ⑤ $\odot$ $\vee$ OK $\vee$ OK $\frac{\square}{\square}$ ① ⑤ $>$ $-$ ① ④ $\odot$ $\vee$ OK $\vee$ OK EXE

$\frac{15!}{15} - 14!$
0

๒ หาวามีกี่วิธีในการเรียงตัวเลข 7 ตัว 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 ใน 1 แถว ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) เลือกและเรียงตัวเลข 4 ตัวจากตัวเลข 7 ตัว

เนื่องจากการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 4 สิ่ง que เลือกมาจากสิ่งของ 7 สิ่ง จึงมี ${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ วิธี

840 วิธี

7 6 5 4 OK OK OK 4 EXE

✓ 0	▲
7P4	
	840

(2) เรียงตัวเลขทั้งหมด 7 ตัว

เนื่องจากการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของทั้งหมด 7 สิ่ง จึงมี $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ วิธี

5040 วิธี

7 6 5 4 3 2 1 OK OK EXE

✓ 0	▲
7!	
	5040

(3) เรียงตัวเลขทั้งหมด 7 ตัวเป็นจำนวนคู่ 7 หลัก

มี 3 วิธีในการเรียงจำนวนคู่ หลักหน่วยต้องเป็นเลข 2, 4 หรือ 6 และหลักอื่น ๆ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนเลข 6 ตัว โดยไม่รวมเลขคู่ 1 ตัวในหลักหน่วย

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ $3 \times 6! = 3 \times 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2160$ วิธี

2160 วิธี

3 2 6 4 3 2 1 OK OK EXE

✓ 0	▲
3×6!	
	2160

PRACTICE

๑ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาค่าของ ${}_9P_3$

(2) หาค่าของ ${}_7P_5$

(3) เมื่อ $35 \times 34! = A!$ จงหาค่าของ A

๒. หาวามีกี่วิธีในการเรียงตัวเลข 8 ตัว 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 ใน 1 แถว ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) เลือกและเรียงตัวเลข 4 ตัวจากตัวเลข 8 ตัว

(2) เรียงตัวเลขทั้งหมด 8 ตัว

(3) เรียงตัวเลขทั้งหมด 8 ตัวเป็นจำนวนคี่ 8 หลัก

การเรียงสับเปลี่ยนต่าง ๆ

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีคำนวณจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนที่สิ่งใดสิ่งหนึ่งเรียงติดกันหรือเรียงที่หัวแถวและท้ายแถว

STUDY GUIDE

การเรียงสับเปลี่ยนต่าง ๆ

พิจารณาการเรียงต่อไปนี้ โดยที่สิ่งใดสิ่งหนึ่งถูกเรียงไว้ติดกันหรือเรียงไว้ที่หัวแถวและท้ายแถว และใช้หลักการคูณเพื่อแก้โจทย์

การเรียงสิ่งใดสิ่งหนึ่งไว้ติดกัน

พิจารณาการเรียงสิ่งของโดยกำหนดให้อยู่ติดกับสิ่งของอีก 1 สิ่ง

Ex. เมื่อเรียงตัวอักษร 6 ตัว A, B, C, D, E และ F ในแนวนอนเป็น 1 แถว พิจารณาว่ามีการจัดเรียงกี่วิธีที่ตัวอักษร A และ B จะอยู่ติดกัน

เนื่องจาก A และ B อยู่ติดกันเสมอ AB จึงนับเป็นตัวอักษร 1 ตัว ดังนั้นเมื่อรวมกับตัวอักษรอื่น ๆ ได้แก่ C, D, E และ F เราจึงพิจารณาได้ว่าเป็นการเรียงตัวอักษร 5 ตัว

มี ${}_5P_5$ วิธีในการเรียงตัวอักษรเหล่านี้

ในการเรียงแต่ละวิธีเหล่านี้ มี ${}_2P_2$ วิธีในการเรียงแค่ตัวอักษร A และ B

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ ${}_5P_5 \times {}_2P_2 = 5! \times 2! = 240$ วิธี



check

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณ $5! \times 2!$

(5) (C) (V) (OK) (V) (OK) (X) (2) (C) (V) (OK) (V) (OK) (EXE)



แนวคิดในการเรียงสิ่งใดสิ่งหนึ่งที่หัวแถวและท้ายแถว

พิจารณาการเรียงสิ่งของที่หัวแถวและท้ายแถว และเรียงสิ่งของที่เหลืออยู่ระหว่างหัวแถวและท้ายแถวดังกล่าว

Ex. เมื่อเรียงตัวอักษร 6 ตัว A, B, C, D, E และ F ในแนวนอนเป็น 1 แถว พิจารณาว่ามีการจัดเรียงกี่วิธีที่ตัวอักษร A และ B จะอยู่ที่หัวแถวและท้ายแถว

การเรียงตัวอักษร A และ B ไว้ที่หัวแถวและท้ายแถวคือการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 2 สิ่ง que เลือกมาจากสิ่งของ 2 สิ่ง ดังนั้นจึงมี ${}_2P_2$ วิธี

ในการเรียงแต่ละวิธีเหล่านี้ มี ${}_4P_4$ วิธีในการเรียงตัวอักษรอื่น ๆ C, D, E และ F

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ ${}_2P_2 \times {}_4P_4 = 2! \times 4! = 48$ วิธี

check

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณ $2! \times 4!$

(2) (C) (V) (OK) (V) (OK) (X) (4) (C) (V) (OK) (V) (OK) (EXE)



EXERCISE

- ① โดยกำหนดให้นักเรียน 8 คน A, B, C, D, E, F, G และ H ยืนเข้าแถวในแนวนอน 1 แถว จงหาว่ามีกี่วิธีที่นักเรียนสามารถยืนเข้าแถวได้ ตามที่แสดงด้านล่าง

- (1) นักเรียน C และ D ยืนเข้าแถวอยู่ติดกัน

เนื่องจาก C และ D นั้นยืนเข้าแถวอยู่ติดกันเสมอ จึงนับทั้งสองคนนี้เป็นหนึ่งกลุ่ม

มี 7P_7 วิธีสำหรับนักเรียนคนอื่น ๆ 7 คนในการยืนเข้าแถว

ในแต่ละแถวเหล่านี้ มี ${}_2P_2$ วิธีเท่านั้นในการจัดแถวสำหรับ C และ D

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ ${}^7P_7 \times {}_2P_2 = 7! \times 2! = 10080$ วิธี

10080 วิธี

⑦ ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

7! × 2!
10080

- (2) นักเรียน E และ F ยืนเข้าแถวที่หัวแถวและท้ายแถว

แถวที่มี E และ F ที่หัวแถวและท้ายแถวคือการเรียงสับเปลี่ยนของการเลือกนักเรียน 2 คนจาก 2 คน ดังนั้นจึงมี ${}_2P_2$ วิธี

ในแต่ละแถวเหล่านี้ มี ${}_6P_6$ วิธีในการจัดแถวของนักเรียนคนอื่น ๆ

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ ${}_2P_2 \times {}_6P_6 = 2! \times 6! = 1440$ วิธี

1440 วิธี

② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

2! × 6!
1440

- (3) นักเรียน G และ H ไม่ได้ยืนเข้าแถวที่หัวแถวหรือท้ายแถว

เซตของแถวที่นักเรียน G และ H อยู่ที่หัวแถวและท้ายแถว และเซตของแถวที่นักเรียน G และ H ไม่ได้อยู่ที่หัวแถวและท้ายแถว นั้นมีคอมพลีเมนต์ที่สัมพันธ์กัน

ดังนั้น เราสามารถนำจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักเรียน 8 คน ยืนเข้าแถวในแนวนอน ${}_8P_8$ ลบกับจำนวนวิธีทั้งหมดที่

นักเรียน G และ H อยู่ที่หัวแถวและท้ายแถว ${}_2P_2 \times {}_6P_6$ ได้

ดังนั้น เราจึงสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดของ ${}_8P_8 - {}_2P_2 \times {}_6P_6 = 8! - 1440 = 38880$ วิธี

38880 วิธี

⑧ ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

8! - Ans
38880

- ② โดยกำหนดให้นักฟุตบอล 3 คนและนักบาสเกตบอล 4 คนยืนเข้าแถวตามแนวนอน 1 แถว จงหาว่ามีกี่วิธีที่พวกเขาสามารถยืนเข้าแถวได้ ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) นักฟุตบอล 3 คนยืนเข้าแถว 1 แถว

เนื่องจากนักฟุตบอล 3 คนยืนเข้าแถว 1 แถวเสมอ จึงนับพวกเขาเป็นหนึ่งกลุ่ม

มี ${}_5P_5$ วิธีสำหรับนักกีฬาคนอื่น ๆ 5 คนในการยืนเข้าแถว

ในแต่ละแถวเหล่านี้ มี ${}_3P_3$ วิธีเท่านั้นในการจัดแถวนักฟุตบอล 3 คน

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ ${}_5P_5 \times {}_3P_3 = 5! \times 3! = 720$ วิธี

720 วิธี

⑤ ⊞ √ OK √ OK ⊗ ③ ⊞ √ OK √ OK ⊞



(2) นักบาสเกตบอลยืนเข้าแถวที่หัวแถวและท้ายแถว

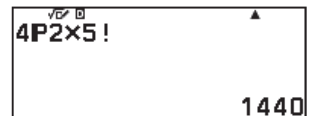
แถวที่มีนักกีฬา 2 คนที่หัวแถวและท้ายแถวคือการเรียงสับเปลี่ยนของการเลือกนักกีฬา 2 คนจาก 4 คน ดังนั้นจึงมี ${}_4P_2$ วิธี

ในแต่ละแถวเหล่านี้ มี ${}_5P_5$ วิธีเท่านั้นในการจัดแถวนักกีฬาที่เหลืออยู่ 5 คน

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ ${}_4P_2 \times {}_5P_5 = \frac{4!}{(4-2)!} \times 5! = 1440$ วิธี

1440 วิธี

④ ⊞ √ OK √ √ OK ② ⊗ ⑤ ⊞ √ OK √ OK ⊞



(3) นักบาสเกตบอลไม่ได้ยืนเข้าแถวที่หัวแถวหรือท้ายแถว

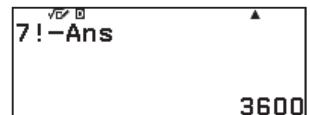
เซตของแถวที่นักบาสเกตบอลอยู่ที่หัวแถวและท้ายแถว และเซตของแถวที่นักบาสเกตบอลไม่ได้อยู่ที่หัวแถวและท้ายแถว นั้นมีคอมพลีเมนต์ที่สัมพันธ์กัน

ดังนั้น เราสามารถนำจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักกีฬา 7 คน ยืนเข้าแถวในแนวนอน ${}_7P_7$ ลบกับจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักบาสเกตบอล อยู่ที่หัวแถวและท้ายแถว ${}_4P_2 \times {}_5P_5$ ได้

ดังนั้น เราจึงสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดของ ${}_7P_7 - {}_4P_2 \times {}_5P_5 = 7! - 1440 = 3600$ วิธี

3600 วิธี

⑦ ⊞ √ OK √ OK − Ans ⊞



PRACTICE

- ◆ โดยกำหนดให้จัดลำดับการวิ่งสำหรับการวิ่งผลัดของนักศึกษาชั้นปีที่ 1 จำนวน 4 คน และนักศึกษาชั้นปีที่ 2 จำนวน 4 คน จงหาว่ามีลำดับการวิ่งกี่วิธี ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) นักศึกษาชั้นปีที่ 1 จำนวน 4 คนวิ่งต่อกัน

(2) นักศึกษาชั้นปีที่ 2 วิ่งในตำแหน่งแรกและตำแหน่งสุดท้าย

(3) นักศึกษาชั้นปีที่ 2 ไม่ได้วิ่งในตำแหน่งแรกและตำแหน่งสุดท้าย

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

TARGET

การทำความเข้าใจการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งต่าง ๆ เป็นวงกลม

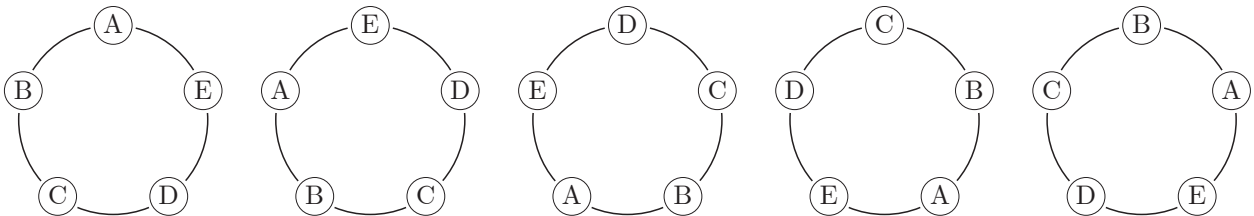
STUDY GUIDE

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

การเรียงสับเปลี่ยนที่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เรียงเป็นวงกลมคือ **การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม** ในการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม เราจะพิจารณาว่าการเรียงนั้นเหมือนกัน ก็ต่อเมื่อหมุนแล้วเป็นการเรียงที่เหมือนกัน คุณสามารถหาจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่งได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{n P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Ex. พิจารณาจำนวนทั้งหมดในการเรียงแบบวงกลมของตัวอักษร 5 ตัว A, B, C, D และ E



การเรียง 5 แบบที่แสดงในภาพประกอบด้านบนคือการเรียงทั้งหมด 1 แบบ เนื่องจากการเรียงนั้นจะเหมือนกันเมื่อหมุนจำนวนการเรียงสับเปลี่ยนที่ A, B, C, D และ E เรียงเป็น 1 แถวคือ ${}_5P_5$ วิธี และเมื่อเราเรียงเป็นวงกลม ทั้ง 5 วิธีนั้นจะเหมือนกัน

ดังนั้น จำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมคือ $\frac{{}_5P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4!$ (วิธี)

จากส่วนนี้ เราจึงเข้าใจได้ว่าการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่เรียงเป็นวงกลมสามารถพิจารณาได้โดยการกำหนด

ให้สิ่งของ 1 สิ่งคงที่ แล้วจึงเรียงสิ่งของที่เหลืออยู่ $(n-1)$ สิ่ง

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนของ $(n-1)$ สิ่ง แล้วสิ่งของ 5 สิ่งมีการเรียงสับเปลี่ยน $5-1=4$ สิ่ง ดังนั้นจึงมี ${}_4P_4=4!$ วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมแบบพลิกได้

การเรียงสับเปลี่ยนที่มีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เช่นลูกปัดบนสร้อยคอ เรียกว่า

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมแบบพลิกได้ ในการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมแบบพลิกได้ เราจะพิจารณาว่าการเรียงนั้นเหมือนกันก็ต่อเมื่อพลิกแล้วเป็นการเรียงที่เหมือนกัน คุณสามารถหาจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมแบบพลิกได้ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่งได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Ex. พิจารณาจำนวนวิธีทั้งหมดในการทำสร้อยคอโดยการร้อยลูกปัดที่แตกต่างกัน 5 เม็ด A, B, C, D และ E

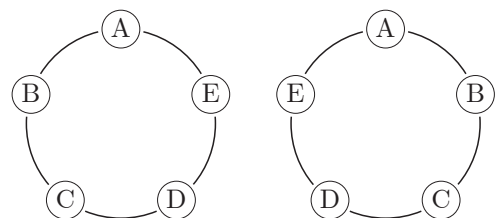
การเรียง 2 วิธีที่แสดงในรูปภาพด้านขวาจะถือว่าเหมือนกัน

เนื่องจากการเรียงนั้นเหมือนกันเมื่อพลิกสร้อยคอ

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมโดยเรียงลูกปัดที่แตกต่างกัน 5 เม็ดเป็นวงกลมมีการเรียง $(5-1)!$ วิธี และการเรียง 2 วิธีนั้นเหมือนกันเมื่อพลิก

ดังนั้น เมื่อทำสร้อยคอโดยการร้อยลูกปัดที่แตกต่างกัน 5 เม็ดเข้า

ด้วยกัน จึงมีวิธีทั้งหมด $\frac{(5-1)!}{2}$ วิธีในการทำสร้อยคอ



EXERCISE



- 1 โดยกำหนดให้ตัวอักษรพิมพ์ใหญ่ 4 ตัว A, B, C และ D และตัวอักษรพิมพ์เล็ก 4 ตัว e, f, g และ h เรียงกันเป็นวงกลม จงหาว่ามีกี่วิธีที่สามารถเรียงตัวอักษรดังกล่าวได้ ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) เรียงตัวอักษร 8 ตัวโดยอิสระ

จากการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ 8 สิ่ง มี $(8-1)! = 7! = 5040$ วิธี

5040 วิธี

7 OK OK OK OK OK OK



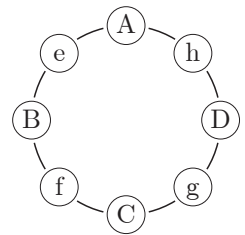
(2) สลับระหว่างตัวพิมพ์ใหญ่และตัวพิมพ์เล็ก

เรียงตัวอักษรพิมพ์ใหญ่ 4 ตัวเป็นวงกลม และเรียงตัวอักษรพิมพ์เล็กระหว่างตัวอักษรพิมพ์ใหญ่อีก 4 ตัว

จำนวนทั้งหมดในการเรียงตัวอักษรพิมพ์ใหญ่ 4 ตัวคือการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ 4 สิ่ง ดังนั้นจึงมี $(4-1)! = 3!$ วิธี

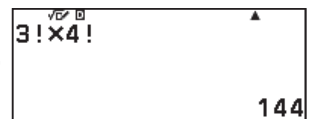
จำนวนทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรพิมพ์เล็ก 4 ตัวคือการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรพิมพ์เล็ก 4 ตัว โดยกำหนดให้ e เป็นตัวอักษรแรก ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวาดังนั้น เราจึงได้ ${}_4P_4$ วิธี

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถเรียงตัวอักษรได้ทั้งหมด $3! \times {}_4P_4 = 3! \times 4! = 144$ วิธี



144 วิธี

3 OK OK OK OK OK OK OK



(3) เรียงตัวอักษรพิมพ์เล็ก 4 ตัวเป็นหนึ่งแถว

โดยนับตัวอักษรพิมพ์เล็ก 4 ตัวเป็นหนึ่งกลุ่ม และพิจารณาการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของตัวอักษร 5 ตัว การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมนี้มี $(5-1)! = 4!$ วิธี

ในการเรียงแต่ละวิธีเหล่านี้ มี ${}_4P_4$ วิธีในการเรียงตัวอักษรพิมพ์เล็ก 4 ตัว

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ $4! \times {}_4P_4 = 4! \times 4! = 576$ วิธี

576 วิธี

4 OK OK OK OK OK OK



- ② มีนักเรียน 2 คนสวมรองเท้าสีขาวและมีนักเรียน 8 คนสวมรองเท้าสีดำต้องนั่งที่โต๊ะกลมหนึ่งตัว จงหาว่ามีกี่วิธีที่พวกเขาสามารถนั่งโต๊ะดังกล่าวได้ ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) นักเรียน 2 คนที่สวมรองเท้าสีขาวนั่งหันหน้าเข้าหากัน

โดยพิจารณาให้นักเรียน 2 คนที่สวมรองเท้าสีขาวนั่งหันหน้าเข้าหากัน และนักเรียน 8 คนที่สวมรองเท้าสีดำนั่งอยู่ระหว่างพวกเขา

นักเรียน 2 คนที่สวมรองเท้าสีขาวนั่งตามการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของนักเรียน 2 คน ดังนั้นจึงมี $(2-1)! = 1!$ วิธี หากเราพิจารณาการเรียงที่นั่งของนักเรียน 8 คนที่สวมรองเท้าสีดำ โดยเริ่มจากใครก็ตามที่นั่งอยู่ข้าง ๆ นักเรียนที่สวมรองเท้าสีขาว 1 คน ก็จะกลายเป็นการเรียงสับเปลี่ยนนักเรียน 8 คน ดังนั้นจึงมี ${}_8P_8$ วิธี ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนทั้งหมดได้ $1! \times {}_8P_8 = 1 \times 8! = 40320$ วิธี

40320 วิธี

⑧ ⊞ ✓ ○K ✓ ○K EXE

8!
40320

(2) นักเรียน 2 คนที่สวมรองเท้าสีขาวนั่งข้างกัน

โดยนับนักเรียนที่สวมรองเท้าสีขาว 2 คนเป็นหนึ่งกลุ่ม และพิจารณาการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของนักเรียน 9 คน การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมนี้มี $(9-1)! = 8!$ วิธี

ในการเรียงที่นั่งแต่ละวิธีเหล่านี้ มี ${}_2P_2$ วิธีในการเรียงที่นั่งของนักเรียนแค่ 2 คนที่สวมรองเท้าสีขาว ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ $8! \times {}_2P_2 = 8! \times 2! = 80640$ วิธี

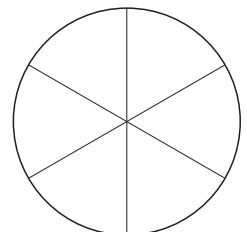
80640 วิธี

⑧ ⊞ ✓ ○K ✓ ○K ⊗ ② ⊞ ✓ ○K ✓ ○K EXE

8! x 2!
80640

- ③ โดยกำหนดให้วงกลมแบ่งออกเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กัน แต่ละส่วนระบายสีที่แตกต่างกันทั้งหมด 6 สี จงหาว่ามีกี่วิธีที่สามารถระบายสีวงกลมได้

เราสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของ 6 สีที่เรียงกันในวงกลม ดังนั้นจึงมี $(6-1)! = 5! = 120$ วิธี



120 วิธี

⑤ ⊞ ✓ ○K ✓ ○K EXE

5!
120

- ④ มีสร้อยคอที่ทำโดยการร้อยลูกปัดสีที่แตกต่างกัน 7 เม็ด จงหาว่ามีกี่วิธีในการทำสร้อย

เราสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมแบบพลิกได้ของสีที่แตกต่างกัน 7 สี

ดังนั้น เราจึงได้ $\frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = 360$ วิธี

360 วิธี

⑥ ⊞ ✓ ○K ✓ ○K ⊞ ② EXE

6! / 2
360

PRACTICE

- ① มีนักเรียน 3 คนที่สวมเสื้อสีแดงและมีนักเรียน 3 คนที่สวมเสื้อสีน้ำเงิน ต้องนั่งที่โต๊ะกลมหนึ่งตัว จงหาว่ามีวิธีที่พวกเขาสามารถนั่งโต๊ะดังกล่าวได้ ตามที่แสดงด้านล่าง
- (1) จัดที่นั่งให้นักเรียน 6 คนโดยอิสระ

- (2) สลับที่นั่งของนักเรียน 3 คนที่สวมเสื้อสีแดงกับนักเรียน 3 คนที่สวมเสื้อสีน้ำเงิน

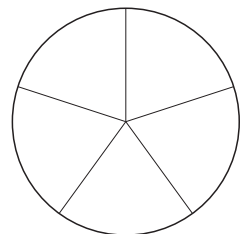
- (3) จัดที่นั่งของนักเรียน 3 คนที่สวมเสื้อสีน้ำเงินให้นั่งติดกัน

๒ โดยกำหนดให้ผู้ใหญ่ 2 คนและเด็ก 4 คนเรียงกันเป็นวงกลม จงหาว่ามีกี่วิธีที่พวกเขาสามารถนั่งเรียงกันได้ ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) ผู้ใหญ่ 2 คนนั่งหันหน้าเข้าหากัน

(2) ผู้ใหญ่ 2 คนนั่งติดกัน

๓ มีวงกลมที่แบ่งออกเป็น 5 ส่วนเท่า ๆ กัน แต่ละส่วนระบายสีที่แตกต่างกันทั้งหมด 5 สี จงหาว่ามีกี่วิธีที่สามารถระบายสีวงกลมได้



4 โดยกำหนดให้ลูกบอล 1 ลูกมีตัวอักษรแต่ละตัวเหล่านี้ A, B, C, D, E, F, G และ H เขียนอยู่บนลูกบอล จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) มีกี่วิธีในการเรียงลูกบอลทั้งหมดเป็นวงกลม

(2) มีกี่วิธีในการร้อยลูกปัดในสร้อยข้อมือ

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ซ้ำกันทั้งหมด

TARGET การทำความเข้าใจการเรียงสับเปลี่ยนที่สามารถใช้สิ่งเดิมซ้ำ ๆ ได้

STUDY GUIDE

การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ซ้ำกันทั้งหมด

หากคุณเลือกสิ่งของ r สิ่งมาจากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ซึ่งคุณสามารถใช้สิ่งเดียวกันได้หลายครั้ง และนำมาเรียงในการเรียงสับเปลี่ยน 1 แถว เราจะเรียกว่า **การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ซ้ำกันทั้งหมด r สิ่ง** ที่เลือกมาจากสิ่งของ n สิ่ง และเราสามารถหาจำนวนทั้งหมดได้ดังต่อไปนี้

$$\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_r = n^r$$

ผลคูณของสิ่งของ r สิ่ง

Ex. โดยพิจารณาจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดสำหรับลูกเต๋า 1 ลูกที่

ทอด 4 ครั้ง

โดยกำหนดให้ทอดลูกเต๋า 2 ครั้ง สำหรับลูกเต๋าลูกที่ 1 มี 6 วิธี

ที่ลูกเต๋าคือตั้งแต่ 1 ถึง 6 และสำหรับลูกเต๋าลูกที่ 2 มี 6 วิธีที่

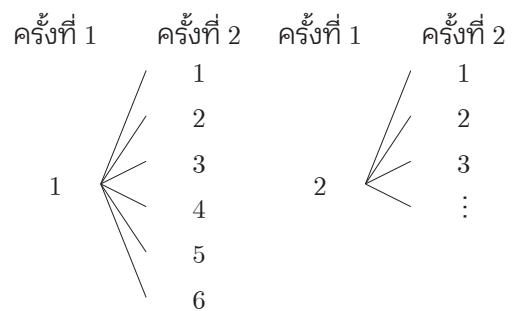
ลูกเต๋าคือตั้งแต่ 1 ถึง 6 เช่นกัน

เมื่อทอดลูกเต๋าดำเนินการ 3 ครั้ง จะมีผลลัพธ์เป็น 6 วิธี สำหรับ

การทอดลูกเต๋าค้างที่ 3 สำหรับแต่ละผลลัพธ์ของการทอดครั้งที่ 2

เมื่อทอดลูกเต๋าค้างที่ 4 จะมีผลลัพธ์เป็น 6 วิธีสำหรับการทอดครั้งที่ 4 สำหรับแต่ละผลลัพธ์ของการทอดครั้งที่ 3

ดังนั้น ตามหลักการคูณ จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดคือ $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$ วิธี



EXERCISE

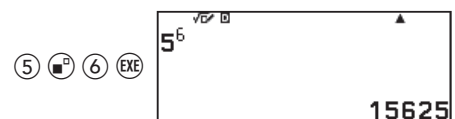


◆ หาวามีวิธีที่สามารถเรียงจำนวนเต็มตามที่แสดงด้านล่างได้โดยใช้ตัวเลข 5 ตัว 1, 2, 3, 4 และ 5 อย่างไรก็ดี คุณสามารถใช้ตัวเลขเดิมได้หลายครั้ง

(1) จำนวนเต็ม 6 หลัก

เนื่องจากการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ซ้ำกันทั้งหมด 6 สิ่ง ที่เลือกมาจากสิ่งของ 5 สิ่ง จึงมี $5^6 = 15625$ วิธี

15625 วิธี



(2) จำนวนคู่ 4 หลัก

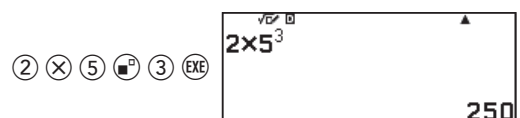
เมื่อเป็นจำนวนคู่ หลักหน่วยต้องเป็น 2 หรือ 4 ดังนั้นจึงมี 2 วิธีในการเลือกตัวเลขสำหรับหลักหน่วย

สำหรับตัวเลขใด ๆ เหล่านี้ การเลือกตัวเลขสำหรับหลักสิบ หลักร้อย และหลักพันที่เหลืออยู่นั้นเป็นการเรียงสับ

เปลี่ยนสิ่งของที่ซ้ำกันทั้งหมด 3 สิ่ง ที่เลือกมาจากสิ่งของ 5 สิ่ง ดังนั้นจึงมี 5^3 วิธี

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนทั้งหมดได้ $2 \times 5^3 = 250$ วิธี

250 วิธี



(3) กำหนดให้มีเลข 0 เพิ่มเติม เพื่อใช้ตัวเลข 6 ตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เพื่อเรียงจำนวนคือ 5 หลัก

มี 5 วิธี โดยไม่รวมเลข 0 ในการเลือกตัวเลขหนึ่งตัวสำหรับหลักหมื่น

มี 3 วิธี 1, 3 และ 5 ในการเลือกตัวเลขสำหรับหลักหน่วย

การเลือกตัวเลขหนึ่งตัวสำหรับหลักอื่น ๆ ที่เหลือคือการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ซ้ำกันทั้งหมด 3 สิ่ง que เลือกมาจากสิ่งของ 6 สิ่ง ดังนั้นจึงมี 6^3 วิธี

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนทั้งหมดได้ $5 \times 3 \times 6^3 = 3240$ วิธี

3240 วิธี

5 × 3 × 6 × 6 × 6

$5 \times 3 \times 6^3$
3240

PRACTICE

◆ หากมีก็วิธีที่สามารถเรียงจำนวนเต็มตามที่แสดงด้านล่างได้โดยใช้ตัวเลข 4 ตัว 1, 2, 3 และ 4 อย่างไรก็ตาม คุณสามารถใช้ตัวเลขเดิมได้หลายครั้ง

(1) จำนวนเต็ม 5 หลัก

(2) จำนวนคือ 4 หลัก

(3) กำหนดให้มีเลข 0 เพิ่มเติม เพื่อใช้ตัวเลข 5 ตัวคือ 0, 1, 2, 3 และ 4 เพื่อเรียงจำนวนคู่ 6 หลัก

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

การจัดหมู่

TARGET

การทำความเข้าใจจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถเลือกสิ่งของหลายอย่างมาจากรุ่นใดที่หนึ่งได้โดยไม่ต้องพิจารณาถึงลำดับของสิ่งของ

STUDY GUIDE

การจัดหมู่

การจัดหมู่และจำนวนทั้งหมดของการจัดหมู่

เรากล่าวได้ว่า**การจัดหมู่**คือการเลือกกลุ่มของสิ่งของ โดยไม่พิจารณาลำดับในการเลือก หากคุณเลือกสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่งและนำมารวมกันเป็น 1 กลุ่ม เราจะเรียกว่า**การจัดหมู่สิ่งของ r สิ่งที่เลือกมาจากรุ่นของ n สิ่ง** และจำนวนทั้งหมดแสดงเป็น ${}_nC_r$ อย่างไรก็ตาม $r \leq n$ คุณสามารถหาจำนวนทั้งหมดเหล่านี้ได้ดังต่อไปนี้

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{\text{ผลคูณของสิ่งของ } r \text{ สิ่ง}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdots 1}_{\text{ผลคูณของสิ่งของ } r \text{ สิ่ง}}}$$

Ex. พิจารณาจำนวนการจัดหมู่ทั้งหมดของ ${}_5C_3$ โดยการเลือกของ 3 สิ่ง ออกจากของ 5 สิ่งที่เป็นตัวอักษร A, B, C, D และ E

การจัดหมู่ 1 เซตสำหรับ {A, B, C} สามารถเรียงได้เป็น ABC, ACB, BAC, BCA, CAB และ CBA

ดังนั้นสำหรับการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 3 สิ่งทีเลือกมาจากรุ่นของ 3 สิ่ง จึงมี 3! วิธี

สำหรับการจัดหมู่ ${}_5C_3$ ทั้งหมด แต่ละเซตมีการเรียง 3! ซึ่งเท่ากับจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยน ${}_5P_3$ ซึ่งจะได้ ${}_5C_3 \times 3! = {}_5P_3$

$$\text{ดังนั้น จึงมี } {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ วิธี}$$

สมบัติต่าง ๆ ของการจัดหมู่

หากเรานิยามการจัดหมู่เป็นสิ่งของ 3 สิ่งทีเลือกมาจากรุ่นของ 7 สิ่ง นอกจากนี้ เรายังสามารถนิยามการจัดหมู่สิ่งของที่ไม่ได้เลือกออกมาได้ด้วย ซึ่งก็คือ $7-3=4$ สิ่ง กล่าวได้ว่าจำนวนทั้งหมดของการจัดหมู่การเลือกสิ่งของ 3 สิ่งจาก 7 สิ่งนั้นเท่ากับจำนวนทั้งหมดของการจัดหมู่การเลือกสิ่งของ 4 สิ่งจากสิ่งของ 7 สิ่ง จากจุดนี้ เราสามารถหาความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ได้

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

นิพจน์เชิงสัมพันธ์นี้มีประโยชน์สำหรับการคำนวณโจทย์ยาว ๆ เช่น ${}_9C_7 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 36$

$${}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$$

เมื่อ $r=0$ ในนิพจน์เชิงสัมพันธ์นี้ เราจะได้ ${}_nC_0 = {}_nC_n$ เนื่องจาก ${}_nC_n = 1$ เราสามารถระบุได้ว่า ${}_nC_0 = 1$

โดยใช้สูตรการเรียงสับเปลี่ยน ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ ใน ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ แล้วเมื่อ $0 < r < n$ เราจึงสามารถแสดงในรูป

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ ได้}$$

นอกจากนี้ เนื่องจาก ${}_nC_n = 1$ และ ${}_nC_0 = 1$ หากเรากำหนดให้ $0! = 1$ สูตรนี้จึงใช้ได้สำหรับ $r=0$ หรือ $r=n$



x	$f(x)$	$g(x)$
5	35	35
6	21	21
7	7	7
8	1	1

- ③ มีไฟทั้งหมด 52 ใบในหนึ่งสำหรับ มีหมายเลขตั้งแต่ 1 ถึง 13 และมีไฟอย่างละ 1 ใบในชุดไฟดอกเดียวกันทั้งหมด 4 ชุด คือ ข้าวหลามตัด โพดำ โพแดง และดอกจิก จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่สามารถเลือกไฟ 3 ใบจากไฟทั้งหมด 52 ใบได้

เนื่องจากการจัดหมู่สิ่งของ 3 สิ่ง que เลือกมาจากสิ่งของ 52 สิ่ง จึงมี ${}_{52}C_3 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 22100$ วิธี

22100 วิธี

⑤ ② ④ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK ③ EXE

✓ 52C3	▲
22100	

(2) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่สามารถเลือกไฟ 2 ใบจากชุดไฟดอกเดียวกัน 4 ชุด รวมเป็นไฟทั้งหมด 8 ใบได้

เนื่องจากการจัดหมู่ไฟ 2 ใบที่เลือกมาจากไฟข้าวหลามตัด 13 ใบ จึงมี ${}_{13}C_2$ วิธี

ด้วยวิธีเดียวกัน การเลือกไฟ 2 ใบจากชุดไฟดอกเดียวกันแต่ละชุด โพดำ โพแดง และดอกจิก มี ${}_{13}C_2$ วิธี

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ ${}_{13}C_2 \times {}_{13}C_2 \times {}_{13}C_2 \times {}_{13}C_2 = \left(\frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} \right)^4 = 37015056$ วิธี

37015056 วิธี

① ① ③ ④ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK ② ① ④ EXE

✓ (13C2) ⁴	▲
37015056	

(3) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่สามารถเลือกไฟ 5 ใบรวมกับไฟที่หยิบออกมาจากสำหรับแล้ว 2 ใบจากไฟทั้งหมด 52 ใบได้

เนื่องจากไฟที่กำหนด 2 ใบถูกเลือกไว้แล้ว ไฟอื่น ๆ อีก 3 ใบนั้นจะเลือกจากไฟที่เหลืออยู่ 50 ใบ

ดังนั้น จึงมี ${}_{50}C_3 = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 19600$ วิธี

19600 วิธี

⑤ ① ④ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK ③ EXE

✓ 50C3	▲
19600	

PRACTICE

① จงหาค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้

(1) 6C_3

(2) ${}_{14}C_{10}$

② มีวิธีการจัดหมู่ไฟ 7 ใบที่เลือกจากไฟ 9 ใบ และบนไฟแต่ละใบเขียนตัวเลข 1 ตัว 1 ถึง 9

๓ มีอาหารเมนูปลาที่แตกต่างกัน 5 ชนิดและอาหารเมนูเนื้อที่แตกต่างกัน 6 ชนิด จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่สามารถเลือกอาหารที่แตกต่างกัน 4 ชนิดจากอาหารเมนูปลาและอาหารเมนูเนื้อรวมกันทั้งหมด 11 ชนิดได้

(2) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่สามารถเลือกอาหารเมนูปลาที่แตกต่างกัน 2 ชนิดและอาหารเมนูเนื้อที่แตกต่างกัน 2 ชนิดรวมเป็นจำนวนทั้งหมด 4 ชนิดได้

(3) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่สามารถเลือกอาหารที่แตกต่างกัน 6 ชนิด รวมกับเมนูอาหาร 2 ชนิดที่เลือกมาจากอาหารเมนูปลา และอาหารเมนูเนื้อจากเมนู 11 ชนิด

จำนวนกลุ่มทั้งหมด

TARGET

การทำความเข้าใจจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถจัดกลุ่มสิ่งต่าง ๆ ได้

STUDY GUIDE

การจัดกลุ่ม

วิธีหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดกลุ่มสิ่งต่าง ๆ นั้น

จะแตกต่างกันไปตามความต่างระหว่างกลุ่ม

กลุ่มที่มีความแตกต่างกัน

เลือกสิ่งหนึ่งไปยังกลุ่มที่ 1 จากนั้นเลือกสิ่งหนึ่งไปยังกลุ่มที่ 2 จากสิ่งของที่เหลืออยู่... เป็นต้น แล้วการจัดหมู่ในกลุ่มสุดท้ายจะถูกกำหนดโดยอัตโนมัติ

กลุ่มที่ไม่มีความแตกต่างกัน

ใช้ $\frac{\text{จำนวนทั้งหมดเมื่อกลุ่มมีความต่าง}}{\text{จำนวนวิธีทั้งหมดในการแบ่งกลุ่ม}}$ เพื่อหาคำตอบ

Ex. กำหนดให้มีนักเรียน 6 คน คือ A, B, C, D, E และ F พิจารณาการแบ่งกลุ่มดังต่อไปนี้

(1) แบ่งนักเรียนออกเป็น 3 ห้อง คือห้อง P, Q และ R โดยมีนักเรียน 2 คนในแต่ละห้อง

สำหรับการเลือกคน 2 คนจาก 6 คน เพื่อเข้าไปในห้อง P มี 6C_2 วิธี

สำหรับการเลือกคน 2 คนจากคนที่เหลืออยู่ 4 คน เพื่อเข้าไปในห้อง Q มี 4C_2 วิธี

สำหรับการเลือกคน 2 คนจากคนที่เหลืออยู่ 2 คน เพื่อเข้าไปในห้อง R เนื่องจากคนที่เหลืออยู่เข้าไปในห้องโดยอัตโนมัติ จึงมี 1 วิธี

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ ${}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 1 = 90$ วิธี

(2) แบ่งคนออกเป็น 3 ห้อง โดยมี 2 คนในแต่ละห้อง

เนื่องจากไม่มีความแตกต่างกันระหว่างห้องทั้ง 3 ห้อง เมื่อแบ่งนักเรียนด้วยวิธีนี้

จากข้อ (1) ตัวอย่างเช่น สำหรับกลุ่ม 3 กลุ่ม AB, CD และ EF รวมถึง A และ B อาจ

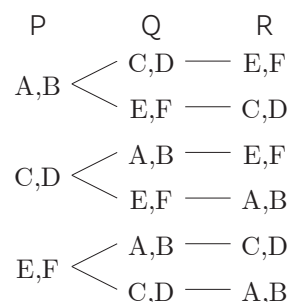
แบ่งไปยัง P หรือ Q หรือ R ดังนั้นจึงเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 3 สิ่ง จึงมี 3! วิธี

ดังนั้น หากไม่มีความแตกต่างกันระหว่างห้องแล้ว มี 3! วิธีในการหาร

เพราะ {AB, CD, EF} เหมือนกันทั้งหมด

นั่นคือ เมื่อไม่มีความแตกต่างระหว่างห้อง เราสามารถหาจำนวนทั้งหมดได้โดยการหารจำนวนทั้งหมดจากข้อ (1) ด้วย 3!

$$\frac{90}{3!} = \frac{90}{6} = 15 \text{ วิธี}$$



EXERCISE



กำหนดให้มีคน 9 คน พิจารณาการแบ่งกลุ่มทั้ง 9 คน ดังต่อไปนี้

(1) แบ่งคนออกเป็น 3 ห้อง คือห้อง A, B และ C โดยมี 3 คนในแต่ละห้อง

สำหรับการเลือกคน 3 คนจาก 9 คน เพื่อเข้าไปในห้อง A มี 9C_3 วิธี

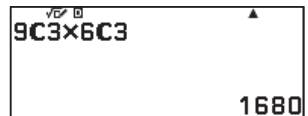
สำหรับการเลือกคน 3 คนจากคนที่เหลืออยู่ 6 คน เพื่อเข้าไปในห้อง B มี 6C_3 วิธี

สำหรับการเลือกคน 3 คนจากคนที่เหลืออยู่ 3 คน เพื่อเข้าไปในห้อง C เนื่องจากคนที่เหลืออยู่ทุกคนเข้าห้องโดยอัตโนมัติ จึงมี 1 วิธี

$$\text{ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ } {}^9C_3 \times {}^6C_3 \times 1 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1680 \text{ วิธี}$$

1680 วิธี

9 ๓ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK 3 ✗ 6 ๓ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK 3 EXE



(2) แบ่งคนออกเป็น 3 ห้อง โดยมี 3 คนในแต่ละห้อง

เนื่องจากไม่มีความแตกต่างกันระหว่างห้อง A, B และ C ในข้อ (1) จะได้ว่า มี 3! วิธีที่ซ้ำกัน

$$\text{ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดคือ } \frac{1680}{3!} = \frac{1680}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280 \text{ วิธี}$$

280 วิธี

Ans 3! ๓ ๓ ✓ OK ✓ OK EXE



(3) แบ่งคนออกเป็น 3 ห้อง โดยมี 5 คน, 2 คน และ 2 คนในแต่ละห้อง

สำหรับการเลือกคน 5 คนจาก 9 คน เพื่อเข้าไปในห้องสำหรับ 5 คน มี 9C_5 วิธี

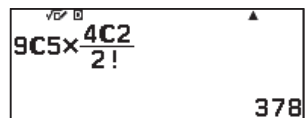
สำหรับการเลือกจากคนที่เหลืออยู่ 4 คนเพื่อแบ่งออกเป็นห้อง 2 ห้องสำหรับคน 2 คนที่ไม่ต่างกัน มี $\frac{{}^4C_2}{2!}$ วิธี

$$\text{ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ } {}^9C_5 \times \frac{{}^4C_2}{2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 378 \text{ วิธี}$$

378 วิธี

9 ๓ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK 5

✗ ๔ ๓ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK 2 ✓ 2 ๓ ✓ OK ✓ OK EXE



PRACTICE

◆ กำหนดให้มีคน 8 คน พิจารณาการแบ่งกลุ่มทั้ง 8 คน ดังต่อไปนี้

(1) แบ่งคนออกเป็น 4 ห้อง คือห้อง A, B, C และ D โดยมี 2 คนในแต่ละห้อง

(2) แบ่งคนออกเป็น 4 ห้อง โดยมี 2 คนในแต่ละห้อง

(3) แบ่งคนออกเป็น 4 ห้อง โดยมี 3 คน, 3 คน, 1 คน และ 1 คนในแต่ละห้อง

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

การเรียงลำดับเปลี่ยนสิ่งของที่เหมือนกัน

TARGET

การทำความเข้าใจจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหมือนกัน

STUDY GUIDE

การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหมือนกัน

โดยกำหนดให้สิ่งของจำนวน n สิ่ง ซึ่งบางสิ่งเป็นสิ่งของประเภทเดียวกัน a สิ่ง b สิ่ง... r สิ่ง เราสามารถหาจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{n!}{a!b!\cdots r!} \quad \text{อย่างไรก็ตาม } a+b+\cdots+r=n$$

Ex. พิจารณาการเรียงลูกบอล 9 ลูก ซึ่งประกอบด้วยลูกบอลสีแดง 4 ลูก ลูกบอลสีขาว 3 ลูก และลูกบอลสีดำ 2 ลูก เป็นเส้นตรง

เริ่มโดยการพิจารณา จำนวนวิธีทั้งหมดเมื่อไม่มีความแตกต่างกัน = $\frac{\text{จำนวนทั้งหมดเมื่อมีความแตกต่างกัน}}{\text{จำนวนวิธีทั้งหมดในการแบ่ง}}$

คุณสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ โดยการหาร $9!$ สำหรับการเรียงลูกบอลที่ต่างกันทั้งหมด 9 ลูก ด้วยผลคูณของ $4!$ เพื่อแยกลูกบอลสีแดง ด้วย $3!$ เพื่อแยกลูกบอลสีขาว และด้วย $2!$ เพื่อแยกลูกบอลสีดำ

จึงกล่าวได้ว่ามี $\frac{9!}{4!3!2!}=1260$ วิธี



check

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหมือนกัน

9  V OK V OK

$$\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = 1260$$

OTHER METHODS

พิจารณาตำแหน่ง 9 ตำแหน่งในการวางลูกบอลทั้งหมด

สำหรับการเลือกตำแหน่ง 4 ตำแหน่งจาก 9 ตำแหน่ง เพื่อวางลูกบอลสีแดง 4 ลูก มี 9C_4 วิธี

สำหรับการเลือกตำแหน่ง 3 ตำแหน่งจากตำแหน่งที่เหลืออยู่ 5 ตำแหน่ง เพื่อวางลูกบอลสีขาว 3 ลูก มี ${}_5C_3$ วิธี

ตำแหน่งในการวางลูกบอลสีดำ 2 ลูกจะถูกกำหนดโดยอัตโนมัติ

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราจะได้ ${}_9C_4 \times {}_5C_3 \times 1 = 1260$ วิธี ในการเรียงสิ่งของ 9 สิ่งเป็นเส้นตรง

EXERCISE

- ① หาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงลูกบอลสีน้ำเงิน 5 ลูก ลูกบอลสีเหลือง 4 ลูก และลูกบอลสีเขียว 3 ลูกเป็นเส้นตรง ซึ่งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 12 สิ่ง โดยรวมสิ่งของ 5 สิ่ง, 4 สิ่ง และ 3 สิ่งเหมือนกัน ดังนั้นจึงมี

$$\frac{12!}{5!4!3!} = 27720 \text{ วิธี}$$

27720 วิธี

① ② ⊞ ✓ OK ✓ OK
⊞ ⑤ ⊞ ✓ OK ✓ OK × ④ ⊞ ✓ OK ✓ OK × ③ ⊞ ✓ OK ✓ OK EXE

12!
5! × 4! × 3!
27720

- ② จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงจำนวนเต็ม 6 หลัก โดยใช้ตัวเลข 6 ตัว คือ 2, 2, 3, 3, 4, และ 4

ซึ่งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 6 สิ่ง โดยรวมสิ่งของ 2 สิ่งจากสิ่งของที่เหมือนกัน 3 ประเภท ดังนั้นจึงมี

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ วิธี}$$

90 วิธี

⑥ ⊞ ✓ OK ✓ OK ⊞ ② ⊞ ✓ OK ✓ OK ⊞ ③ EXE

6!
2! × 2! × 2!
90

- ③ หากมีกี่วิธีในการเรียงตัวอักษร 8 ตัว x, x, y, y, y, z, z และ z เป็นเส้นตรง ตามที่แสดงด้านล่าง

- (1) เรียงตัวอักษร 8 ตัวโดยอิสระ

ซึ่งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 8 สิ่ง โดยรวมสิ่งของ 2 สิ่ง, 3 สิ่ง และ 3 สิ่งเหมือนกัน ดังนั้นจึงมี

$$\frac{8!}{2!3!3!} = 560 \text{ วิธี}$$

560 วิธี

⑧ ⊞ ✓ OK ✓ OK
⊞ ② ⊞ ✓ OK ✓ OK × ③ ⊞ ✓ OK ✓ OK ⊞ EXE

8!
2! × 3! × 3!
560

- (2) เรียงตัวอักษรโดยจัดให้ตัวอักษร x ทั้ง 2 ตัวอยู่ติดกัน

โดยนับ x 2 ตัว เป็น 1 เซต และพิจารณาเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 7 สิ่ง โดยรวม 1 เซตสำหรับ x, y 3 ตัว และ z 3 ตัว

$$\frac{7!}{1!3!3!} = 140 \text{ วิธี}$$

140 วิธี

⑦ ⊞ ✓ OK ✓ OK ⊞ ③ ⊞ ✓ OK ✓ OK ⊞ EXE

7!
3! × 3! × 1!
140

PRACTICE

- ① หาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงลูกบอลสีแดง 4 ลูกและลูกบอลสีขาว 3 ลูกเป็นเส้นตรงโดยมีลูกบอล 7 ลูก
- ② หาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเรียงจำนวนเต็ม 8 หลักโดยใช้ตัวเลขทั้งหมด 8 ตัว 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6 และ 6
- ③ กำหนดให้ตัวอักษร 9 ตัว A, A, B, B, B, C, C, C, C เรียงเป็นเส้นตรง จงหาว่ามีกี่วิธีที่สามารถเรียงตัวอักษรดังกล่าวได้ ตามที่แสดงด้านล่าง
 - (1) เรียงตัวอักษร 9 ตัวโดยอิสระ
 - (2) เรียงตัวอักษร B ทั้ง 3 ตัวให้อยู่ติดกัน

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

วิธีที่สั้นที่สุด

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาจำนวนทั้งหมดของเส้นทางสั้นที่สุด

STUDY GUIDE

วิธีที่สั้นที่สุด

คุณสามารถหาจำนวนทั้งหมดของวิธีที่สั้นที่สุด (เส้นทางที่สั้นที่สุด) จาก A ถึง B ผ่านตาราง $p \times q$ ที่แสดงในรูปภาพด้านขวาได้ โดยพิจารณาเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่คล้ายกันดังต่อไปนี้

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

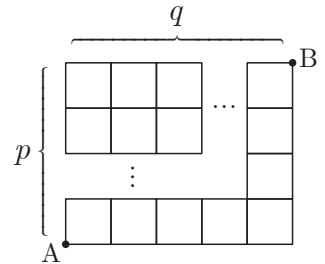
Ex. มีวิธีผ่านตาราง 2×3 ตามที่แสดงในรูปภาพ 1 ทางด้านขวา พิจารณาจำนวนทั้งหมดของเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง B ที่เลื่อนไปตามวิธีเหล่านี้
เส้นทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง B คือการเลื่อนขึ้น 2 เซลล์และเลื่อนไปทางขวา 3 เซลล์
จากจุดนี้ การเลื่อนขึ้น 1 เซลล์จะแสดงโดยสัญลักษณ์ $\uparrow$ และการเลื่อนไปทางขวา 1 เซลล์จะแสดงโดยสัญลักษณ์ $\rightarrow$

ตัวอย่างเช่น ความคืบหน้าที่แสดงในรูปภาพที่ 2 ทางด้านขวาแสดงในรูป
" $\rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow$ "

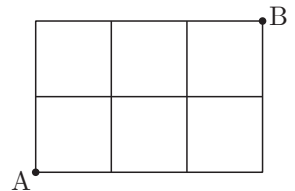
กล่าวได้ว่าเราสามารถพิจารณาจำนวนทั้งหมดของเส้นทางที่สั้นที่สุดเป็นจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยน 2 $\uparrow$ และ 3 $\rightarrow$ ได้

ซึ่งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหมือนกัน ดังนั้นจำนวนทั้งหมดที่เราหาได้คือ

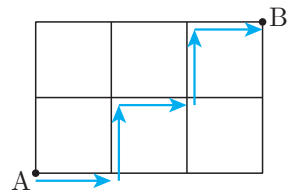
$$\frac{(2+3)!}{2!3!} = 10 \text{ วิธี}$$



รูปภาพ 1



รูปภาพ 2

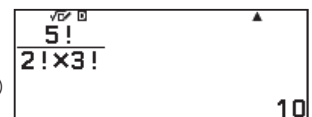


check

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณจำนวนทั้งหมดของเส้นทางที่สั้นที่สุด

5 2 OK 3 OK

2 2 OK 3 2 OK 3 OK EXE



EXERCISE

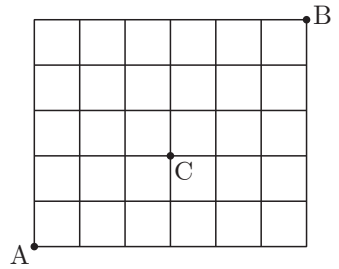
- ◆ มีวิถีเลื่อนผ่านตาราง 5×6 ในรูปภาพด้านขวา ในกรณีนี้ จงหาจำนวนเส้นทางที่สั้นที่สุดที่เลื่อนผ่านตามที่แสดงด้านล่าง

(1) เลื่อนจาก A ถึง B

การเลื่อนขึ้น 1 เซลล์แสดงโดยสัญลักษณ์ $\uparrow$ และการเลื่อนไปทางขวา 1 เซลล์แสดงโดยสัญลักษณ์ $\rightarrow$

จำนวนทั้งหมดของเส้นทางที่สั้นที่สุดนั้นเหมือนกับจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยน $5 \uparrow$ และ $6 \rightarrow$

ดังนั้น จำนวนทั้งหมดที่เราหาได้คือ $\frac{(5+6)!}{5!6!} = 462$ วิธี



462 วิธี

① ① ☒ ✓ OK ✓ OK

☒ ⑤ ☒ ✓ OK ✓ OK ✕ ⑥ ☒ ✓ OK ✓ OK EXE

$\frac{11!}{5! \times 6!}$	▲
462	

(2) เลื่อนจาก A ผ่าน C ไปยัง B

จำนวนทั้งหมดของเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง C นั้นเหมือนกับจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยน $2 \uparrow$ และ $3 \rightarrow$

ซึ่งเป็น $\frac{(2+3)!}{2!3!}$ วิธี

จำนวนทั้งหมดของเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก C ถึง B นั้นเหมือนกับจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยน $3 \uparrow$ และ $3 \rightarrow$

ซึ่งเป็น $\frac{(3+3)!}{3!3!}$ วิธี

ดังนั้น จากหลักการคูณ เราสามารถหาจำนวนทั้งหมดได้ $\frac{(2+3)!}{2!3!} \times \frac{(3+3)!}{3!3!} = 200$ วิธี

200 วิธี

⑤ ☒ ✓ OK ✓ OK ☒ ② ☒ ✓ OK ✓ OK ✕ ③ ☒ ✓ OK ✓ OK >
✕ ⑥ ☒ ✓ OK ✓ OK ☒ ③ ☒ ✓ OK ✓ OK ☒ EXE

$\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{6!}{3! \times 3!}$	▲
200	

(3) เลื่อนจาก A ถึง B โดยไม่ผ่าน C

เพื่อหาคำตอบ ให้ลบจำนวนที่หาได้ในข้อ (2) ออกจากจำนวนที่หาได้ในข้อ (1)

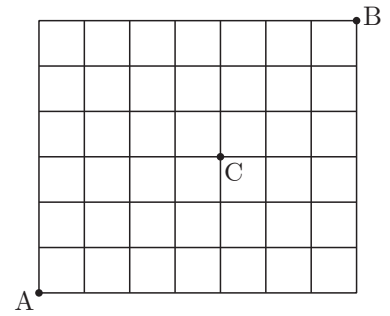
ดังนั้น เราจะได้ $462 - 200 = 262$ วิธี

262 วิธี

PRACTICE

- ◆ มีวิถีเลื่อนผ่านตาราง 6×7 ในรูปภาพด้านขวา ในกรณีนี้ จงหาจำนวนเส้นทางที่สั้นที่สุดที่เลื่อนผ่านตามที่แสดงด้านล่าง

(1) เลื่อนจาก A ถึง B



(2) เลื่อนจาก A ผ่าน C ไปยัง B

(3) เลื่อนจาก A ถึง B โดยไม่ผ่าน C

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

การจัดหมู่สิ่งของที่ซ้ำกัน

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาจำนวนทั้งหมดของการจัดหมู่ที่สามารถทำได้โดยอนุญาตให้ใช้สิ่งของซ้ำได้

STUDY GUIDE

การจัดหมู่สิ่งของที่ซ้ำกัน

การจัดหมู่โดยเลือกสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของ n ประเภทที่อนุญาตให้ใช้ซ้ำได้นั้นสามารถพิจารณาได้ดังต่อไปนี้

พิจารณาการเรียงสับเปลี่ยนสัญลักษณ์ $\circ$ จำนวน r อัน และตัวแบ่ง $|$ จำนวน $(n-1)$

Ex. พิจารณาการจัดหมู่ที่อนุญาตให้ใช้สิ่งของซ้ำได้ โดยที่คุณเลือกสิ่งของ 7 สิ่งจากผลไม้ 3 ชนิด: กล้วย ส้ม และสับปะรด

พิจารณาการเรียงสัญลักษณ์ $\circ$ จำนวน 7 อัน และตัวแบ่ง $|$ จำนวน 2 อัน ซึ่งแสดงในตารางการจัดหมู่ผลไม้ต่อไปนี้

การจัดหมู่ผลไม้			การเรียงสัญลักษณ์ $\circ$ และ $ $
กล้วย	ส้ม	สับปะรด	
2	1	4	$\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$
2	2	3	$\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$
0	2	5	$ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$
4	0	3	$\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$
$\vdots$			

กล้วย 2 ลูก | ส้ม 1 ลูก | สับปะรด 4 ลูก
 $\circ \circ | \circ | \circ \circ \circ \circ$

ดังนั้น จำนวนทั้งหมดของการจัดหมู่ผลไม้จึงเท่ากับจำนวนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนสัญลักษณ์ $\circ$ จำนวน 7

อัน และสัญลักษณ์ $|$ จำนวน 2 อัน ซึ่งเป็น $\frac{(7+2)!}{7!2!} = 36$ วิธี



check

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณจำนวนทั้งหมดของการจัดหมู่สิ่งของ 7 สิ่ง que เลือกมาจากสิ่งของ 3 ประเภท โดยอนุญาตให้ใช้ซ้ำได้

9 7 OK V OK

9 7 OK V OK X 2 OK V OK V OK EXE

$\frac{9!}{7! \times 2!}$	36
---------------------------	----

EXERCISE

1. หากมีการจัดหมู่ที่วิธีเมื่อคุณเลือกแผ่นกระดาษ 12 แผ่นจากสี 4 สีแดง น้ำเงิน ขาว และเหลือง อย่างไรก็ตาม คุณสามารถเลือกกระดาษสีใดก็ได้

จำนวนทั้งหมดที่คุณหาได้นั้นเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนสัญลักษณ์ $\circ$ จำนวน 12 อัน และสัญลักษณ์ $|$ จำนวน 3 อัน

ดังนั้น เราจะได้ $\frac{(12+3)!}{12!3!} = 455$ วิธี

455 วิธี

1 5 OK V OK

1 2 OK V OK X 3 OK V OK V OK EXE

$\frac{15!}{12! \times 3!}$	455
-----------------------------	-----

- ② กำหนดให้แจกสมุดบันทึก 15 เล่มแก่นักเรียน 5 คน จงหาว่ามีกี่วิธีที่สามารถแจกสมุดบันทึกดังกล่าวได้ และ ต้องแจกสมุดบันทึกอย่างน้อย 1 เล่มให้นักเรียนแต่ละคน
สมมติว่าสมุดบันทึก 1 เล่มนั้นถูกแจกให้นักเรียน 5 คนแล้ว ให้พิจารณาวิธีแจกสมุดบันทึกที่เหลืออยู่
 $15-5=10$ เล่ม
จำนวนทั้งหมดที่คุณหาได้นั้นเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนสัญลักษณ์ ○ จำนวน 10 อัน และสัญลักษณ์ | จำนวน 4 อัน
ดังนั้น เราจะได้ $\frac{(10+4)!}{10!4!}=1001$ วิธี

1001 วิธี

① ④ ⊞ ✓ OK ✓ OK

⊞ ① ① ⊞ ✓ OK ✓ OK × ④ ⊞ ✓ OK ✓ OK EXE

✓	14!	▲
10!	× 4!	
		1001

- ③ แก่โจทย์ต่อไปนี้ที่เกี่ยวกับการจัดหมู่ x, y และ z ที่ตรงกับ $x+y+z=20$

- (1) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่ x, y และ z จะเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิจารณาการจัดหมู่สิ่งของซ้ำโดยอนุญาตให้ใช้สิ่งของซ้ำได้ เมื่อคุณเลือกตัวอักษร 20 ตัวจากตัวอักษร 3 ประเภท: x, y และ z

จำนวนทั้งหมดที่คุณหาได้นั้นเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนสัญลักษณ์ ○ จำนวน 20 อัน และสัญลักษณ์ | จำนวน 2 อัน

ดังนั้น เราจะได้ $\frac{(20+2)!}{20!2!}=231$ วิธี

231 วิธี

② ② ⊞ ✓ OK ✓ OK

⊞ ② ① ⊞ ✓ OK ✓ OK × ② ⊞ ✓ OK ✓ OK EXE

✓	22!	▲
20!	× 2!	
		231

- (2) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่ x, y และ z จะเป็นจำนวนนับ

สมมติว่า x, y และ z กระจายทีละ 1 ตัว ให้พิจารณาการจัดหมู่สิ่งของซ้ำสำหรับตัวอักษรที่เหลืออยู่ $20-3=17$ (ตัว)

จำนวนทั้งหมดที่คุณหาได้นั้นเท่ากับการเรียงสับเปลี่ยนสัญลักษณ์ ○ จำนวน 17 อัน และสัญลักษณ์ | จำนวน 2 อัน

ดังนั้น เราจะได้ $\frac{(17+2)!}{17!2!}=171$ วิธี

171 วิธี

① ⑨ ⊞ ✓ OK ✓ OK

⊞ ① ⑦ ⊞ ✓ OK ✓ OK × ② ⊞ ✓ OK ✓ OK EXE

✓	19!	▲
17!	× 2!	
		171

PRACTICE

- ① มีการจัดกลุ่ม 4 กลุ่ม คือ A, B, C และ D โดยเลือกตัวอักษร 25 ตัวแบ่งตามกลุ่ม ซึ่งสามารถใช้ตัวอักษรซ้ำได้ จงหาจำนวนวิธีจำนวนวิธีทั้งหมด เมื่อคุณเลือกตัวอักษรใดก็ได้

- ② มีเค้ก 16 ชิ้น ซึ่งแจกให้นักเรียนจำนวน 6 คน จงหาว่ามีกี่วิธีที่สามารถแจกเค้กดังกล่าวได้ อย่างไรก็ตาม ต้องแจกเค้กอย่างน้อย 1 ชิ้นให้นักเรียนแต่ละคน

- ③ แก้อิทธิพลต่อไปนี้เกี่ยวกับการจัดหมู่ x , y และ z ที่ตรงกับ $x+y+z=35$
 - (1) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่ x , y และ z จะเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

 - (2) มีการจัดหมู่กี่วิธีที่ x , y และ z จะเป็นจำนวนนับ

จำนวนเซตและสมาชิก

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาจำนวนสมาชิกของ $A \cup B$ และ $\bar{A}$

STUDY GUIDE

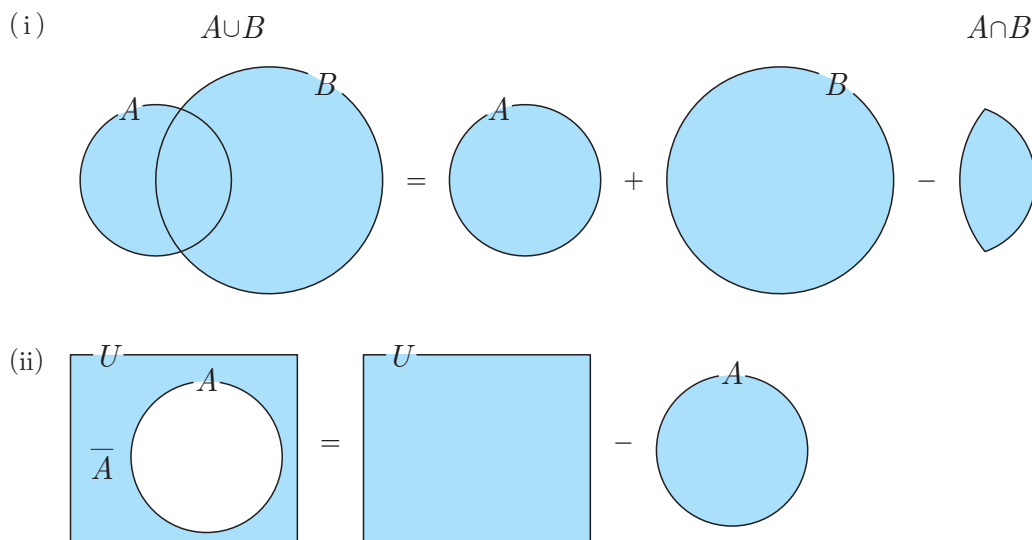
จำนวนสมาชิกในเซตหนึ่งเซต

หากจำนวนสมาชิกในเซต A นั้นเป็นเซตจำกัด แล้ว $n(A)$ แสดงถึงจำนวนสมาชิก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในกรณีที่เซตว่าง $\emptyset$ เนื่องจากเซตนี้ไม่มีสมาชิก $n(\emptyset)=0$

Ex. หาก $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ แล้วสมาชิกคือ $n(A)=6$ ตัว

ความสัมพันธ์ต่อไปนี้จะใช้ได้สำหรับยูเนียนของเซตและคอมพลีเมนต์ของเซต

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ & \text{และถ้า } A \cap B = \emptyset, n(A \cup B) = n(A) + n(B) \\ \text{(ii)} \quad & n(\bar{A}) = n(U) - n(A) \end{aligned}$$



EXERCISE

◆ โดยให้ U เป็นเซตของจำนวนนับที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 30 โดยให้ A เป็นเซตของพหุคูณของ 2 ให้ B เป็นเซตของพหุคูณของ 3 และให้ C เป็นเซตของพหุคูณของ 7 ในกรณีนี้ จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) หา $n(U)$, $n(A)$, $n(B)$ และ $n(C)$

จากจำนวนธรรมชาติที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 30 ซึ่งก็คือ 1, 2, 3, ..., 30 เราจะได้ $n(U)=30$

จาก $A=\{2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots, 2 \times 15\}$ เราจะได้ $n(A)=15$

จาก $B=\{3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, \dots, 3 \times 10\}$ เราจะได้ $n(B)=10$

จาก $C=\{7 \times 1, 7 \times 2, 7 \times 3, 7 \times 4\}$ เราจะได้ $n(C)=4$

$$\underline{n(U)=30, n(A)=15, n(B)=10, n(C)=4}$$

(2) หาจำนวนพหุคูณของ 2 และ 3

เซตของพหุคูณของ 2 และพหุคูณของ 3 จะแสดงในรูป $A \cap B$ ซึ่งเป็นเซตจำนวนนับที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 30 ที่เป็นพหุคูณของ 6

จาก $A \cap B = \{6 \times 1, 6 \times 2, 6 \times 3, 6 \times 4, 6 \times 5\}$ เราจะได้สมาชิก $n(A \cap B) = 5$ ตัว

สมาชิก 5 ตัว

(3) หาจำนวนพหุคูณของ 2 หรือ 3

เซตพหุคูณของ 2 หรือพหุคูณของ 3 จะแสดงในรูป $A \cup B$

สมาชิก $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 10 - 5 = 20$ ตัว

สมาชิก 20 ตัว

(4) หาจำนวนสมาชิกที่หารด้วย 7 ไม่ลงตัว

เซตของจำนวนที่หารด้วย 7 ไม่ลงตัวจะแสดงในรูป $\bar{C}$

$n(\bar{C}) = n(U) - n(C) = 30 - 4 = 26$ ตัว

สมาชิก 26 ตัว

PRACTICE

1 โดยให้ U เป็นเซตของจำนวนนับที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 90 โดยให้ A เป็นเซตของพหุคูณของ 4 โดยให้ B เป็นเซตของพหุคูณของ 5 และโดยให้ C เป็นเซตของพหุคูณของ 11 ในกรณีนี้ จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) หา $n(U)$, $n(A)$, $n(B)$ และ $n(C)$

(2) หาจำนวนพหุคูณของ 4 และ 5

(3) หาจำนวนพหุคูณของ 4 หรือ 5

(4) หาจำนวนสมาชิกที่หารด้วย 11 ไม่ลงตัว

๒ การวิจัยตลาดนั้นดำเนินการกับผลิตภัณฑ์ 2 รุ่น คือ A และ B และรวบรวมคำตอบจากคน 1000 คน เมื่อรวมผลลัพธ์แล้ว มีคน 459 คนซื้อผลิตภัณฑ์ A มีคน 472 คนซื้อผลิตภัณฑ์ B และมีคน 236 คนซื้อผลิตภัณฑ์ทั้ง 2 รุ่น ในกรณีนี้ จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) หาจำนวนคนที่ซื้อผลิตภัณฑ์ A หรือผลิตภัณฑ์ B

(2) หาจำนวนคนที่ไม่ได้ซื้อผลิตภัณฑ์รุ่นใดรุ่นหนึ่งจากผลิตภัณฑ์ 2 รุ่น

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น

เหตุการณ์และความน่าจะเป็น

TARGET

การทำความเข้าใจหลักพื้นฐานของความน่าจะเป็น

STUDY GUIDE

เหตุการณ์และความน่าจะเป็น

การทดลองและเหตุการณ์

การทดลองหรือการสังเกตที่สามารถทำซ้ำได้ภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน เช่น การทอดลูกเต๋า จะเรียกว่า **การทดลอง** ผลการทดลองจะเรียกว่า **เหตุการณ์** ซึ่งมักจะแสดงโดยใช้เซตหนึ่งเซต เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเสมอในการทดลองจะเรียกว่า **เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน** สำหรับการทดลองนั้น ๆ และแสดงด้วยตัวอักษร U

Ex. เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอนในการทดลองทอดลูกเต๋า 1 ลูกคือ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ความน่าจะเป็น

โดยกำหนดให้การทดลอง 1 ครั้ง ซึ่งคาดว่าเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้หลายกรณีใด ๆ จะเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

โดยที่ N คือจำนวนเหตุการณ์ที่น่าจะเป็นทั้งหมด และ a คือจำนวนเหตุการณ์ A ที่เกิดขึ้น

เราจึงกล่าวได้ว่า $\frac{a}{N}$ คือ **ความน่าจะเป็น** ของเหตุการณ์ A ซึ่งเราจะแสดงในรูป $P(A)$

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดของเหตุการณ์ } A \text{ ที่เกิดขึ้น}}{\text{จำนวนกรณีทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้น}} = \frac{a}{N}$$

EXERCISE

- ① ทอดลูกเต๋า 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่จะออก 3 หรือน้อยกว่า

ผลลัพธ์ที่น่าจะเป็นมีทั้งหมด 6 ผลลัพธ์

นอกจากนี้ยังมี 3 วิธี 1, 2 และ 3 ในการทอดลูกเต๋าให้ได้ผลลัพธ์ 3 หรือน้อยกว่า

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

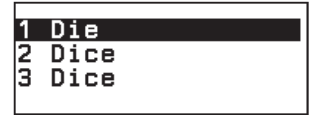
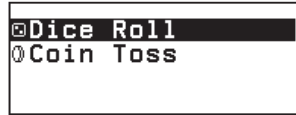
$\frac{1}{2}$



check

ใน Math Box (การคำนวณความน่าจะเป็น) บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ คุณสามารถใช้การจำลองเหตุการณ์ Dice Roll (การทอดลูกเต๋า) หรือ Coin Toss (การโยนเหรียญ) เพื่อตรวจสอบความน่าจะเป็น (ความน่าจะเป็นทางสถิติ) สามารถจำลองเหตุการณ์การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 250 ครั้ง

กด $\odot$ เลือก [Math Box (การคำนวณความน่าจะเป็น)] กด $\odot$ เลือก [Dice Roll (การทอดลูกเต๋า)] กด $\odot$ เลือก [Dice (ลูกเต๋า)] กด $\odot$ เลือก [1 Die (ลูกเต๋า 1 ลูก)] กด $\odot$



เลือก [Attempts (จำนวนครั้งที่ดำเนินการ)] กด $\odot$ หลังจากป้อน 250 (จำนวนครั้งที่ดำเนินการ) แล้ว ให้เลือก [Confirm (ยืนยัน)] แล้วกด $\odot$

เลือก [Same Result (ผลลัพธ์เดียวกัน)] กด $\odot$ เลือก [Off (ปิด)] กด $\odot$

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$ เลือก [Relative Freq (ความถี่สัมพัทธ์)] กด $\odot$



อ่านค่าในตารางเมื่อผลรวมของลูกเต๋าคือ 1, 2 และ 3 แล้วจึงบวกเพิ่มเพื่อที่จะได้ $0.18 + 0.168 + 0.148 = 0.496$ และคุณสามารถยืนยันได้ว่าความน่าจะเป็น

อยู่ที่ประมาณ $0.5 = \frac{1}{2}$

(เมื่อตั้งค่า Same Result (ผลลัพธ์เดียวกัน) เป็น Off (ปิด) ผลลัพธ์ของการทดลองแต่ละครั้งจะแตกต่างกันไป)

Sum	Freq	Rel Fr	Attempts
1	45	0.18	250
2	42	0.168	
3	37	0.148	
4	43	0.172	0.148

- ② โดยกำหนดให้โยนเหรียญ 2 เหรียญพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นของเหรียญ 1 เหรียญที่ออกหัว และเหรียญ 1 เหรียญที่ออกก้อย

พิจารณาการออกหัวและก้อยของเหรียญ 2 เหรียญ

มีทั้งหมด 4 วิธี: (หัว หัว) (หัว ก้อย) (ก้อย หัว) และ (ก้อย ก้อย)

นอกจากนี้ยังมี 2 วิธีที่เหรียญ 1 เหรียญจะออกหัวและเหรียญ 1 เหรียญจะออกก้อย ตามที่แสดงด้านล่าง

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้จำลองเหตุการณ์การโยนเหรียญ 2 เหรียญ 250 ครั้ง

กด $\odot$ เลือก [Math Box (การคำนวณความน่าจะเป็น)] กด $\odot$

เลือก [Coin Toss (การโยนเหรียญ)] กด $\odot$

เลือก [Coins (เหรียญ)] กด $\odot$ เลือก [2 Coins (2 เหรียญ)] กด $\odot$

เลือก [Attempts (จำนวนครั้งที่ดำเนินการ)] กด $\odot$ หลังจากป้อน 250

แล้ว ให้กด [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

เลือก [Same Result (ผลลัพธ์เดียวกัน)] กด $\odot$ เลือก [Off (ปิด)] กด $\odot$

เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$ เลือก [Relative Freq (ความถี่สัมพัทธ์)] กด $\odot$

จากตาราง ค่าของการโยนเหรียญออกหัว 1 ครั้ง [$\bullet \times 1$] คือประมาณ 0.51 และคุณสามารถยืนยันได้ว่าความน่าจะเป็น

อยู่ที่ประมาณ $\frac{1}{2}$



Side	Freq	Rel Fr	Attempts
$\bullet \times 0$	61	0.244	250
$\bullet \times 1$	128	0.512	
$\bullet \times 2$	61	0.244	
			0.512

- 3 ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นของผลรวมของลูกเต๋ามีค่าเท่ากับ 5

พิจารณาผลลัพธ์ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก

จากหลักการคูณ เราจะได้ $6 \times 6 = 36$ วิธี

นอกจากนี้ยังมี 4 วิธีในการหาผลรวมที่เป็น 5 ได้แก่ (1, 4), (2, 3), (3, 2) และ (4, 1)

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{9}$

check

จาก Dice Roll (การทอดลูกเต๋า) ให้เลือก 2 Dice (ลูกเต๋า 2 ลูก) และจำลองเหตุการณ์การทอดลูกเต๋า 2 ลูก 250 ครั้ง
หลังจากการทดลอง ให้เลือก [Relative Freq (ความถี่สัมพัทธ์)] กด OK เลือก [Sum (ผลรวม)] กด OK

จากตาราง ผลรวมของลูกเต๋าทอดได้ผลลัพธ์เป็น 5 คือประมาณ

0.11 และคุณสามารถยืนยันได้ว่าความน่าจะเป็นอยู่ที่ประมาณ $\frac{1}{9}$

Sum	Freq	Rel Fr	Attempts
2	13	0.052	250
3	12	0.048	
4	21	0.084	
5	27	0.108	0.108

PRACTICE

- 1 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่เป็น 5 หรือมากกว่า

- 2 โยนเหรียญ 2 เหรียญพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นของเหรียญ 2 เหรียญที่ออกหัวทั้งคู่

๓ ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(1) ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของลูกเต๋าคือ 9 หรือมากกว่า

(2) ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลลัพธ์เป็นเลขเดียวกัน

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาความน่าจะเป็นโดยใช้แนวคิดในการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

STUDY GUIDE

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ

คุณสามารถใช้แนวคิดต่าง ๆ เช่น การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ เพื่อหาความน่าจะเป็นได้

EXTRA Info.

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

การหาความน่าจะเป็นโดยใช้การเรียงสับเปลี่ยน

Ex. มีไฟ 5 ใบ แต่ละใบมีตัวอักษร 1 ตัว คือ A, B, C, D หรือ E เขียนอยู่บนไฟ โดยเรียงเป็น 1 แถวจากด้านซ้ายไป

ขวาแบบสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่ไฟที่หัวแถวด้านซ้ายเป็น A

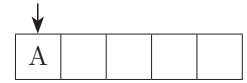
การเรียงไฟ 5 ใบคือการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 5 สิ่ง que เลือกมาจากสิ่งของ 5 สิ่ง

ดังนั้นจึงมี ${}_5P_5$ วิธี

การเรียงตัวอักษร A ที่หัวแถวด้านซ้ายคือการเรียงสับเปลี่ยนที่กำหนดให้ A อยู่คงที่ที่หัวแถวด้านซ้าย และเลือกสิ่งของ 4 สิ่งจากสิ่งของที่เหลืออยู่ 4 ดังนั้นจึงมี ${}_4P_4$ วิธี

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } \frac{{}_4P_4}{{}_5P_5} = \frac{4!}{5!} = \frac{4!}{5 \cdot 4!} = \frac{1}{5}$$

กำหนดไว้คงที่



เรียง 4 สิ่งที่เหลืออยู่

การหาความน่าจะเป็นโดยใช้การจัดหมู่

Ex. มีไฟ 5 ใบ แต่ละใบมีตัวอักษร 1 ตัว คือ A, B, C, D หรือ E เขียนอยู่บนไฟ จากการสุ่มแจกวไฟ 3 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ไฟ 1 ใบจะเป็น A

การเลือกไฟ 3 ใบจาก 5 ใบคือการจัดหมู่สิ่งของ 3 สิ่ง que เลือกมาจาก

สิ่งของ 5 สิ่ง ดังนั้นจึงมี ${}_5C_3$ วิธี

การเลือกที่มีตัวอักษร A บนไฟ 3 ใบคือการจัดหมู่สิ่งของ 2 สิ่ง que เลือกมาจากสิ่งของที่เหลืออยู่ 4 สิ่ง เนื่องจากเลือก A ออกไปแล้ว ดังนั้นจึงมี ${}_4C_2$ วิธี

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } \frac{{}_4C_2}{{}_5C_3} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3}{5}$$

พิจารณาเป็นไฟที่แจกแล้ว



เลือก 2 สิ่งจาก 4 สิ่งที่เหลืออยู่

EXERCISE

- ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ $\frac{{}_4P_4}{{}_6P_6} = \frac{4!}{6!} = \frac{4!}{6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{1}{30}$

$$\frac{1}{30}$$


④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

$$\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$$

- ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ $\frac{{}^7C_2 \times {}^5C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot 5}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot 5 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{21}{44}$

$$\frac{21}{44}$$

 7   OK    OK 2  X 5    OK     OK 1
 1 2   OK     OK 3 EXE

$$\frac{7C2 \times 5C1}{12C3} = \frac{21}{44}$$

PRACTICE

① มีเด็ก 5 คนและผู้ใหญ่ 2 คนเรียงกันเป็นเส้นตรงจงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(1) ความน่าจะเป็นที่ผู้ใหญ่ 2 คนจะได้อยู่ติดกัน

(2) ความน่าจะเป็นที่ผู้ใหญ่ 2 คนจะได้อยู่ที่หัวแถวและท้ายแถว

② มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง 8 ลูกและลูกบอลสีขาว 6 ลูก โดยกำหนดให้เลือกลูกบอล 4 ลูก ออกจากถุงพร้อม ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอลที่เลือกออกมานั้นจะเป็นลูกบอลสีแดง 2 ลูกและลูกบอลสีขาว 2 ลูก

สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น (1)

TARGET

การทำความเข้าใจเกี่ยวกับเหตุการณ์ที่ซ้ำกัน เหตุการณ์ที่รวมกัน และเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน

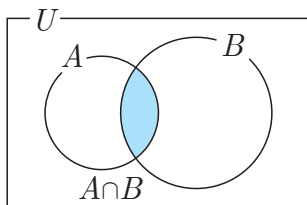
STUDY GUIDE

เหตุการณ์ที่ซ้ำกัน เหตุการณ์ที่รวมกัน เหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน

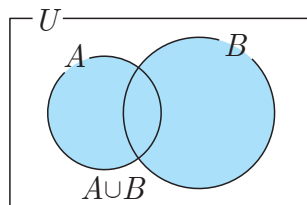
เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน U ที่รวมเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ คือเหตุการณ์ A และ B มีเหตุการณ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

- เหตุการณ์ที่ทั้ง A และ B เกิดขึ้น จะเรียกว่า **เหตุการณ์ที่ซ้ำกัน** และแสดงในรูป $A \cap B$
- เหตุการณ์ที่มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์จาก A หรือ B เกิดขึ้น จะเรียกว่า **เหตุการณ์ที่รวมกัน** และแสดงในรูป $A \cup B$
- ในกรณีที่ A และ B ไม่ได้เกิดขึ้นพร้อมกัน เรากล่าวได้ว่า A และ B เป็น **เหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน** ซึ่งจะแสดงในรูป $A \cap B = \emptyset$

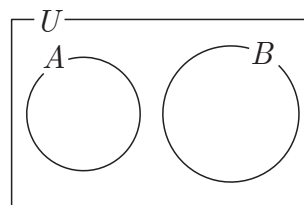
เหตุการณ์ที่ระบุโดยเซตว่าง $\emptyset$ จะเรียกว่า **ไม่มีเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น**



เหตุการณ์ที่ซ้ำกัน



เหตุการณ์ที่รวมกัน



เหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน

EXERCISE

- 1 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก แล้วได้ผลลัพธ์เป็น 4 หรือมากกว่าคือเหตุการณ์ A และผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนคู่คือเหตุการณ์ B ในกรณีนี้ ให้แสดงเหตุการณ์ต่อไปนี้เป็นเซต

(1) $A \cap B$

แต่ละเหตุการณ์แสดงเป็นเซตหนึ่งเซต: $A = \{4, 5, 6\}$ และ $B = \{2, 4, 6\}$

สมาชิกร่วมของ A และ B คือสมาชิก $A \cap B$ ดังนั้น $A \cap B = \{4, 6\}$

$$\underline{A \cap B = \{4, 6\}}$$

(2) $A \cup B$

สมาชิกทั้งหมดใน A และ B คือสมาชิก $A \cup B$ ทั้งหมด ดังนั้นจึงเป็น $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

$$\underline{A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}}$$

- ๒ ทอดลูกเต๋า 1 ลูก แล้วผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่คือเหตุการณ์ A ผลลัพธ์เป็นจำนวนคี่คือเหตุการณ์ B ผลลัพธ์เป็น 3 หรือน้อยกว่าคือเหตุการณ์ C และผลลัพธ์เป็น 4 หรือมากกว่าคือเหตุการณ์ D ในกรณีนี้ จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) สำหรับเซตทั้งหมด ให้แสดงเหตุการณ์ที่ซ้ำกันสำหรับแต่ละเหตุการณ์จาก 2 เหตุการณ์

แต่ละเหตุการณ์แสดงเป็นเซตหนึ่งเซต: $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $C=\{1, 2, 3\}$, $D=\{4, 5, 6\}$

A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น $A \cap B = \emptyset$

A และ C มี 2 เป็นสมาชิกร่วมกัน ดังนั้นจึงเป็น $A \cap C = \{2\}$

A และ D มี 4 และ 6 เป็นสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น $A \cap D = \{4, 6\}$

B และ C มี 1 และ 3 เป็นสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น $B \cap C = \{1, 3\}$

B และ D มี 5 เป็นสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น $B \cap D = \{5\}$

C และ D ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น $C \cap D = \emptyset$

$$\underline{A \cap B = \emptyset, A \cap C = \{2\}, A \cap D = \{4, 6\}, B \cap C = \{1, 3\}, B \cap D = \{5\}, C \cap D = \emptyset}$$

(2) จงอธิบายความหมายของเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน

เหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน คือไม่มีเหตุการณ์ใดที่เกิดขึ้นซ้ำกัน ดังนั้น A กับ B และ C กับ D เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน

A กับ B และ C กับ D

PRACTICE

- ๑ ไฟ 1 ใบถูกเลือกมาจากไฟ 15 ใบ บนไฟแต่ละใบเขียนตัวเลขหนึ่งตัว ตั้งแต่ 1 ถึง 15 กำหนดให้เหตุการณ์ A คือผลลัพธ์ของพหุคูณของ 2 และ B คือผลลัพธ์ของพหุคูณของ 3 ให้แสดงเหตุการณ์ต่อไปนี้เป็นเซต

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

- ๒ ไฟ 1 ใบถูกเลือกมาจาก 1 สำหรับที่มีไฟ 52 ใบ (ไม่มีไฟโวลท์เจอร์) จากเหตุการณ์ $A - D$ ต่อไปนี้ จงหาเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน กำหนดให้ไฟรูปคนคือไฟ J , Q และ K

$A...$ ได้ไฟรูปคน $B...$ ได้ไฟ A โฟแดง

$C...$ ได้ไฟ Q $D...$ ได้ไฟเลข 10 หรือน้อยกว่า

สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น (2)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่างน้อย 1 จาก 2 เหตุการณ์

STUDY GUIDE

สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น

เมื่อเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน U รวมเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ คือเหตุการณ์ A และ B แล้วความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เหล่านั้นเกิดขึ้นคือ $P(U)$, $P(A)$ หรือ $P(B)$ มีสมบัติต่าง ๆ ดังนี้

- (i) สำหรับเหตุการณ์ A ใด ๆ จะได้ $0 \leq P(A) \leq 1$
- (ii) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน U คือ $P(U) = 1$
ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ไม่เกิดขึ้นแน่นอน $\emptyset$ คือ $P(\emptyset) = 0$
- (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (iv) เมื่อ A และ B มีเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน แล้ว
 $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ ดังนั้นจะได้ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

โดยเฉพาะ (iv) จะเรียกว่า**ทฤษฎีบทการบวก**ของความน่าจะเป็น

EXERCISE

- 1 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่เป็นพหุคูณของ 3 หรือเป็นจำนวนคี่ โดยกำหนดให้ผลลัพธ์ที่เป็นพหุคูณของ 3 คือเหตุการณ์ A และผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนคี่คือเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ที่ซ้ำกัน $A \cap B$ คือผลลัพธ์ที่เป็นพหุคูณของ 3 เหตุการณ์และจำนวนคี่ แต่ละเหตุการณ์แสดงเป็นเซตได้ ดังนี้: $A = \{3, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$

ดังนั้น $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่รวมกัน $A \cup B$ ซึ่งมีผลลัพธ์เป็นพหุคูณของ 3 หรือจำนวนคี่ คือ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$

- ๒ มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง 7 ลูกและลูกบอลสีน้ำเงิน 5 ลูก โดยกำหนดให้เลือกลูกบอล 2 ลูก ออกจากถุงพร้อม ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอล 2 ลูกนั้นถูกเลือกออกมาเป็นสีเดียวกัน เหตุการณ์ที่ลูกบอล 2 ลูกที่เลือกออกมามีสีเดียวกันคือเหตุการณ์ที่รวมกัน ($A \cup B$) ของเหตุการณ์ A ที่ลูกบอล 2 ลูกเป็นสีแดง และเหตุการณ์ B ที่ลูกบอล 2 ลูกเป็นสีน้ำเงิน ลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีน้ำเงินรวมกันเป็น 12 ลูก โดยเลือกลูกบอล 2 ลูกออกแล้ว ดังนั้นมี ${}_{12}C_2$ วิธีสามารถเลือกลูกบอลสีแดง 2 ลูกออกมาได้ ${}_{7}C_2$ วิธี สามารถเลือกลูกบอลสีน้ำเงิน 2 ลูกออกมาได้ ${}_{5}C_2$ วิธี จากทฤษฎีบทการบวกของความน่าจะเป็น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่รวมกัน $A \cup B$ ของเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน A และ B คือ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}^7C_2}{{}^{12}C_2} + \frac{{}^5C_2}{{}^{12}C_2} = \frac{\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}}{\frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1}} + \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}}{\frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1}} = \frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 11} + \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} = \frac{31}{66}$$

$$\frac{31}{66}$$

PRACTICE

- ① มีไฟ 25 ใบ บนไฟแต่ละใบเขียนตัวเลขหนึ่งตัว ตั้งแต่ 1 ถึง 25 หาความน่าจะเป็นต่อไปนี้เมื่อแจกไฟ
- (1) ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนคี่หรือพหุคูณของ 5 เมื่อแจกไฟ 1 ใบ

- (2) ความน่าจะเป็นที่ไฟทั้งสองใบจะเป็นจำนวนคี่หรือไฟทั้งสองจะเป็นจำนวนคู่เมื่อแจกไฟ 2 ใบ

- ๒ มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง ๑ ลูกและลูกบอลสีน้ำเงิน ๗ ลูก ให้เลือกลูกบอล ๓ ลูกออกจากถุงพร้อม ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอล ๓ ลูกนั้นถูกเลือกออกมาเป็นสีเดียวกัน

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น

สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น (3)

TARGET

การทำความเข้าใจความน่าจะเป็นที่บางเหตุการณ์จะไม่เกิดขึ้น

STUDY GUIDE

คอมพลิเมนต์ของเหตุการณ์

สำหรับเหตุการณ์ A ซึ่งอยู่ในเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน U และเหตุการณ์ที่ " A ไม่เกิดขึ้น" จะเรียกว่า **คอมพลิเมนต์ของเซต A** และแสดงในรูป $\bar{A}$ คอมพลิเมนต์ของเหตุการณ์ $\bar{A}$ ไม่มีเหตุการณ์ใด ๆ ร่วมกับเหตุการณ์ A ดังนั้นจึงเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน ดังนั้น เราจะได้ $A \cap \bar{A} = \emptyset$ นอกจากนี้ เนื่องจาก A และ $\bar{A}$ คือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน เราจึงมี $A \cup \bar{A} = U$

สำหรับ $P(A \cup \bar{A}) = P(U)$ แล้วจาก $P(U) = 1$ และ $P(A \cap \bar{A}) = 0$ เราจะได้ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
จากจุดนี้ เราสามารถหาความน่าจะเป็นที่ " A ไม่เกิดขึ้น ($\bar{A}$)" ได้โดยใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

EXERCISE



- 1 มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง 7 ลูกและลูกบอลสีขาว 6 ลูก โดยกำหนดให้เลือกลูกบอล 3 ลูกออกจากถุงพร้อม ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

- (1) ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลทั้ง 3 ลูกจะเป็นสีแดง

ลูกบอลสีแดงและลูกบอลสีขาวรวมกันเป็น 13 ลูก โดยเลือกลูกบอล 3 ลูกออกแล้ว ดังนั้นมี ${}_{13}C_3$ วิธี

ในจำนวนเหล่านี้ จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่ลูกบอลทั้ง 3 ลูกจะเป็นลูกบอลสีแดง โดยเลือกลูกบอลสีแดง 3 ลูกออกจากลูกบอลสีแดง 7 ลูก มี ${}_{7}C_3$ วิธี

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } \frac{{}_{7}C_3}{{}_{13}C_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{35}{286}$$

$$\frac{35}{286}$$

(7) (OK) (V) (V) (V) (OK) (3) (V) (1) (3) (OK) (V) (V) (V) (OK) (3) (EXE)

$\sqrt{\square}$	$\blacktriangle$
7C3	
13C3	
	35
	286

- (2) ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลอย่างน้อย 1 ลูกจะเป็นสีขาว

เหตุการณ์หนึ่งที่ "ลูกบอลอย่างน้อย 1 ลูกเป็นสีขาว" คือเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ $\bar{A}$ ของ A ซึ่ง "ลูกบอลทั้ง 3 ลูกเป็นสีแดง"

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{35}{286} = \frac{251}{286}$$

$$\frac{251}{286}$$

(1) (−) (Ans) (EXE)

$\sqrt{\square}$	$\blacktriangle$
1-Ans	
	251
	286

๒ มีฉลาก 40 ใบ โดยรวมฉลากที่ชนะรางวัล 5 ใบ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้อย่างน้อย 4 คนจับฉลากพร้อมกันคนละ 1 ใบ

(1) ความน่าจะเป็นของคนทั้งหมด 4 คนที่ไม่ได้รางวัล

(2) ความน่าจะเป็นของคนอย่างน้อย 1 คนที่ได้รับรางวัล

ความน่าจะเป็นของการทดลองอิสระ

TARGET

การทำความเข้าใจความน่าจะเป็นเมื่อมีการทดลองหลายแบบที่ไม่ส่งผลต่อกัน

STUDY GUIDE

ความน่าจะเป็นของการทดลองอิสระ

กล่าวได้ว่าการทดลอง 2 ครั้งเป็น**การทดลองอิสระ** หากผลลัพธ์ของการทดลองนั้นไม่ส่งผลต่อกัน โดยกำหนดให้การทดลอง 2 ครั้ง T_1 และ T_2 เป็นการทดลองอิสระ โดยที่ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นใน T_1 คือ $P(A)$ และความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B จะเกิดขึ้นใน T_2 คือ $P(B)$ แล้วเราสามารถหาความน่าจะเป็น p ของ A และ B ที่จะเกิดขึ้นได้ดังต่อไปนี้

$$p = P(A) \times P(B)$$

วิธีเดียวกันนี้ยังสามารถใช้ได้เมื่อมีการทดลองอิสระ 3 ครั้งขึ้นไป

EXERCISE

- ① โดยกำหนดให้ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้งต่อเนื่องกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จากการทอดทั้ง 2 ครั้งจะเป็น 1 เมื่อผลลัพธ์จากการทดลองครั้งที่ 1 และผลลัพธ์จากการทดลองครั้งที่ 2 เป็นอิสระเนื่องจากไม่ส่งผลต่อกัน

โดยกำหนดให้ A และ B คือเหตุการณ์ที่ผลลัพธ์ครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2 คือ 1 เหตุการณ์ตามลำดับ A และ B แล้ว

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ และ } P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$\frac{1}{36}$

- ② โดยกำหนดให้โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้งต่อเนื่องกัน จงหาความน่าจะเป็นที่การโยนเหรียญครั้งที่ 1 จะออกหัว และครั้งที่ 2 จะออกก้อย และครั้งที่ 3 จะออกหัว
การโยนเหรียญครั้งที่ 1 ครั้งที่ 2 และครั้งที่ 3 เป็นอิสระเนื่องจากไม่ส่งผลต่อกัน

โดยกำหนดให้ A , B และ C คือเหตุการณ์ที่การโยนเหรียญครั้งที่ 1 จะเป็นหัว ครั้งที่ 2 จะเป็นก้อย และครั้งที่ 3 จะเป็นหัวตามลำดับ แล้ว $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ และ $P(C) = \frac{1}{2}$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$\frac{1}{8}$

- ③ แจกไพ่ 1 ใบจาก 1 สำรับที่มีไฟ 52 ใบ แล้วจึงทอดลูกเต๋า 1 ลูก ในกรณีนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่จะเป็นโพแดง และลูกเต๋าทอดจะเป็นจำนวนคี่
การแจกไพ่ 1 ใบและการทอดลูกเต๋า 1 ครั้งนั้นเป็นอิสระ เนื่องจากไม่มีผลต่อกัน

โดยกำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ชุดไพ่ดอกเดียวกันเป็นโพแดงและทอดลูกเต๋ได้จำนวนคี่ตามลำดับ แล้ว

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ และ } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$\frac{1}{8}$

- 4 มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง 6 ลูกและลูกบอลสีขาว 4 ลูก เลือกลูกบอล 1 ลูก ออกจากถุง แล้วจึงใส่กลับเข้าไปในถุง จากนั้นเลือกลูกบอลออกมาอีก 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(1) ความน่าจะเป็นที่ครั้งที่ 1 จะเป็นลูกบอลสีแดง และครั้งที่ 2 จะเป็นลูกบอลสีขาว

การเลือกลูกบอล 1 ลูก และการเลือกลูกบอลออกมาอีก 1 ลูกนั้นเป็นอิสระ เนื่องจากไม่มีผลต่อกัน

โดยกำหนดให้ A และ B คือเหตุการณ์ที่การเลือกครั้งที่ 1 เป็นลูกบอลสีแดง และครั้งที่ 2 เป็นลูกบอลสีขาวตามลำดับ

$$\text{แล้ว } P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ และ } P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

$$\frac{6}{25}$$

(2) ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลสีแดงด้วยกันจะถูกเลือกออกมา 2 ครั้ง

มี 2 วิธีสำหรับเหตุการณ์ที่ลูกบอลสีแดงด้วยกันจะถูกเลือกออกมา

(i) เหตุการณ์ที่ลูกบอลสีแดงถูกเลือกออกมา 2 ครั้ง

(ii) เหตุการณ์ที่ลูกบอลสีขาวถูกเลือกออกมา 2 ครั้ง

$$\text{ความน่าจะเป็นของ (i) ครั้งที่ 1 เป็นลูกบอลสีแดง และครั้งที่ 2 เป็นลูกบอลสีแดง คือ } \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$$

$$\text{ความน่าจะเป็นของ (ii) ครั้งที่ 1 เป็นลูกบอลสีขาว และครั้งที่ 2 เป็นลูกบอลสีขาว คือ } \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$

เนื่องจาก (i) และ (ii) ไม่สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้และเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน ความน่าจะเป็นที่เราหาได้

$$\text{คือ } \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$$

$$\frac{13}{25}$$

PRACTICE

- 1 โดยกำหนดให้ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 3 ครั้งต่อเนื่องกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จากการทอดทั้ง 3 ครั้งจะเป็นพหุคูณของ 3

- 2 โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้งต่อเนื่องกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะเป็นหัว 2 ครั้ง และก้อย 1 ครั้ง

3 แจกไฟ 1 ใบจาก 1 สำหรับที่มีไฟ 52 ใบ แล้วจึงทอดลูกเต๋า 1 ลูก ในกรณีนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่ไฟจะเป็นข้าวหลามตัดและลูกเต๋าทอดจะเป็นเลข 2 หรือน้อยกว่า

4 ถัง A มีลูกบอลสีแดง 5 ลูกและลูกบอลสีขาว 3 ลูก และถัง B มีลูกบอลสีแดง 2 ลูกและลูกบอลสีขาว 4 ลูก โดยกำหนดให้เลือกลูกบอล 1 ลูกจากแต่ละถัง A และ B จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอลสีแดงทั้งคู่จะถูกเลือกออกมา

ความน่าจะเป็นของการทดลองซ้ำ (1)

TARGET

การทำความเข้าใจความน่าจะเป็นเมื่อการทดลองอิสระเกิดขึ้นซ้ำ

STUDY GUIDE

การทดลองซ้ำ

เมื่อการทดลองเดียวกันเกิดขึ้นซ้ำภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน และแต่ละการทดลองเป็นอิสระจากกัน การทดลองชุดนั้นจะเรียกว่า **การทดลองซ้ำ** โดยกำหนดให้ความน่าจะเป็น p ที่เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นในการทดลองครั้งที่ 1 และเกิดขึ้นซ้ำในการทดลอง n ครั้ง แล้วเราสามารถหาความน่าจะเป็นที่ A จะเกิดขึ้น r ครั้งได้ดังต่อไปนี้

$${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

Ex. โดยกำหนดให้ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 5 ครั้งต่อเนื่องกัน ให้พิจารณาความน่าจะเป็นของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก

โดยทำสัญลักษณ์ ○ ทุกครั้งที่ผลลัพธ์เป็น 1 และทำสัญลักษณ์ × ทุกครั้งที่ผลลัพธ์ไม่ใช่ 1 แสดงในตารางด้านขวา

สำหรับจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด พิจารณาจากตารางในแต่ละแถวจะได้ว่า ปรากฏสัญลักษณ์ ○ จำนวน 2 ตัว และ × จำนวน 3 ตัวนั้นเรียงกัน จึงกล่าวได้ว่า จำนวนทั้งหมดในการจัดหมู่สัญลักษณ์ ○ จำนวน 2 ตัว ออกจากการดำเนินการ 5 ครั้งมี ${}_5C_2$ วิธี

ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
○	○	×	×	×
○	×	○	×	×
○	×	×	○	×
○	×	×	×	○
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

แล้วกำหนดให้ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะเป็น 1 คือ $\frac{1}{6}$ และความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะไม่ใช่ 1 คือคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ ดังนั้นจึงเป็น $1 - \frac{1}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของบรรทัดที่ 1 ในตารางคือ $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3$

ในการทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นของ ${}_5C_2$ วิธีอื่น ๆ จะเหมือนกันทั้งหมด

ทุกกรณีของ ${}_5C_2$ วิธีนั้นไม่เกี่ยวข้องกัน ดังนั้นเราจึงสามารถหาผลรวมของความน่าจะเป็นเหล่านี้ได้

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ ${}_5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}$

$${}_5C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}$$

EXERCISE

1 โยนเหรียญ 1 เหรียญ 6 ครั้งต่อเนื่องกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะขึ้นหน้าหัว 4 ครั้ง

โยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะขึ้นหน้าหัวคือ $\frac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ ${}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = {}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$

$$\frac{15}{64}$$

6 4 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

× () 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

$${}_6C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

๒ ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 4 ครั้งต่อเนื่องกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะเป็น 5 หรือมากกว่าในการทอด 2 ครั้ง

ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะเป็น 5 หรือมากกว่าคือ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ ${}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$

$\frac{8}{27}$

④ Ⓜ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK ②

✕ (1 = 3 >) $\frac{1}{3}$ ✕ (2 = 3 >) $\frac{2}{3}$ EXE

$$4C2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

๓ มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง 6 ลูกและลูกบอลสีขาว 4 ลูก หยิบลูกบอล 1 ลูกออกจากถุง เมื่อตรวจสอบสีแล้วจึงใส่ลูกบอลกลับเข้าถุง เมื่อทำการหยิบลูกบอล 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะเป็นลูกบอลสีขาว 3 ลูก

หยิบลูกบอล 1 ลูกออกจากถุง ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะเป็นลูกบอลสีขาวคือ $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ ${}_5C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 = {}_5C_2 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{144}{625}$

$\frac{144}{625}$

⑤ Ⓜ ✓ OK ✓ ✓ ✓ OK ③

✕ (2 = 5 >) $\frac{2}{5}$ ✕ (3 = 5 >) $\frac{3}{5}$ EXE

$$5C3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{144}{625}$$

PRACTICE

- ① โยนเหรียญ 1 เหรียญ 5 ครั้งต่อเนื่องกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะขึ้นหน้าหัว 3 ครั้ง
- ② ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 6 ครั้งต่อเนื่องกัน 4 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะเป็น 3 หรือมากกว่า
- ③ มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง 8 ลูกและลูกบอลสีขาว 12 ลูก หยิบลูกบอล 1 ลูกออกจากถุง เมื่อตรวจสอบสีแล้วจึงใส่ลูกบอลกลับเข้าถุง เมื่อทำการหยิบลูกบอล 7 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะเป็นลูกบอลสีขาว 4 ลูก

ความน่าจะเป็นของการทดลองซ้ำ (2)

TARGET การทำความเข้าใจโจทย์โดยใช้การทดลองซ้ำ

STUDY GUIDE

การทดลองซ้ำ

พิจารณาโจทย์ที่มีการลดคะแนนหรือเพิ่มคะแนนตามผลลัพธ์จากการโยนเหรียญหรือทอดลูกเต๋า โดยที่ x คือจำนวนครั้งในการออกหัวหรือก้อย หรือจำนวนครั้งที่ปรากฏแต้มแต่ละแต้มที่ขึ้นบนหน้าลูกเต๋า และกราฟของแต้มหรือคะแนนรวมแสดงโดยใช้ตัวอักษร x

Ex มีจุด P ที่จุดกำเนิดของเส้นจำนวน โยนเหรียญแล้วเลื่อนจุด 2

ไปทางขวาสำหรับการโยนที่ออกหัว และเลื่อน 1 จุดไปทางซ้าย

สำหรับการโยนที่ออกก้อย พิจารณาความน่าจะเป็นที่จุด P จะกลับ

ไปที่จุดกำเนิดหลังจากโยนเหรียญ 6 ครั้ง

เราสามารถกำหนดสมการต่อไปสำหรับ x โดยสมมติว่าจุด P กลับไปที่

ตำแหน่งจุดกำเนิด O หากผลเป็นหัว x ครั้งเมื่อโยนเหรียญ 6 ครั้ง

$$(2)(x) + (-1)(6-x) = 0$$

โดยการแก้โจทย์นี้ เราจะได้ $x=2$

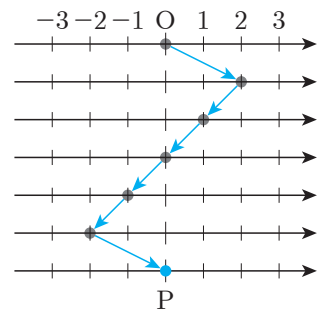
ดังนั้น เราจะเห็นว่าจุด P กลับสู่จุดกำเนิดหากผลเป็นหัว 2 ครั้งภายในการทดลองซ้ำ 6 ครั้ง

นอกจากนี้สำหรับการโยนเหรียญ 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวคือ $\frac{1}{2}$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } {}^6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$



เลือก 1 ไปทางซ้าย เลือก 2 ไปทางขวา



จุด P กลับไปที่จุดกำเนิดหากการโยนเหรียญออกหัวปรากฏขึ้น 2 ครั้งและก้อย 4 ครั้งภายในการทดลองซ้ำ 6 ครั้ง



proof

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชัน Math Box (การคำนวณความน่าจะเป็น)

เพื่อตรวจสอบความน่าจะเป็นทางสถิติ

กด $\odot$ เลือก [Math Box (การคำนวณความน่าจะเป็น)] กด $\odot$

เลือก [Coin Toss (การโยนเหรียญ)] กด $\odot$

จำลองเหตุการณ์การโยนเหรียญ 1 เหรียญ 6 ครั้ง

จำนวนครั้งที่ออกหัว ● และก้อย ○ ที่ปรากฏเมื่อโยนเหรียญ 6 ครั้งจะแสดงผลตามลำดับ

ในหน้าจอแสดงผล ให้กด $\odot$ $\odot$ เพื่อจำลองเหตุการณ์ที่คล้ายกันซ้ำอีกครั้งและนับจำนวนครั้งสำหรับการจัดหมู่แต่ละวิธี

หากการทดลอง 64 ครั้งในการโยนเหรียญ 6 ครั้งเสร็จสิ้นแล้ว ตามทฤษฎีแล้ว ผลที่ออกหัว 2 ครั้ง ● และก้อย 4 ครั้ง

○ ควรปรากฏขึ้น 15 ครั้ง

Coins	:1	▶
Attempts	:6	▶
Same Result	:Off▶	
Execute		

Side	Freq	Rel Fr	Attempts
●	5	0.78333	6
○	1	0.1666	
0.8333333333			

Side	Freq	Rel Fr	Attempts
●	4	0.6666	6
○	2	0.3333	
0.6666666667			

Side	Freq	Rel Fr	Attempts
●	3	0.5	6
○	3	0.5	
0.5			

Side	Freq	Rel Fr	Attempts
●	2	0.3333	6
○	4	0.6666	
0.3333333333			

ป้อนข้อมูลในตารางด้านล่างตามผลการจำลองเหตุการณ์ 64 ครั้ง อย่างไรก็ตาม คุณสามารถทำการทดลองนี้ได้โดยร่วมมือกับคนหลาย ๆ คน

จำนวนครั้งที่ออกก้อย ● และหัว ○	0, 6	1, 5	2, 4	3, 3	4, 2	5, 1	6, 0
ค่าเชิงทฤษฎีสำหรับแต่ละครั้ง (ครั้ง)	1	6	15	20	15	6	1
ผลการทดลองจากเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ (ครั้ง)							

EXERCISE

- ◆ มีจุด P ที่จุดกำเนิดของเส้นจำนวน ทอดลูกเต๋า 1 ลูกแล้วเลื่อน 3 จุด ไปทางขวาสำหรับจำนวนคี่ หรือ 1 จุด ไปทางซ้ายสำหรับจำนวนคู่ ในกรณีนี้ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(1) โดยกำหนดให้ทอดลูกเต๋า 12 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จุด P จะกลับไปจุดกำเนิด

หากทอดลูกเต๋า 12 ครั้ง และเรากำหนดให้จำนวนผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนคี่คือ x แล้วจำนวนผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนคู่คือ $(12-x)$

เนื่องจากตำแหน่งของจุด P คือจุดกำเนิดในกรณีนี้ แล้ว $3x+(-1)(12-x)=0$ ซึ่งเราสามารถแก้โจทย์ได้เป็น $x=3$ ดังนั้น จุด P จึงอยู่ที่จุดกำเนิดหากผลลัพธ์เป็นจำนวนคี่ปรากฏขึ้น 3 ครั้งภายในการทดลองซ้ำ 12 ครั้ง

นอกจากนี้ สำหรับการทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนคี่คือ $\frac{1}{2}$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } {}_{12}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1-\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{55}{1024}$$

$$\frac{55}{1024}$$

check

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

① ② $\odot$ $\vee$ OK $\vee$ $\vee$ $\vee$ OK ③ $\times$ ① ① $\frac{1}{2}$ ② $>$ ① $\frac{1}{2}$ ① ② EXE

$${}_{12}C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$\frac{55}{1024}$$

(2) โดยกำหนดให้ทอดลูกเต๋า 10 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จุด P จะอยู่ที่ตำแหน่ง +6

หากทอดลูกเต๋า 10 ครั้ง และเรากำหนดให้จำนวนผลลัพธ์ที่เป็นเลขคี่คือ y แล้วจำนวนผลลัพธ์ที่เป็นเลขคู่คือ $(10-y)$

เนื่องจากตำแหน่งของ P คือ +6 ในกรณีนี้ แล้ว $3y+(-1)(10-y)=6$ ซึ่งเราสามารถแก้โจทย์ได้เป็น $y=4$

ดังนั้น จุด P จึงอยู่ที่ตำแหน่ง +6 หากผลลัพธ์ที่เป็นเลขคี่ปรากฏขึ้น 4 ครั้งภายในการทดลองซ้ำ 10 ครั้ง

นอกจากนี้ สำหรับการทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่เป็นเลขคี่คือ $\frac{1}{2}$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{512}$$

$$\frac{105}{512}$$

① ① $\odot$ $\vee$ OK $\vee$ $\vee$ $\vee$ OK ④ $\times$ ① ① $\frac{1}{2}$ ② $>$ ① $\frac{1}{2}$ ① ① EXE

$${}_{10}C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\frac{105}{512}$$

PRACTICE

- ◆ เล่นเกมโดยการทอดลูกเต๋า 1 ลูก เมื่อทอดได้ผลลัพธ์ 5 แต้มหรือมากกว่า จะได้รับ 4 คะแนน และผลลัพธ์อื่น ๆ จะได้รับ 2 คะแนน จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(1) ทอดลูกเต๋า 6 ครั้ง ความน่าจะเป็นของคะแนนคือ 20 คะแนนพอดี

(2) ทอดลูกเต๋า 5 ครั้ง ความน่าจะเป็นของคะแนนคือ 16 คะแนนพอดี

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

TARGET

การทำความเข้าใจความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

STUDY GUIDE

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

สำหรับ 2 เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B จะเกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้น จะเรียกว่า **ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข** ที่ B จะเกิดขึ้นเมื่อ A เกิดขึ้น และแสดงในรูป $P_A(B)$ $P_A(B)$ คือความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B จะเกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้น ซึ่งเราสามารถหาคำตอบได้ดังต่อไปนี้

$$P_A(B) = \frac{\text{(จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดของเหตุการณ์ } A \text{ และ } B \text{ จะเกิดขึ้นพร้อมกัน)}}{\text{(จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดของเหตุการณ์ } A \text{ ที่เกิดขึ้น)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

โดยให้จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดในเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน U เป็น $n(U)$ โดยใช้ $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$ และ $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$ เราจะได้ $P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B) \times n(U)}{P(A) \times n(U)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ดังนั้นเราสามารถแสดงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขได้ดังต่อไปนี้

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

โดยการลบตัวส่วนของสมการนี้ เราจะได้สูตรต่อไปนี้

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

นิพจน์เชิงสัมพัทธ์นี้ใช้เพื่อหาความน่าจะเป็นที่ A และ B จะเกิดขึ้นพร้อมกัน $P(A \cap B)$ ซึ่งเราเรียกว่า

ทฤษฎีบทการคูณของความน่าจะเป็น

Ex. มีลูกบอลสีแดง 4 ลูกอยู่ในถุง และบนลูกบอลแต่ละลูกเขียนตัวเลข 1, 2, 3 หรือ 4 นอกจากนี้ยังมีลูกบอลสีขาว 5 ลูก และบนลูกบอลแต่ละลูกเขียนตัวเลข 5, 6, 7, 8 หรือ 9 หากคุณเลือกลูกบอล 1 ลูกออกจากถุง จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ลูกบอลจะเป็นสีแดงและมีจำนวนคู่เขียนอยู่บนลูกบอลดังกล่าว เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน U มี 9 วิธีในการเลือกลูกบอลหนึ่งลูก ดังนั้นจึงเป็น $n(U)=9$ โดยกำหนดให้ A คือเหตุการณ์ที่ลูกบอลสีแดงถูกเลือกออกมา และ B คือเหตุการณ์ที่ลูกบอลมีเลขคู่ แล้ว $n(A)=4$ และ $n(A \cap B)=2$

$$\text{ดังนั้น } P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{9} \text{ และ } P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{2}{9}$$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$$

EXERCISE

- ① มีลูกบอลสีแดง 5 ลูก และลูกบอลสีขาว 6 ลูกอยู่ในถุง ให้เลือกลูกบอล 1 ลูกออกมา 2 ครั้ง หากความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ลูกบอลลูกที่ 2 จะถูกเลือกออกมาเป็นสีแดง เมื่อลูกบอลลูกที่ 1 ถูกเลือกออกมาเป็นสีแดง โดยการหยิบลูกบอลแล้วไม่ใส่คืน

กำหนดให้ลูกบอลลูกที่ 1 ที่ถูกเลือกออกมาเป็นสีแดงคือเหตุการณ์ A

และกำหนดให้ลูกบอลลูกที่ 2 ที่ถูกเลือกออกมาเป็นสีแดงคือเหตุการณ์ B

เนื่องจากมีลูกบอล 5 ลูก เราจะได้ $n(A)=5$

เนื่องจาก ในครั้งที่ 1 ลูกบอลถูกเลือกจากลูกบอลสีแดง 5 ลูก และครั้งที่ 2 ลูกบอลถูกเลือกจากลูกบอลสีแดงที่เหลืออยู่ 4 ลูก เราจึงได้ $n(A \cap B)=5 \cdot 4$

$$\text{ดังนั้น } P(A) = \frac{5}{11}, P(A \cap B) = \frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 10} = \frac{2}{11}$$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } P_A(B) = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{2}{5}$$

$\frac{2}{5}$

- ② มีฉลาก 20 ใบ โดยที่ฉลาก 5 ใบเป็นฉลากที่ชนะรางวัล พี่ชายจับฉลาก 1 ใบเป็นคนแรก ตามด้วยน้องชายจับฉลาก 1 ใบ หากความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่น้องชายจะชนะรางวัลหลังจากที่พี่ชายไม่ได้รางวัล โดยการหยิบฉลากแล้วไม่ใส่คืน

พี่ชายไม่ได้รางวัลคือเหตุการณ์ A และน้องชายชนะรางวัลคือเหตุการณ์ B

เนื่องจากมีฉลาก 20 ใบ โดยฉลาก 5 ใบเป็นฉลากที่ชนะรางวัล เราจะได้ $n(A)=20-5=15$

เนื่องจากมีฉลาก 15 ใบที่ไม่ได้รางวัล และ 5 ใบที่ชนะรางวัล เราจะได้ $n(A \cap B)=15 \cdot 5$

$$\text{ดังนั้น } P(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}, P(A \cap B) = \frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 19} = \frac{15}{76}$$

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ } P_A(B) = \frac{\frac{15}{76}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{19}$$

$\frac{5}{19}$

PRACTICE

- ◆ มีลูกบอลสีแดง 3 ลูก และลูกบอลสีขาว 4 ลูกอยู่ในถุง ให้เลือกลูกบอล 1 ลูกออกมา 2 ครั้ง หากความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ลูกบอลลูกที่ 2 จะถูกเลือกออกมาเป็นสีแดง เมื่อลูกบอลลูกที่ 1 ถูกเลือกออกมาเป็นสีแดง โดยการหยิบลูกบอลแล้วไม่ใส่คืน

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

การคำนวณความน่าจะเป็น

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาความน่าจะเป็นโดยใช้ทฤษฎีบทการบวกและทฤษฎีบทการคูณ

STUDY GUIDE

ทฤษฎีบทการบวกและทฤษฎีบทการคูณ

เราสามารถใช้อัตราทฤษฎีบทการบวกและทฤษฎีบทการคูณเพื่อหาความน่าจะเป็นในโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นได้

ทฤษฎีบทการบวกสำหรับความน่าจะเป็น

เมื่อเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน สูตรต่อไปนี้จะใช้ได้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ทฤษฎีบทการคูณของความน่าจะเป็น

เมื่อเหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นพร้อมกัน สูตรต่อไปนี้จะใช้ได้

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

EXERCISE

- 1 มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง 4 ลูกและลูกบอลสีขาว 5 ลูก A เลือกลูกบอล 1 ลูกออกมา แล้ว B เลือกลูกบอล 1 ลูกออกมา หาความน่าจะเป็นที่ B เลือกลูกบอลสีแดงออกมาในกรณีนี้ โดยหยิบลูกบอลแล้วไม่ใส่คืน
- มี 2 วิธีต่อไปนี้ที่ B จะเลือกลูกบอลสีแดงออกมา
- A เลือกลูกบอลสีแดงออกมา แล้ว B ก็เลือกลูกบอลสีแดงออกมา ... (i)
- A เลือกลูกบอลสีขาวออกมา แล้ว B เลือกลูกบอลสีแดงออกมา ... (ii)

จากทฤษฎีบทการคูณ ความน่าจะเป็น (i) คือ $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

จากทฤษฎีบทการคูณ ความน่าจะเป็นของ (ii) คือ $\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

เนื่องจาก (i) และ (ii) เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน จากทฤษฎีบทการบวก ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{4}{9}$$

- ๒ มีฉลาก 30 ใบ โดยที่ฉลาก 6 ใบเป็นฉลากที่ชนะรางวัล ในกรณีนี้ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้จะโดยหยิบฉลากแล้วไม่ใส่คืน

(1) โดยกำหนดให้คน 2 คนคือ A และ B จับฉลากตามลำดับนี้

ความน่าจะเป็นที่ B จะชนะรางวัล

มี 2 วิธีดังนี้คือ

A ชนะรางวัลและ B ก็ชนะรางวัลเช่นกัน ... (i)

A ไม่ได้รางวัลและ B ชนะรางวัล ... (ii)

จากทฤษฎีบทการคูณ ความน่าจะเป็น (i) คือ $\frac{6}{30} \times \frac{5}{29} = \frac{1}{29}$

จากทฤษฎีบทการคูณ ความน่าจะเป็นของ (ii) คือ $\frac{24}{30} \times \frac{6}{29} = \frac{24}{145}$

เนื่องจาก (i) และ (ii) เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน จากทฤษฎีบทการบวก ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ

$$\frac{1}{29} + \frac{24}{145} = \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{5}$



(2) โดยกำหนดให้คน 3 คน A, B และ C จับฉลากตามลำดับนี้ ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย A และ C จะชนะ

มี 2 วิธีดังนี้คือ

ทั้ง 3 คนชนะรางวัล ... (i)

A ชนะรางวัล B ไม่ได้รางวัล แล้ว C ชนะรางวัล ... (ii)

จากทฤษฎีบทการคูณ ความน่าจะเป็น (i) คือ $\frac{6}{30} \times \frac{5}{29} \times \frac{4}{28} = \frac{1}{203}$

จากทฤษฎีบทการคูณ ความน่าจะเป็นของ (ii) คือ $\frac{6}{30} \times \frac{24}{29} \times \frac{5}{28} = \frac{6}{203}$

เนื่องจาก (i) และ (ii) เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน จากทฤษฎีบทการบวก ความน่าจะเป็นที่เราหาได้คือ

$$\frac{1}{203} + \frac{6}{203} = \frac{1}{29}$$

$\frac{1}{29}$

☰ 6 × 5 × 4 + 6 × 24 × 5

$\frac{6 \times 5 \times 4 + 6 \times 24 \times 5}{30 \times 29 \times 28}$	$\frac{1}{29}$
---	----------------

PRACTICE

- ① มีถุงหนึ่งถุงที่ใส่ลูกบอลสีแดง 12 ลูกและลูกบอลสีขาว 10 ลูก A เลือกลูกบอล 1 ลูกออกมา แล้ว B เลือกลูกบอล 1 ลูกออกมา หากความน่าจะเป็นที่ B เลือกลูกบอลสีแดงออกมาในกรณีนี้ โดยหยิบแล้วไม่ใส่คืน
 - (1) โดยกำหนดให้คน 2 คน A และ B จับฉลากตามลำดับนี้ ความน่าจะเป็นที่ B จะชนะรางวัล
- ② มีฉลาก 25 ใบ โดยที่ฉลาก 5 ใบเป็นฉลากที่ชนะรางวัล ในกรณีนี้ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้ โดยหยิบฉลากแล้วไม่ใส่คืน
 - (2) โดยกำหนดให้คน 3 คน A, B และ C จับฉลากตามลำดับนี้ ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย B และ C จะชนะ

จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดและความน่าจะเป็น: ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

คำคาดหมาย

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีประเมินค่าของการทดลองตามความน่าจะเป็น

STUDY GUIDE

คำคำอธิบาย

เมื่อได้ค่าตัวเลขที่เป็น “เงินรางวัล” จากการทดลอง เช่น “การจับฉลาก” ค่าเฉลี่ยของค่าที่ได้จะเรียกว่า **ค่าคาดหวัง** หากค่าที่น่าจะเป็นของปริมาณ X คือ $x_1, x_2, \dots, x_n$ และความน่าจะเป็น p ของค่าที่ได้เหล่านี้คือ $p_1, p_2, \dots, p_n (p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1)$ แล้วจึงสามารถหาค่าคาดหวัง E ได้โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

EXERCISE

- 1 มีฉลากตามที่แสดงในตารางด้าน
ขวา ในกรณีนี้ จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

	รางวัลที่ 1	รางวัลที่ 2	รางวัลที่ 3	ไม่ถูกรางวัล	ผลรวม
เงินรางวัล (ดอลลาร์)	3000	1000	400	0	
จำนวนฉลาก (ใบ)	2	8	10	80	100

- (1) หากความน่าจะเป็นในการจับฉลาก

ได้รางวัลที่ 1 รางวัลที่ 2 หรือรางวัล

ที่ 3 หรือไม่ถูกรางวัล เมื่อคุณจับฉลากเพียง 1 ครั้ง

มีฉลากทั้งหมด 100 ใบ

รางวัลที่ 1 มีฉลาก 2 ใบ ดังนั้นความน่าจะเป็นคือ $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

รางวัลที่ 2 มีมูลค่า 8 ใบ ดังนั้นความน่าจะเป็นคือ $\frac{8}{100} = \frac{2}{25}$

รางวัลที่ 3 มีฉลาก 10 ใบ ดังนั้นความน่าจะเป็นคือ $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

ฉลากที่ไม่ถูกรางวัลมี 80 ใบ ดังนั้นความน่าจะเป็นคือ $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

ที่ 1... $\frac{1}{50}$ ที่ 2... $\frac{2}{25}$ ที่ 3... $\frac{1}{10}$ ไม่ถูกรางวัล... $\frac{4}{5}$

- (2) หาค่าคาดหมายของเงินรางวัลสำหรับการจับฉลาก 1 ใบ

เนื่องจากค่าคาดหวังคือผลรวมของผลคูณของรางวัลแต่ละรายการและความน่าจะเป็น เราจะได้

$$3000 \times \frac{1}{50} + 1000 \times \frac{2}{25} + 400 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{4}{5} = 180 \text{ ดอลลาร์}$$

180 ดอลลาร์

② โดยกำหนดให้โยนเหรียญ 1 เหรียญ 5 ครั้งต่อเนื่องกัน จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาความน่าจะเป็นสำหรับแต่ละครั้งที่ผลลัพธ์จะออกหัว

โดยกำหนดให้โยนเหรียญ 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะออกหัวคือ $\frac{1}{2}$

ผลลัพธ์สามารถออกหัวได้ 0 ครั้ง 1 ครั้ง 2 ครั้ง 3 ครั้ง 4 ครั้ง หรือ 5 ครั้ง

โดยกำหนดให้ $k(k=0, 1, 2, 3, 4 \text{ และ } 5)$ คือจำนวนครั้งที่โยนเหรียญออกหัว แล้วความน่าจะเป็นที่หัวจะปรากฏขึ้น

ตามจำนวนครั้งเหล่านั้นสามารถแสดงได้เป็น ${}_5C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-k} = {}_5C_k \left(\frac{1}{2}\right)^5$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะออกหัว 0 ครั้งคือ ${}_5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะออกหัว 1

ครั้งคือ ${}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$

ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะออกหัว 2 ครั้งคือ ${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$ ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะออกหัว 3

ครั้งคือ ${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$

ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะออกหัว 4 ครั้งคือ ${}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$ ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จะออกหัว 5

ครั้งคือ ${}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \text{ ครั้ง} & \dots & \frac{1}{32} & 1 \text{ ครั้ง} & \dots & \frac{5}{32} & 2 \text{ ครั้ง} & \dots & \frac{5}{16} & 3 \text{ ครั้ง} & \dots & \frac{5}{16} & 4 \text{ ครั้ง} & \dots & \frac{5}{32} & 5 \text{ ครั้ง} & \dots & \frac{1}{32} \end{array}$$



(2) หาค่าคาดหวังของจำนวนครั้งที่ผลลัพธ์จะออกหัว

เนื่องจากค่าคาดหวังคือผลรวมของผลคูณของรางวัลแต่ละรายการและความน่าจะเป็น เราจะได้

$$0 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{5}{32} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{5}{32} + 5 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{2} \text{ (ครั้ง)}$$

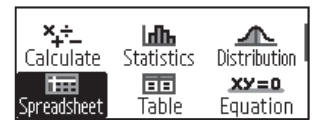
$$\underline{\underline{\frac{5}{2} \text{ ครั้ง}}}$$

check

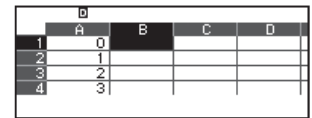
เนื่องจากค่าคาดหวังที่หาได้คือผลรวมของค่า $x=0, 1, 2, 3, 4$ และ 5 ใน $x \cdot {}_5C_x \left(\frac{1}{2}\right)^5$ เราสามารถยืนยันค่าดังกล่าว

ได้โดยใช้ฟังก์ชัน Spreadsheet (สเปรดชีต) บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ตามที่แสดงด้านล่าง

กด **Ⓢ** เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด **Ⓚ** แล้วจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดย
การกด **Ⓛ**



หลังจากบ้อน [A1:0, A2:1, A3:2, A4:3, A5:4 และ A6:5] ตามลำดับ
แล้ว ให้กด **EXE** เลื่อนไปที่ [B1]



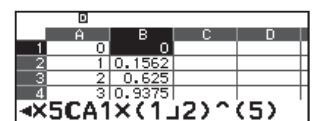
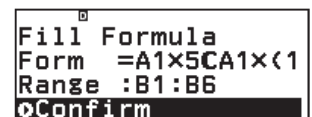
กด  เลือก [Fill Formula (ระบุสูตร)] กด 

หลังจากป้อน [Form (แบบฟอร์ม)= $A1 \times {}_5C_{A1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(5)}$] ให้กด **EXE** (*)

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B1:B6] แล้ว ให้กด **ⓧ**

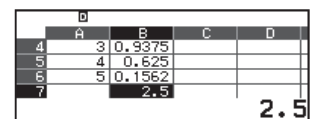
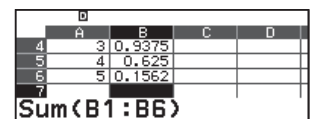
เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด **OK** (*)

เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [B7]



หลังจากป้อน [Sum (ผลรวม)(B1:B6)] แล้ว ให้กด **ⓧ** (*)

ค่าคาดหวังที่คำนวณได้ $2.5 = \frac{5}{2}$ จะแสดงในรูป [B7]



EXTRA Info.

วิธีป้อนตัวอักษร A ถึง F ลงในเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์

$[A]=\uparrow 4, [B]=\uparrow 5, [C]=\uparrow 6, [D]=\uparrow 1, [E]=\uparrow 2, [F]=\uparrow 3$

*ในโจทย์นี้ ใช้ [A] และ [B] เนื่องจากการคำนวณที่ทำในคอลัมน์ B จะขึ้นอยู่กับค่าที่ป้อนในคอลัมน์ A

วิธีป้อนสัญลักษณ์การดำเนินการเฉพาะสำหรับ Spreadsheet (สเปรดชีต)

บนเซลล์ที่จะทำการคำนวณ กด **⌘** เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด **⌘** เลือก
หนึ่งใน 8 ตัวเลือกด้านล่างที่จะใช้ แล้วกด **⌘**

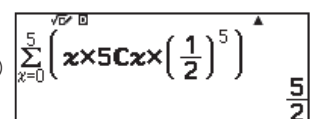
[Grab (กรับ), =, \$, :, Min (ต่ำสุด), Max (สูงสุด), Mean (ค่าเฉลี่ย), Sum (ผลรวม)]

* ในโจทย์นี้ ใช้ [Sum (ผลรวม)] เพื่อคำนวณผลรวมของช่วงที่เลือกซึ่งระบุโดย [:]

OTHER METHODS

กด  เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด 

กต ☒ เลือก [Func Analysis (การวิเคราะห์ฟังก์ชัน)] กต ☒ เลือก [Summation (สรุป)(Σ)] กต ☒



รายละเอียดเกี่ยวกับสัญลักษณ์ Σ (ซิกมา) ซึ่งใช้ในโซลูชันแยกต่างหากได้อธิบายไว้ในหัวข้อ “ลำดับ” ฉบับแยกต่างหากแล้ว

PRACTICE

① มีฉลากตามที่แสดงในตารางด้าน
ขวา ในกรณีนี้ จงแก้ไขโจทย์ต่อไปนี้

(1) หาความน่าจะเป็นในการจับฉลาก
ได้รางวัลที่ 1 รางวัลที่ 2 หรือรางวัลที่

3 หรือไม่ถูกรางวัล เมื่อคุณจับฉลากเพียง 1 ครั้ง

	รางวัลที่ 1	รางวัลที่ 2	รางวัลที่ 3	ไม่ถูกรางวัล	ผลรวม
เงินรางวัล (ดอลลาร์)	10000	1000	100	0	
จำนวนฉลาก (ใบ)	1	10	100	889	1000

(2) หาค่าคาดหวังของเงินรางวัลสำหรับการจับฉลาก 1 ใบ

๒ โดยกำหนดให้ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 3 ครั้งต่อเนื่องกัน จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาความน่าจะเป็นสำหรับแต่ละครั้งที่ผลลัพธ์จะเป็น 1

(2) หาค่าคาดหวังของจำนวนครั้งที่ผลลัพธ์จะเป็น 1