

มุมทั่วไป

TARGET

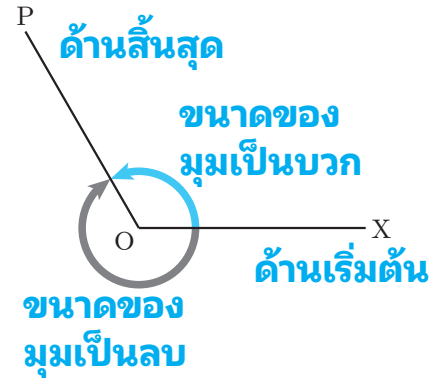
การทำความเข้าใจมุมทั่วไป

STUDY GUIDE

มุมบวกและมุมลบ

เมื่อครึ่งเส้น OP หมุนรอบจุด O เราจะเรียก OP ว่า **ด้านสิ้นสุด** และจะเรียกเส้น OX ที่แสดงตำแหน่งเริ่มต้นของด้านสิ้นสุดว่า **ด้านเริ่มต้น**

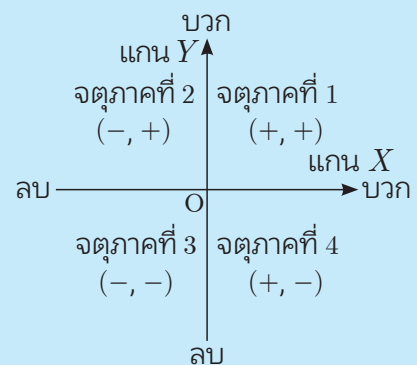
ขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงบวก คือการหมุนทวนเข็มนาฬิกาของมุมด้านสิ้นสุด และ **ขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงลบ** คือการหมุนตามเข็มนาฬิกา และการหมุนด้านสิ้นสุด 360° จะทำให้ด้านสิ้นสุดดังกล่าวกลับไปยังตำแหน่งเดิม



EXTRA Info.

ชื่อในระนาบ xy

ตำแหน่งของด้านสิ้นสุดจะย้ายไปที่ตำแหน่งต่าง ๆ ตามมุมของการหมุน ระนาบ xy ถูกแบ่งด้วยแกน X และแกน Y ออกเป็น 4 ส่วน ตามที่แสดงในรูปภาพทางด้านขวา



มุมทั่วไป

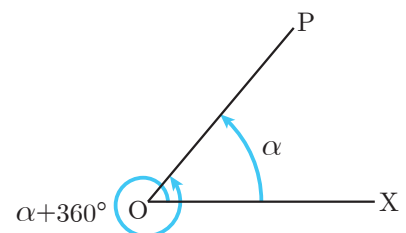
มุม (รวมถึงขนาดของมุมเป็นลบและมุมที่มากกว่า 360°) ที่ด้านสิ้นสุดหมุนจากด้านเริ่มต้นจะเรียกว่า **มุม** และแสดงเป็น θ

เมื่อมุมที่แสดงโดยรัศมี OP คือ α ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวา มุมต่อไปนี้จะตรงกับรัศมี OP

$$\alpha, \alpha+360^\circ, \alpha+360^\circ \times 2, \alpha+360^\circ \times 3, \dots$$

$$\alpha-360^\circ, \alpha-360^\circ \times 2, \alpha-360^\circ \times 3, \dots$$

ดังนั้น มุมทั่วไป θ ที่ระบุโดยรัศมี OP ในรูปภาพทางด้านขวาสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้



$$\theta = \alpha + 360^\circ \times n \quad (\text{โดยที่ } n \text{ คือจำนวนเต็ม, } 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ)$$

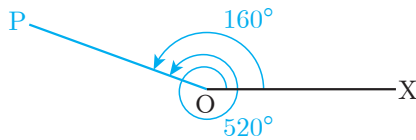
- Ex.**
- ด้านสิ้นสุด 60° แสดงเป็นมุม θ ในรูปแบบ $\theta = 60^\circ + 360^\circ \times n$ (โดยที่ n คือจำนวนเต็ม)
 - ด้านสิ้นสุด 420° ยังแสดงเป็นมุม θ ในรูปแบบ $\theta = 60^\circ + 360^\circ \times n$ (โดยที่ n คือจำนวนเต็ม)

EXERCISE

- ◆ โดยกำหนดให้ OX เป็นด้านเริ่มต้น จงเขียนด้านสิ้นสุด OP ของมุมต่าง ๆ ต่อไปนี้ นอกจากนี้ยังแสดงด้านสิ้นสุด OP เหล่านั้นในรูปแบบของมุมทั่วไป: $\alpha + 360^\circ \times n$ (โดยที่ n คือจำนวนเต็ม, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$)

(1) 520°

เนื่องจาก $520^\circ - 360^\circ \times 1 = 160^\circ$ เวกเตอร์รัศมีแสดงที่ด้านล่าง

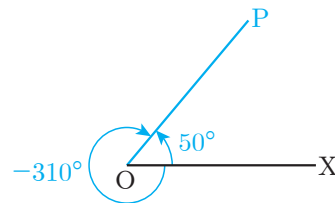


นอกจากนี้มุมทั่วไปคือ $160^\circ + 360^\circ \times n$

$$\underline{160^\circ + 360^\circ \times n}$$

(2) -310°

เนื่องจาก $-310^\circ + 360^\circ \times 1 = 50^\circ$ เวกเตอร์รัศมีแสดงที่ด้านล่าง



นอกจากนี้มุมทั่วไปคือ $50^\circ + 360^\circ \times n$

$$\underline{50^\circ + 360^\circ \times n}$$

PRACTICE

- ◆ จงแสดงด้านสิ้นสุดของมุมต่อไปนี้ในรูปแบบของมุมทั่วไป: $\alpha + 360^\circ \times n$ (โดยที่ n คือจำนวนเต็ม, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$)

(1) 680°

(2) 900°

(3) -1500°

(4) -3440°

หน่วยวัดมุมเรเดียน

TARGET

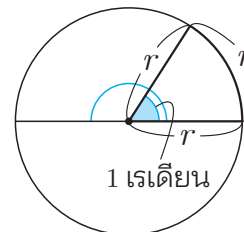
การทำความเข้าใจระบบเรเดียน

STUDY GUIDE

หน่วยวัดมุมเรเดียนและหน่วยวัดมุมองศา

เรากล่าวได้ว่า **1 เรเดียน (1 rad)** คือขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมสำหรับความยาวส่วนโค้งของรัศมีของวงกลม และวิธีที่เราแสดงมุมในหน่วยเรเดียนเรียกว่า **หน่วยวัดมุมเรเดียน** โดยปกติแล้วหน่วยเรเดียนจะถูกตัดออกเมื่อแสดงค่าในหน่วยวัดมุมเรเดียน

ในทางกลับกัน เรากล่าวได้ว่า **หน่วยวัดมุมองศา** คือระบบที่ใช้ในการแสดงมุมในหน่วยองศา ($^{\circ}$) ตารางต่อไปนี้แสดงการเปรียบเทียบหน่วยวัดมุมองศาและหน่วยวัดมุมเรเดียน



รูปทรง	รัศมี r	ความยาวส่วนโค้ง $l=r\theta$ (rad)	มุมที่จุดศูนย์กลาง θ (rad)	มุมที่จุดศูนย์กลาง θ ($^{\circ}$)
เซกเตอร์ (คำอธิบายความหมายของ 1 rad)	r	r	1	$\frac{180^{\circ}}{\pi}$
ครึ่งวงกลม	r	πr	π	180°
วงกลม	r	$2\pi r$	2π	360°

สูตรการแปลงระหว่างหน่วยวัดมุมเรเดียนและหน่วยวัดมุมองศา

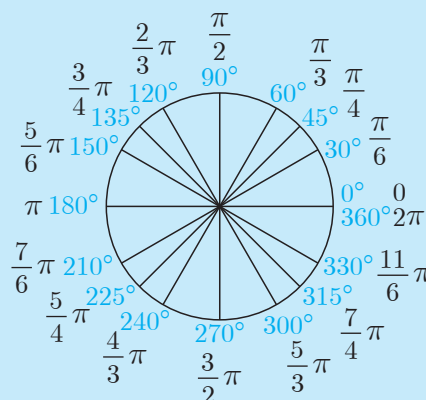
$$\pi(\text{rad})=180^{\circ} \text{ ดังนั้น } 1(\text{rad})=\frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57.3^{\circ}, 1^{\circ}=\frac{\pi}{180}(\text{rad})$$

$$\text{การแปลงจากองศาเป็นเรเดียน} \quad x(\text{rad})=\theta(^{\circ}) \times \frac{\pi}{180}$$

$$\text{การแปลงจากเรเดียนเป็นองศา} \quad x(^{\circ})=\theta(\text{rad}) \times \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

EXTRA Info.

รูปภาพทางด้านขวาแสดงความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งของมุมร่วมในวงกลมสำหรับหน่วยวัดมุมเรเดียนและหน่วยวัดมุมองศา



EXERCISE

1 จงหาค่ามุมในหน่วยเรเดียนต่อไปนี้ ซึ่งกำหนดไว้ในหน่วยวัดมมองศา

$$\frac{5}{3}\pi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

๒ จงหาค่ามุมในหน่วยเรเดียนต่อไปนี้ ซึ่งกำหนดไว้ในหน่วยวัดมุมเรเดียน

-240°

$$\frac{1800^\circ}{\pi}$$



วิธีการแปลงระหว่างองศาและเรเดียนบนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์

1 การแปลงจากองศาเป็นเรเดียน

กด เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด

กด  เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)]

กด **OK** เลือก [Angle Unit (หน่วยมม)] กด **OK**

เลือก [Radian (เรเดียน)] กด **OK** กด **AC**

และคุณสามารถตรวจสอบเพื่อยืนยันว่าเป็นค่าในใจหายได้โดยการคูณคำตอบด้วย $\frac{180^\circ}{\pi}$ เพื่อเปลี่ยนกลับเป็นหน่วย
วัดมองศา

เลือก [Degrees (องศา)] กด (OK) กด (EXE) (Ans) (X) (1) (8) (0) () () (7) (EXE)

$$\text{Ans} \times \frac{180}{\pi}$$

$$\text{Ans} \times \frac{180}{\pi}$$

$$\text{AnsX} \frac{180}{\pi}$$

$$\text{Ans} \times \frac{180}{\pi}$$

2 การแปลงจากเรเดียนเป็นองศา

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

กด $\equiv$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)]

กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK

เลือก [Degree (องศา)] กด OK กด AC

Input/Output
Angle Unit
Number Format
Engineer Symbol

$\odot$ Degree
 $\circ$ Radian
 $\circ$ Gradian

และคุณสามารถตรวจสอบเพื่อยืนยันว่าเป็นค่าในโจทย์ได้โดยการคูณคำตอบด้วย $\frac{\pi}{180}$ เพื่อเปลี่ยนกลับเป็นระบบเรเดียน

(1) $\frac{\pi}{12}$

หลังจากป้อนค่า $\uparrow$ 7 $\equiv$ 1 2 $\triangleright$ แล้ว ให้

กด AC เลือก [Angle/Coord/Sexa] กด OK

เลือก [Radians (เรเดียน)] กด OK กด EXE

$\frac{\pi}{12}^{\circ}$
15

$\text{Ans} \times \uparrow$ 7 $\equiv$ 1 8 0 EXE

$\text{Ans} \times \frac{\pi}{180}$
 $\frac{1}{12}\pi$

(2) $-\frac{4}{3}\pi$

$-\frac{4}{3}\pi^{\circ}$
-240

$\text{Ans} \times \frac{\pi}{180}$
 $-\frac{4}{3}\pi$

(3) 10

10°
572.9577951

$\text{Ans} \times \frac{\pi}{180}$
10

PRACTICE

① จงหาค่ามุมในหน่วยเรเดียนต่อไปนี้ ซึ่งกำหนดไว้ในการวัดองศา

(1) 120°

(2) 270°

(3) -60°

(4) -210°

๒ จงหาค่ามุมในหน่วยเรเดียนต่อไปนี้ ซึ่งกำหนดไว้ในหน่วยวัดมุมเรเดียน

(1) $\frac{7}{12}\pi$

(2) $\frac{3}{4}\pi$

(3) $-\frac{11}{6}\pi$

(4) $-\frac{\pi}{2}$

ความยาวส่วนโค้งและพื้นที่ของเซกเตอร์

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาความยาวของส่วนโค้งและพื้นที่ของเซกเตอร์โดยใช้หน่วยวัดมุมเรเดียน

STUDY GUIDE

ความยาวส่วนโค้งและพื้นที่ของเซกเตอร์

สูตรในการหาความยาว l ของส่วนโค้งและพื้นที่ S ของเซกเตอร์ ที่มีรัศมี r และมุมที่จุดศูนย์กลางของ θ (เรเดียน) ตามที่แสดงในรูปภาพทางด้านขวา แสดงอยู่ด้านล่าง

ความยาวส่วนโค้ง $l = r\theta$

พื้นที่ $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

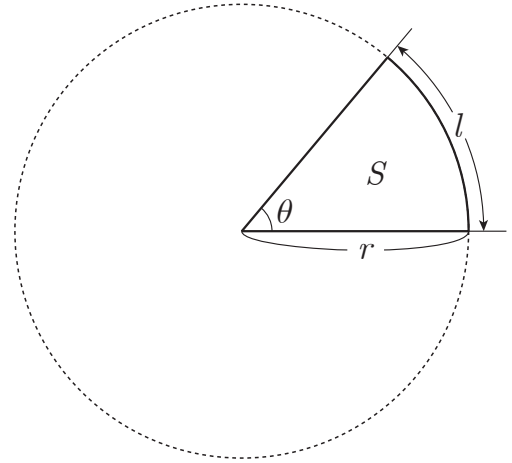
explanation

ความยาว l ของส่วนโค้งและพื้นที่ S ของเซกเตอร์เป็นสัดส่วนโดยตรงของมุมที่จุดศูนย์กลาง θ

ดังนั้น ความยาวของส่วนโค้งคือ $l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta \quad \dots(i)$

พื้นที่ $S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$

การแทนที่ส่วนนี้ด้วย (i) เราจะได้ $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

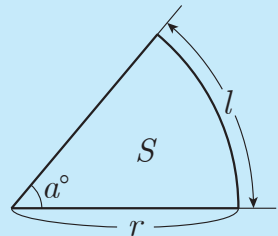


EXTRA Info.

สูตรในการหาความยาว l ของส่วนโค้งและพื้นที่ S ของเซกเตอร์ ที่มีรัศมี r และมุมที่จุดศูนย์กลางของ a°

$$l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$$

$$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$



EXERCISE

- ◆ จงหาความยาว l ของส่วนโค้งและพื้นที่ S ของเซกเตอร์ที่มีรัศมี 4 หน่วย และมุมที่จุดศูนย์กลางเป็น $\frac{5}{6}\pi$ เรเดียน

$$l = r\theta = 4 \times \frac{5}{6}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5}{6}\pi = \frac{20}{3}\pi$$

$$l = \frac{10}{3}\pi, S = \frac{20}{3}\pi$$

PRACTICE

◆ จงหาความยาว l ของส่วนโค้งและพื้นที่ S สำหรับรายการต่อไปนี้

(1) เซกเตอร์ที่มีรัศมี 5 หน่วย และมุมที่จุดศูนย์กลางเป็น $\frac{\pi}{9}$ เรเดียน

(2) เซกเตอร์ที่มีรัศมี 2 หน่วย และมุมที่จุดศูนย์กลางเป็น $\frac{4}{3}\pi$ เรเดียน

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

TARGET

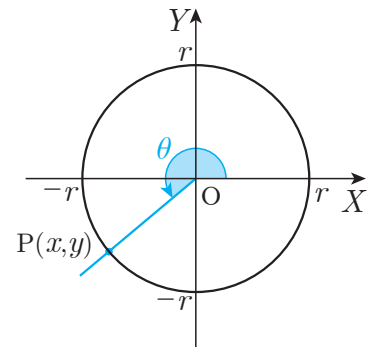
การทำความเข้าใจวิธีหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

STUDY GUIDE

คำอธิบายความหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในระนาบพิกัด โดยที่ $P(x, y)$ คือจุดตัดของด้านสิ้นสุดของมุม θ และวงกลมของรัศมี r มีศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และเริ่มต้นจากส่วนบวกของแกน x แล้วกำหนดให้ $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ มีรูปแบบดังต่อไปนี้

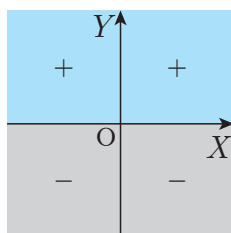
$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}, \tan\theta = \frac{y}{x}$$



ทั้งหมดนี้คือฟังก์ชันของ θ และจะเรียกโดยรวมว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ

เครื่องหมายและค่าที่เป็นไปได้ของฟังก์ชันตรีโกณมิติขึ้นอยู่กับจุดภาคที่มีด้านสิ้นสุดของมุมอยู่

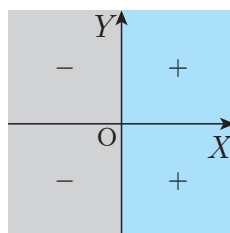
เครื่องหมายของ $\sin\theta$



ค่าที่เป็นไปได้

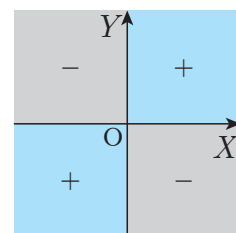
$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

เครื่องหมายของ $\cos\theta$



$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

เครื่องหมายของ $\tan\theta$



$\tan\theta$ คือจำนวนจริงทั้งหมด

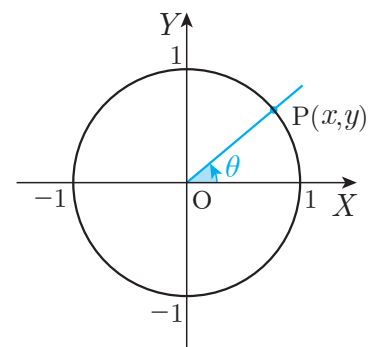
วงกลมหนึ่งหน่วยและฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สำหรับจุดตัด $P(x, y)$ ระหว่างวงกลมหนึ่งหน่วย (วงกลมที่มีรัศมี $r=1$) และแกน x ที่มีมุม θ ค่าสำหรับ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ แสดงอยู่ด้านล่าง

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

$$\left(\tan\theta = \frac{y}{x} \right)$$



EXERCISE

◆ จงหา $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ สำหรับรายการต่อไปนี้

(1) $\theta = \frac{\pi}{4}$

พล็อตด้านสิ้นสุดของ $\frac{\pi}{4}$ สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วย

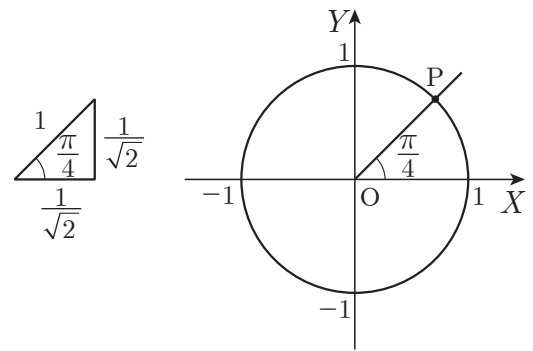
จากรูปภาพด้านขวา เราจะพบว่าพิกัดของจุด

P คือ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$



$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta = 1$$

(2) $\theta = \frac{5}{3}\pi$

พล็อตด้านสิ้นสุดของ $\frac{5}{3}\pi$ สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วย

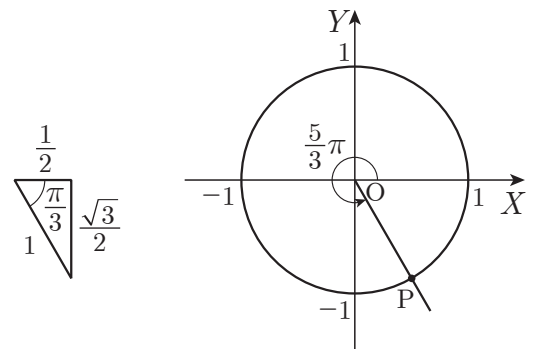
จากรูปภาพด้านขวา เราจะพบว่าพิกัดของจุด

P คือ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\sin\theta = \sin\frac{5}{3}\pi = y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = \cos\frac{5}{3}\pi = x = \frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \tan\frac{5}{3}\pi = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$



$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta = \frac{1}{2}, \tan\theta = -\sqrt{3}$$

(3) $\theta = -\frac{7}{6}\pi$

พล็อตด้านสิ้นสุดของ $-\frac{7}{6}\pi$ สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วย

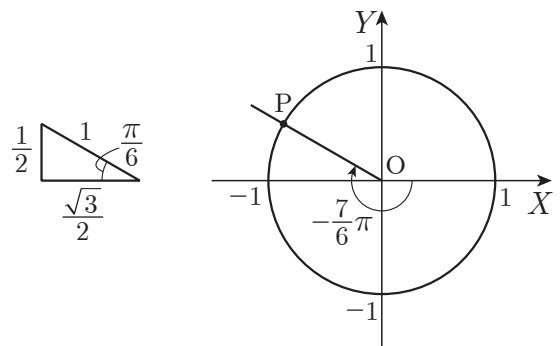
จากรูปภาพด้านขวา เราจะพบว่าพิกัดของจุด

P คือ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\sin\theta = \sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = y = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\sin\theta = \frac{1}{2}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

PRACTICE

◆ จงหา $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ สำหรับรายการต่อไปนี้

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}$

(2) $\theta = \frac{3}{4}\pi$

(3) $\theta = -\frac{13}{3}\pi$

เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้สูตรการหาค่าสหสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

STUDY GUIDE

เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิตินั้นใช้กับฟังก์ชันตรีโกณมิติได้เช่นกัน

$$(1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(2) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(3) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

explanation

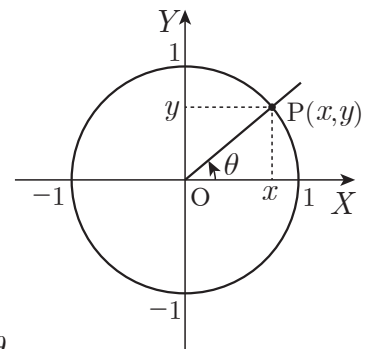
สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วยในรูปภาพด้านขวา เราสามารถหาค่าต่อไปนี้ได้จากนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

(1) แทนที่ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ ในสมการ $x^2 + y^2 = 1$ ของวงกลม
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

(2) แทนที่ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$ ใน $\tan \theta = \frac{y}{x}$ เพื่อที่จะได้ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

(3) หาทองทั้งสองข้างของสมการที่ได้จาก (1) ด้วย $\cos^2 \theta$
 $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta},$
 $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}, 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$



EXERCISE

① จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

(1) จงหาค่าสำหรับ $\cos \theta$ และ $\tan \theta$ เมื่อ θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 1 และ $\sin \theta = \frac{1}{4}$

แทนที่ $\sin \theta = \frac{1}{4}$ ใน $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ เพื่อที่จะได้ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1, \cos^2 \theta = \frac{15}{16}$

θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 1 ดังนั้นจาก $\cos \theta > 0$ เราจะได้ $\cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

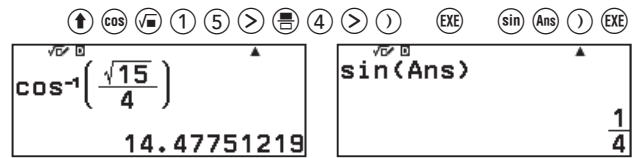
ดังนั้น เราจึงได้ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}, \tan \theta = \frac{\sqrt{15}}{15}$$



check

แปลงหน่วยของมุมเป็นองศา และหา $\sin \theta$ จากโคไซน์ผกผัน



$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = 14.47751219$$

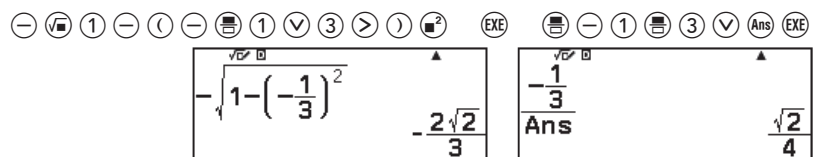
$$\sin(\text{Ans}) = \frac{1}{4}$$

(2) จงหาค่าสำหรับ $\cos \theta$ และ $\tan \theta$ เมื่อ θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 3 และ $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ แทนที่ $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ ใน $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ เพื่อที่จะได้ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1, \cos^2 \theta = \frac{8}{9}$ θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 3 ดังนั้นจาก $\cos \theta < 0$ เราจะได้ $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ดังนั้น เราจึงได้ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

check

หา $\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ และ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$



$$-\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

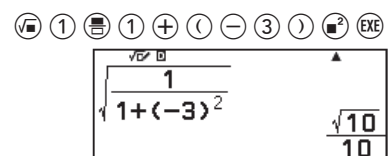
$$\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(3) จงหาค่าสำหรับ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 4 และ $\tan \theta = -3$ แทนที่ $\tan \theta = -3$ ใน $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ เพื่อที่จะได้ $1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$ θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 4 ดังนั้นจาก $\cos \theta > 0$ เราจะได้ $\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ดังนั้น เราจึงได้ $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta, \sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{\sqrt{10}}{10} \times (-3) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

check

หา $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}}$



$$\sqrt{\frac{1}{1 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

PRACTICE

① จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

(1) จงหาค่าสำหรับ $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ เมื่อ θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 2 และ $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) จงหาค่าสำหรับ $\sin\theta$ และ $\tan\theta$ เมื่อ θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 4 และ $\cos\theta = \frac{3}{4}$

(3) จงหาค่าสำหรับ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 3 และ $\tan\theta = \frac{4}{3}$

EXERCISE

② เมื่อ $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของนิพจน์ต่อไปนี้

(1) $\sin \theta \cos \theta$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของ $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

จาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ เราจะได้ $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}, 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}, \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

ยกกำลังสามทั้งสองข้างของ $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \sin^3 \theta + \cos^3 \theta + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) = \frac{1}{8}$$

จาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ และผลลัพธ์ของ (1)

เราจะได้ $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{1}{8} + \frac{9}{16}, \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{11}{16}$

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{11}{16}$$

(3) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

แทนที่ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ใน $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

จาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ และผลลัพธ์ของข้อ (1) เราจะได้ $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{8}{3}$$



check

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK เลือก [Solver (ตัวแก้โจทย์)] กด OK

หลังจากป้อนค่า $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ แล้ว ให้กด EXE แล้วเลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE เพื่อหาค่าของ x

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

หลังจากป้อนสมการจาก (1) ถึง (3) แล้ว ให้กด EXE แล้วแทนที่ค่าของ x

$$\sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$x = -24.29518895$
L-R = 0

$$\sin(x) \cos(x)$$

$-\frac{3}{8}$

$$(\sin(x))^3 + (\cos(x))^3$$

$\frac{11}{16}$

$$\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)}$$

$-\frac{8}{3}$

PRACTICE

2 เมื่อ $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ จงหาค่าของนิพจน์ต่อไปนี้

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(3) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

กราฟ $asin\theta$ และ $acos\theta$

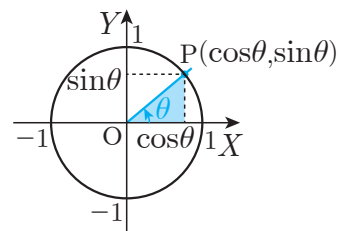
TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติต่าง ๆ ของกราฟสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติและวิธีวาดกราฟดังกล่าว

STUDY GUIDE

กราฟ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$

โดยกำหนดให้อินเตอร์เซกชันของด้านสิ้นสุดของมุม θ และวงกลมหนึ่งหน่วย คือ P แล้วเราจะได้พิกัด x ของ $\cos\theta$ และพิกัด y ของ $\sin\theta$ สำหรับ P ตามที่แสดงด้านขวา ดังนั้น เราจึงได้ $P(\cos\theta, \sin\theta)$



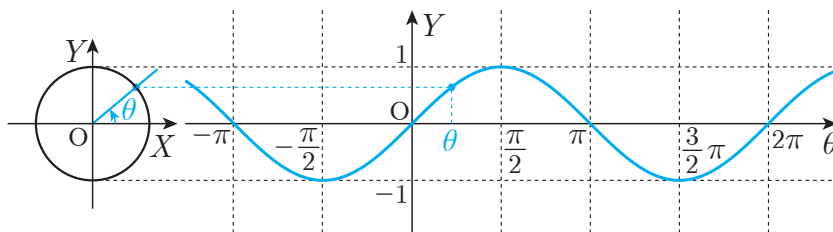
รูปทรงของเส้นโค้งในกราฟของ $y=\sin\theta$ และ $y=\cos\theta$ จะเรียกว่า **เส้นโค้งไซน์**

และเมื่อ $\theta=0$ ค่าก็คือ 0 และ 1 ดังนั้นเราจะได้กราฟต่อไปนี้ การหมุนด้านสิ้นสุด

1 การหมุนจะทำให้ด้านสิ้นสุดกลับสู่ตำแหน่งเดิม ดังนั้นรูปทรงเดียวกันจึงซ้ำกันที่ช่วงของ 2π เราเรียกสิ่งนี้ว่า **คาบ** ของ 2π

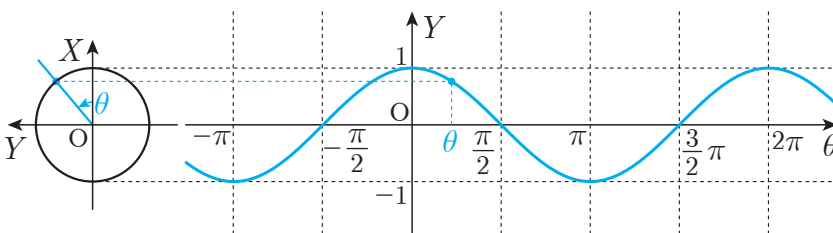
กราฟ $y=\sin\theta$

- ผ่านจุดกำเนิด
- พิกัดและสมมาตรกันตามจุดกำเนิดพิกัด
- คาบ 2π
- เรนจ์ $-1 \leq y \leq 1$



กราฟ $y=\cos\theta$

- ผ่านจุด $(0, 1)$
- และสมมาตรกันตามแกน y
- คาบ 2π
- เรนจ์ $-1 \leq y \leq 1$



กราฟ $asin\theta$ และ $acos\theta$

กราฟของ $y=asin\theta$ คือกราฟของ $y=\sin\theta$ คูณด้วย a ในทิศทางของแกน y เมื่อเสร็จสิ้นแล้ว คาบจะยังคงไม่เปลี่ยนแปลงที่ 2π

เรายังสามารถวาดกราฟ $y=acos\theta$ ในลักษณะเดียวกันได้

EXERCISE

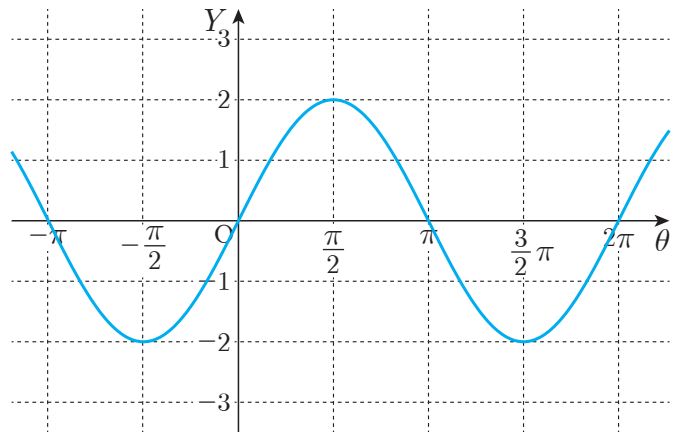
❖ วาดกราฟต่อไปนี้และหาค่าคาบ

(1) $y=2\sin\theta$

กราฟของ $y=2\sin\theta$ คือกราฟของ $y=\sin\theta$ คูณด้วย 2 ในทิศทางของแกน y ตามที่แสดงด้านขวา

คาบคือ 2π ซึ่งเหมือนกับคาบของ $y=\sin\theta$

คาบ 2π



check

เลือกโหมดตาราง จากนั้นจึงเปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\ominus$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก

[Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก [Radian (เรเดียน)] กด OK กด AC

$\sqrt{\square}$	$\square$	$f(x)$	$g(x)$
1	$\frac{x}{\square}$		
2			
3			
4			
f(x)/g(x) : None			

กด $\odot$ เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด OK

เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด OK

$\odot$ $\sin$ $\odot$ $\odot$ EXE

$\sqrt{\square}$	$\square$	$f(x)$	$g(x)$
1	$\frac{x}{\square}$		
2			
3			
4			
f(x)=2sin(x)			

กด $\odot$ เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด OK

เลือก [Define g(x) (กำหนดค่า g(x))] กด OK

$\sin$ $\odot$ $\odot$ EXE

$\sqrt{\square}$	$\square$	$f(x)$	$g(x)$
1	$\frac{x}{\square}$		
2			
3			
4			
g(x)=sin(x)			

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น):-2π, End (สิ้นสุด):2π, Step (ขั้น): $\frac{\pi}{4}$]

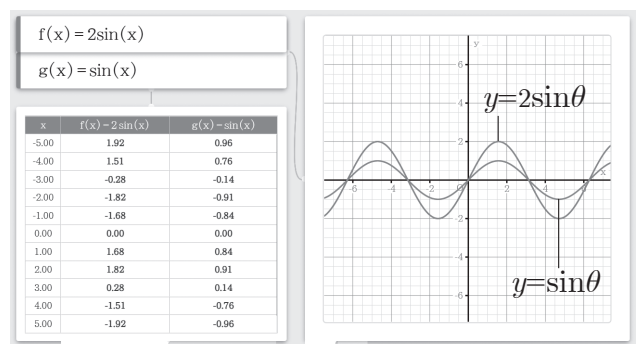
เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

$\sqrt{\square}$	$\square$	$f(x)$	$g(x)$
1	$\frac{x}{\square}$		
2			
3			
4			
Table Range			
Start:-6.283			
End :6.2831			
Step :0.7853			

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

$\sqrt{\square}$	$\square$	$f(x)$	$g(x)$
1	$\frac{x}{\square}$		
2			
3			
4			
-6.283185307			

$2\sin\theta$ คือ 2 เท่าของค่า $\sin\theta$



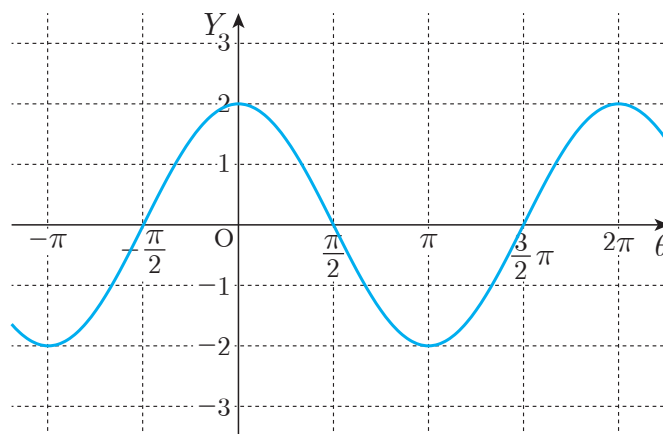
(2) $y=2\cos\theta$

กราฟของ $y=2\cos\theta$ คือกราฟของ $y=\cos\theta$

คูณด้วย 2 ในทิศทางของแกน y ตามที่แสดง
ด้านขวา

คาบคือ 2π ซึ่งเหมือนกับคาบสำหรับ $y=\cos\theta$

คาบ 2π



check

เลือกโหมดตาราง จากนั้นจึงเปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\equiv$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก [Radian (เรเดียน)] กด OK กด AC

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

$\odot$ $\cos$ (x) $)$ EXE

$f(x)=2\cos(x)$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $g(x)$ (กำหนดค่า $g(x)$)] กด OK

$\cos$ (x) $)$ EXE

$g(x)=\cos(x)$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น)]: -2π , [End (สิ้นสุด)]: 2π , [Step (ขั้น)]: $\frac{\pi}{4}$

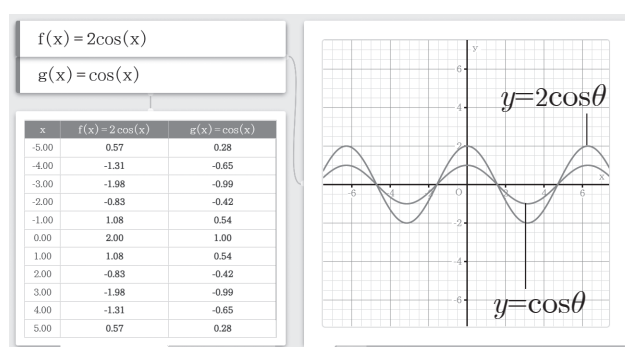
เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

Table Range
Start: -6.283
End : 6.2831
Step : 0.7853

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

	x	$f(x)$	$g(x)$
1	-6.283185307	2	1
2	-5.497787143	1.4142	0.7071
3	-4.712388980	0	0
4	-3.926990817	-1.414	-0.707

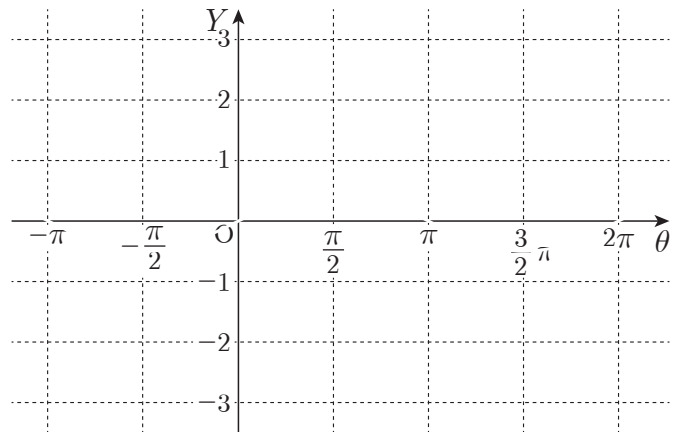
$2\cos\theta$ คือ 2 เท่าของค่า $\cos\theta$



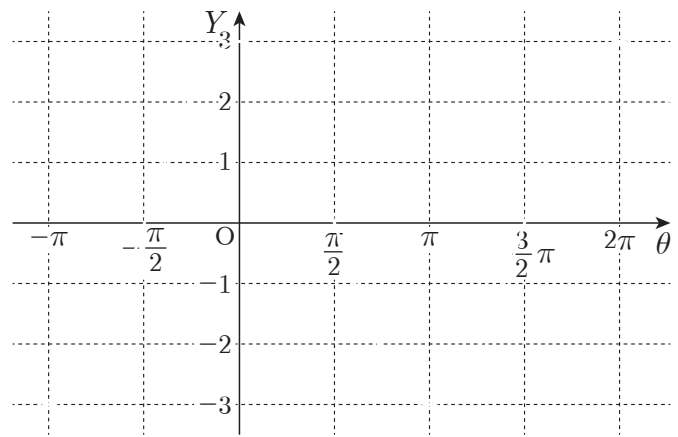
PRACTICE

◆ วาดกราฟต่อไปนี้และหาค่าคาบ

(1) $y = \frac{1}{2} \sin \theta$



(2) $y=3\cos\theta$



กราฟ $\sin k\theta$ และ $\cos k\theta$

TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติต่าง ๆ ของกราฟ $y=\sin k\theta$ และ $y=\cos k\theta$ สำหรับจำนวนจริง k และวิธีวาดกราฟดังกล่าว

STUDY GUIDE

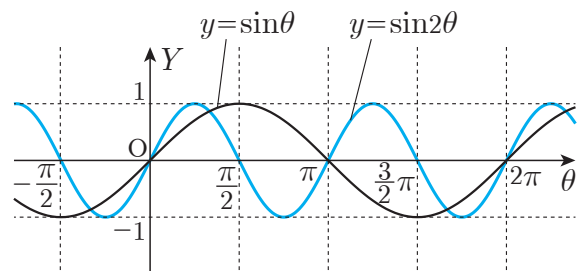
กราฟ $\sin k\theta$ และ $\cos k\theta$

กราฟ $y=\sin k\theta$ คือกราฟของ $y=\sin\theta$ คูณด้วย $\frac{1}{k}$ ในทิศทางของแกน θ เมื่อเสร็จสิ้นแล้ว คาบจะคูณด้วย $\frac{1}{k}$ เช่นกัน

เรายังสามารถวาดกราฟ $y=\cos k\theta$ ในลักษณะเดียวกันได้

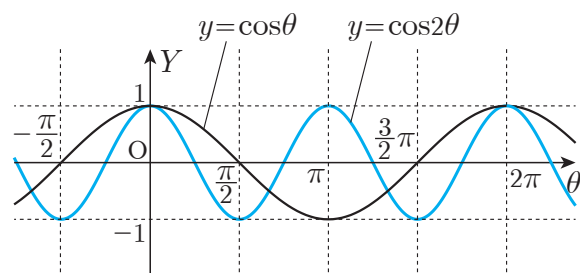
กราฟ $y=\sin k\theta$

- กราฟคือ $\frac{1}{k}$ เท่าในทิศทางของแกน θ
- คาบ $\frac{2\pi}{k}$



กราฟ $y=\cos k\theta$

- กราฟคือ $\frac{1}{k}$ เท่าในทิศทางของแกน θ
- คาบ $\frac{2\pi}{k}$



EXERCISE

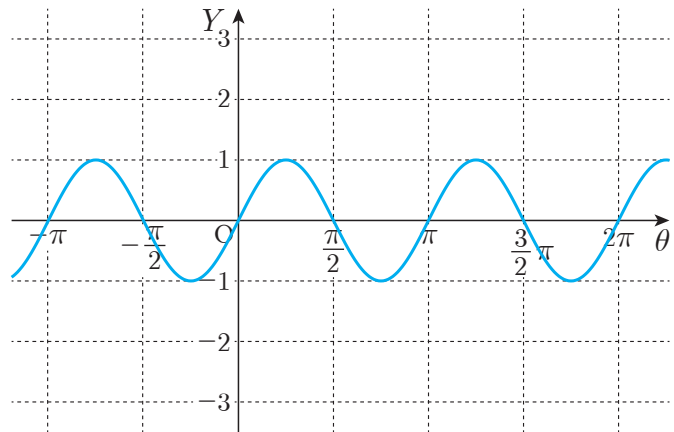
◆ วาดกราฟต่อไปนี้และหาค่าคาบ

(1) $y = \sin 2\theta$

กราฟของ $y = \sin 2\theta$ คือกราฟของ $y = \sin \theta$ คูณด้วย $\frac{1}{2}$ ในทิศทางของแกน θ ตามที่แสดงด้านขวา

คาบคือ π ซึ่งเป็นคาบสำหรับ $y = \sin \theta$ คูณด้วย $\frac{1}{2}$

คาบ π



check

เลือกโหมดตาราง จากนั้นจึงเปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด ≡ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก [Radian (เรเดียน)] กด OK กด AC

กด $\odot\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

$\sin$ (2) (x) $)$ EXE

$f(x) = \sin(2x)$

กด $\odot\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $g(x)$ (กำหนดค่า $g(x)$)] กด OK

$\sin$ (x) $)$ EXE

$g(x) = \sin(x)$

กด $\odot\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น): -2π , End (สิ้นสุด): 2π , Step (ขั้น): $\frac{\pi}{4}$]

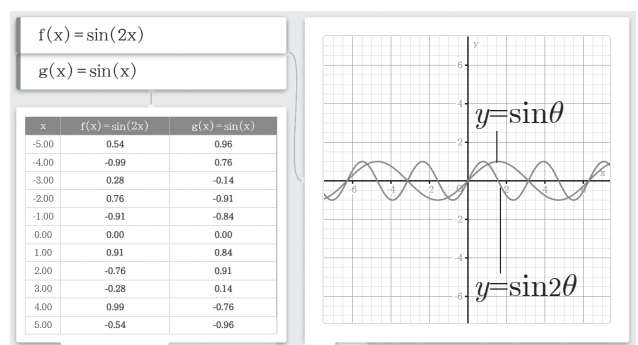
เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

Table Range
Start: -6.283
End: 6.2831
Step: 0.7853

กด $\uparrow$ (x) สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

$f(x)$ $g(x)$
1 -6.283 0 0
2 -5.497 1 0.7071
3 -4.712 0 1
4 -3.926 -1 0.7071
-6.283185307

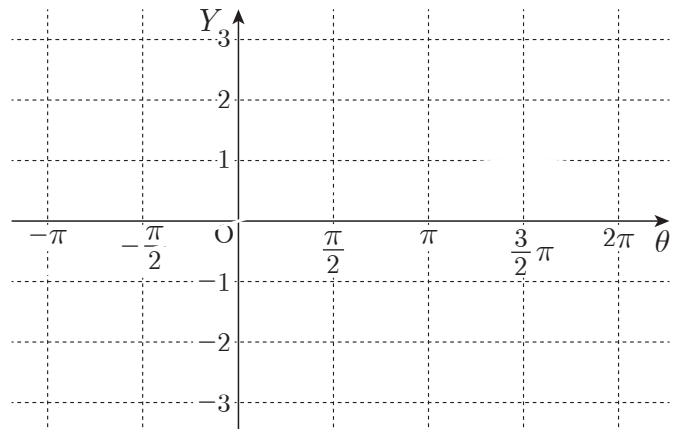
กราฟของ $\sin 2\theta$ คือกราฟของ $\sin \theta$ คูณด้วย $\frac{1}{2}$ ในทิศทางของแกน θ



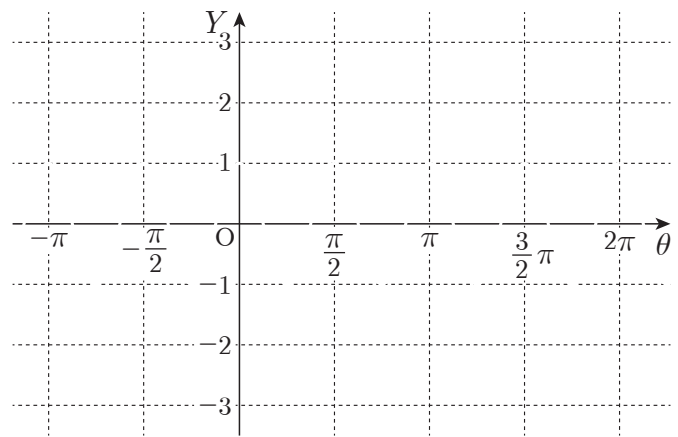
PRACTICE

◆ วาดกราฟต่อไปนี้และหาค่าคาบ

(1) $y = \sin \frac{1}{3} \theta$



(2) $y = \cos 4\theta$



กราฟ $\sin(\theta-p)$ และ $\cos(\theta-q)$

TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติต่าง ๆ ของกราฟ $y=\sin(\theta-p)$ และ $y=\cos(\theta-q)$ สำหรับจำนวนจริง p และ q และวิธีวาดกราฟดังกล่าว

STUDY GUIDE

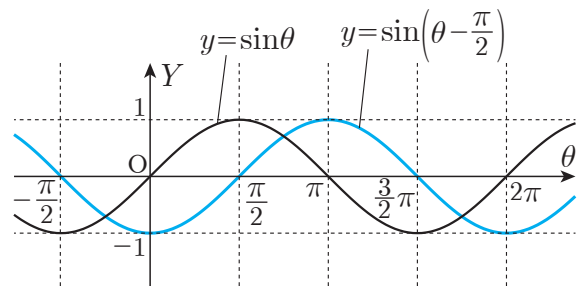
กราฟ $\sin(\theta-p)$ และ $\cos(\theta-q)$

กราฟของ $y=\sin(\theta-p)$ คือกราฟของ $y=\sin\theta$ ที่คู่ขนานกับ p ในทิศทางของแกน θ เมื่อเสร็จสิ้นแล้ว คาบจะยังคงไม่เปลี่ยนแปลงที่ 2π

นอกจากนี้ เรายังสามารถวาดกราฟ $y=\cos(\theta-q)$ ในลักษณะเดียวกันได้

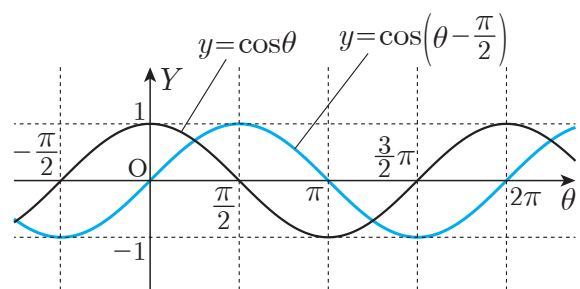
กราฟ $y=\sin(\theta-p)$

- กราฟถูกคู่ขนานกับ p ในทิศทางของแกน θ
- คาบ 2π



กราฟ $y=\cos(\theta-q)$

- กราฟถูกคู่ขนานกับ q ในทิศทางของแกน θ
- คาบ 2π



EXERCISE

วัดกราฟต่อไปนี้และหาค่าคาบ

$$(1) y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

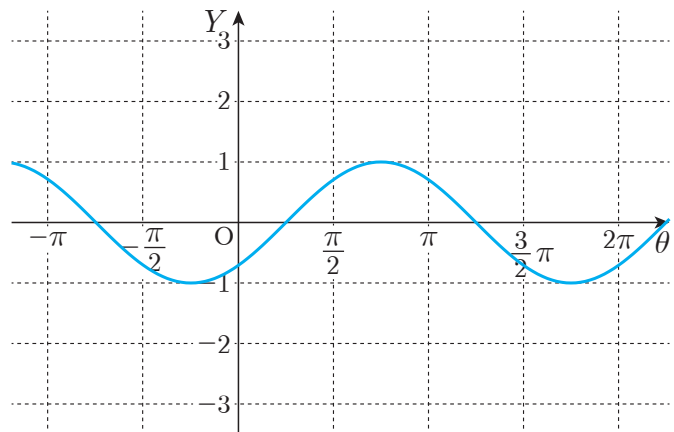
กราฟของ $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ คือกราฟของ

$y = \sin\theta$ ที่คู่ขนานกับ $\frac{\pi}{4}$ ในทิศทางของแกน θ

ตามที่แสดงด้านขวา

คาบคือ 2π ซึ่งเหมือนกับคาบของ $y = \sin\theta$

คาบ 2π



check

เลือกโหมดตาราง จากนั้นจึงเปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด MODE เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก

[Radian (เรเดียน)] กด OK กด AC

กด F1 เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))]

กด OK เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด OK $\sin(x) \text{ () } \text{EXE}$

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

กด F1 เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))]

กด OK เลือก [Define g(x) (กำหนดค่า g(x))] กด OK

$\sin(x) \text{ () } \text{EXE}$

$$g(x) = \sin(x)$$

กด F2 เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น): -2π , End (สิ้นสุด): 2π , Step (ขั้น): $\frac{\pi}{4}$]

เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

Table Range		
Start:	-6.283	
End :	6.2831	
Step :	0.7853	

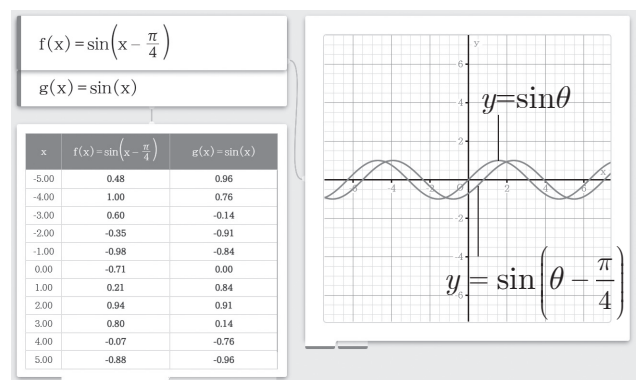
กด F3 X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

	%	f(x)	g(x)
1	-6.283	-0.707	0
2	-5.497	0	0.7071
3	-4.712	0.7071	1
4	-3.926	1	0.7071
-6.283185307			

กราฟของ $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ คือกราฟของ

$y = \sin\theta$ ที่คู่ขนานกับ $\frac{\pi}{4}$ ในทิศทางของ

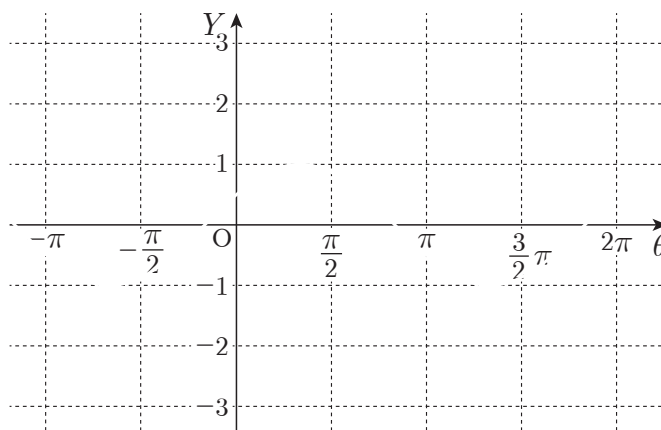
แกน θ



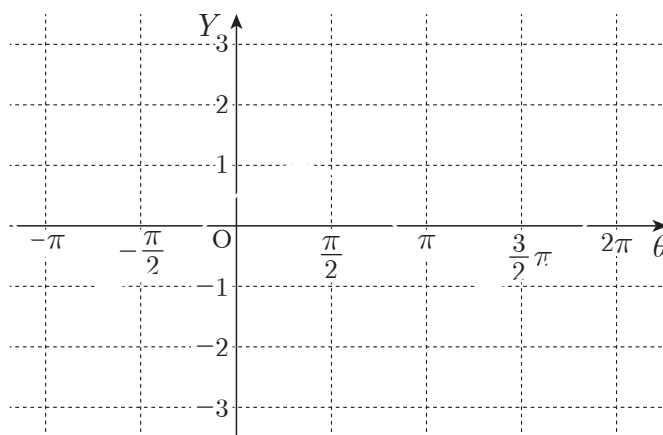
PRACTICE

◆ วาดกราฟต่อไปนี้และหาค่าคาบ

(1) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$



(2) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$



กราฟ $\tan\theta$

TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติต่าง ๆ ของกราฟสำหรับ $y=\tan\theta$ และวิธีวาดกราฟดังกล่าว

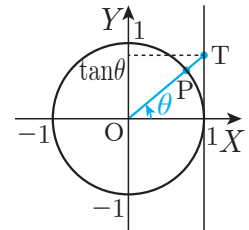
STUDY GUIDE

กราฟ $\tan\theta$

กำหนดให้ด้านสิ้นสุด OP ของมุม θ และ OP นั้นตัดขวางเส้นตรง $x=1$ ที่ T แล้วพิกัด y ของ T คือ $\tan\theta$ ดังนั้น เราจึงได้ $T(1, \tan\theta)$

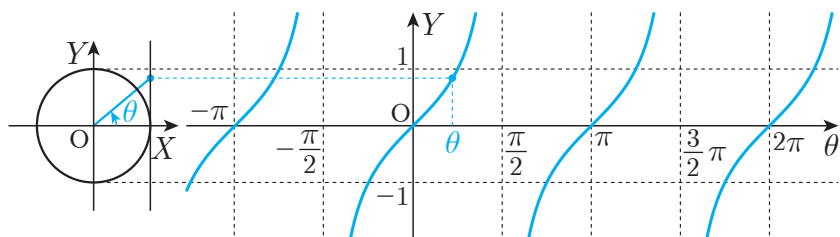
กราฟของ $y=\tan\theta$ คือกราฟของเส้น $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (โดยที่ n คือจำนวนเต็ม) ที่มี

เส้นกำกับ (เส้นกำกับคือเส้นตรงที่กราฟเกือบจะเป็นอนันต์)



กราฟของ $y=\tan\theta$

- สมมาตรกับจุดกำเนิด
- คาบ π
- เรนจ์จำนวนจริงทั้งหมด



กราฟต่าง ๆ

กราฟของ $y=a\tan\theta$ คือกราฟของ $y=\tan\theta$ คูณด้วย a ในทิศทางของแกน y เมื่อเสร็จสิ้นแล้ว คาบจะยังคงไม่เปลี่ยนแปลงที่ π

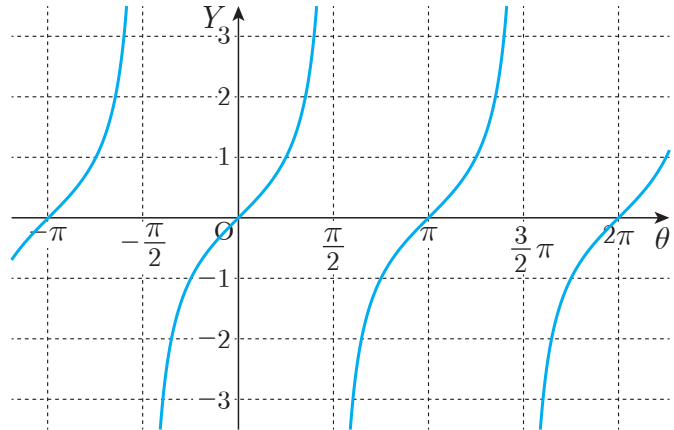
กราฟของ $y=\tan k\theta$ คือกราฟของ $y=\tan\theta$ คูณด้วย $\frac{1}{k}$ ในทิศทางของแกน θ เมื่อเสร็จสิ้นแล้ว คาบจะคูณด้วย $\frac{1}{k}$ เช่นกัน

กราฟของ $y=\tan(\theta-p)$ คือกราฟของ $y=\tan\theta$ ที่คู่ขนานกับ p ในทิศทางของแกน θ เมื่อเสร็จสิ้นแล้ว คาบจะยังคงไม่เปลี่ยนแปลงที่ π

EXERCISE

จงวาดกราฟของ $y=\tan\theta$ และหาค่าคาบ

คาบ π



check

เลือกโหมดตาราง จากนั้นจึงเปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\equiv$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก [Radian (เรเดียน)] กด OK กด AC

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

$(\tan)$ (X) $(\circ)$ (EXE)

$\sqrt{\square}$ $\text{f}(x)=\tan(x)$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

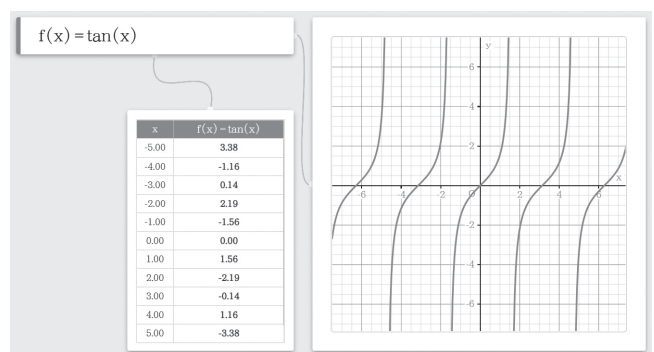
หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น): -2π , End (สิ้นสุด): 2π , Step (ขั้น): $\frac{\pi}{4}$]

เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

$\sqrt{\square}$ **Table Range**
Start: -6.283
End : 6.2831
Step : 0.7853

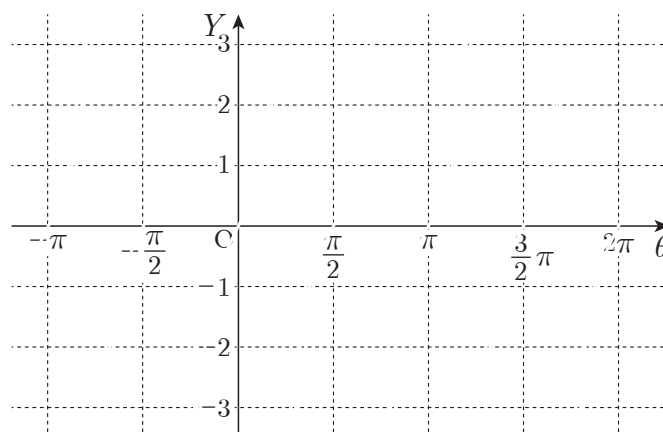
กด $\uparrow$ (X) สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

$\sqrt{\square}$ $\text{f}(x)=\tan(x)$
1 x 0
2 -5.497 1
3 -4.712 ERROR
4 -3.926 -1
-6.283185307



PRACTICE

◆ จงวาดกราฟของ $y=\tan 2\theta$ และหาค่าคาบ



สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติและสูตรต่าง ๆ สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ และวิธีใช้สมบัติและสูตรดังกล่าว

STUDY GUIDE

สูตรสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

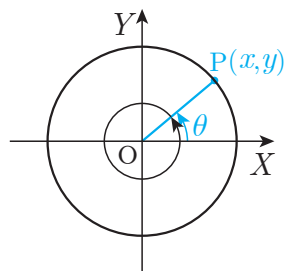
สูตรต่อไปนี้จะใช้ในฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(1) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\theta + 2n\pi$ (โดยที่ n คือจำนวนเต็ม)

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan \theta$$



explanation

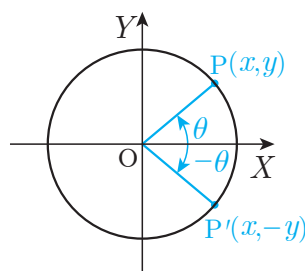
เมื่อ n คือจำนวนเต็ม ด้านสิ้นสุดของมุม $\theta + 2n\pi$ จะตรงกับด้านสิ้นสุดของมุม θ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงเท่ากันด้วย

(2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $-\theta$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$



explanation

ด้านสิ้นสุดของมุม θ และด้านสิ้นสุดของมุม $-\theta$ สมมาตรกับแกน x

ดังนั้น เครื่องหมายของพิกัด y ที่อินเตอร์เซกชันของ P และ P' ของด้านสิ้นสุดและวงกลมหนึ่งหน่วยจะอยู่ตรงข้ามกัน ไม่ว่าจะเป็นบวกหรือลบ

$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

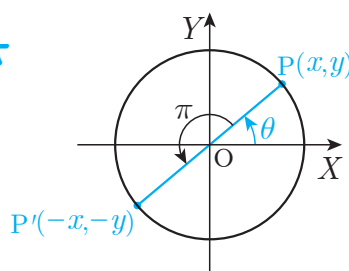
$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

(3) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\theta + \pi$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$



explanation

ด้านสิ้นสุดของมุม θ และด้านสิ้นสุดของมุม $\theta + \pi$ สมมาตรกับจุดกำเนิดพิกัด

ดังนั้น เครื่องหมายของพิกัด x และ y ที่อินเตอร์เซกชันของ P และ P' ของด้านสิ้นสุดและวงกลมหนึ่งหน่วยจะอยู่ตรงข้ามกัน ไม่ว่าจะเป็นบวกหรือลบ

$$\sin(\theta + \pi) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos \theta$$

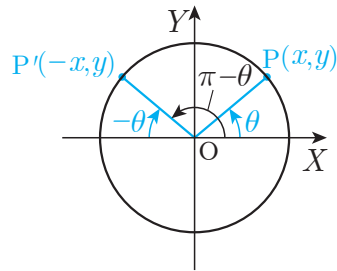
$$\tan(\theta + \pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

(4) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\pi - \theta$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$



explanation

ด้านสิ้นสุดของมุม $\pi - \theta$ และด้านสิ้นสุดของมุม θ สมมาตรกับแกน y

ดังนั้น เครื่องหมายของพิกัด x ที่อินเตอร์เซกชันของ P และ P' ของด้านสิ้นสุดและวงกลมหนึ่งหน่วยจะอยู่ตรงข้ามกัน ไม่ว่าจะเป็นบวกหรือลบ

$$\sin(\pi - \theta) = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

นอกจากนี้ยังสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้สูตร (2) และ (3)

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\{(-\theta) + \pi\} = -\sin(-\theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos\{(-\theta) + \pi\} = -\cos(-\theta) = -\cos \theta$$

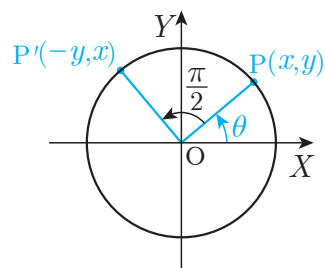
$$\tan(\pi - \theta) = \tan\{(-\theta) + \pi\} = \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

(5) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\theta + \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$$



explanation

ด้านสิ้นสุดของมุม $\theta + \frac{\pi}{2}$ คือด้านสิ้นสุดของมุม θ ที่หมุนรอบจุดกำเนิดของพิกัด $\frac{\pi}{2}$ เท่านั้น

ดังนั้น พิกัดที่อินเตอร์เซกชันของ P และ P' ของด้านสิ้นสุดและวงกลมหนึ่งหน่วยคือ $P(x, y)$ และ $P'(-y, x)$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta$$

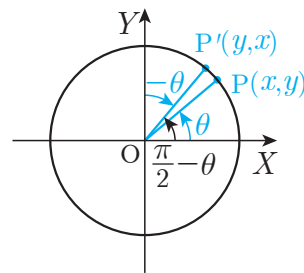
$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\tan \theta}$$

(6) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ $\frac{\pi}{2} - \theta$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$



explanation

ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{\pi}{2} - \theta$ คือด้านสิ้นสุดของมุม θ ที่หมุนรอบแกน y โดย $-\theta$ เท่านั้น

ดังนั้น พิกัดที่อินเตอร์เซกชันของ P และ P' ของด้านสิ้นสุดและวงกลมหนึ่งหน่วยคือ $P(x, y)$ และ $P'(y, x)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \theta}$$

นอกจากนี้ยังสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้สูตร (2) และ (5)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(-\theta) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(-\theta)} = -\frac{1}{-\tan \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$



proof

เลือกโหมดตาราง จากนั้นจึงเปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK ล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด $\odot$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก [Radian (เรเดียน)] กด OK กด AC

ยืนยันสูตร (1)

ยืนยันว่าค่าเมื่อ $n=3$ ใน $\sin(\theta+2n\pi)$ เท่ากับ $\sin\theta$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

$\sin \text{ (X) } + \text{ (6) } \uparrow \text{ (7) } \text{ () } \text{ EXE}$

$$f(x) = \sin(x+6\pi)$$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $g(x)$ (กำหนดค่า $g(x)$)] กด OK

$\sin \text{ (X) } \text{ () } \text{ EXE}$

$$g(x) = \sin(x)$$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น)]: $-\pi$, End (สิ้นสุด): 2π , Step (ขั้น): $\frac{\pi}{4}$

เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

Table Range			
Start: -3.141			
End : 6.2831			
Step : 0.7853			

เนื่องจากค่าของ $f(x)$ และ $g(x)$ นั้นเท่ากับค่า x ใด ๆ
เราจึงสามารถยืนยันได้ว่า $\sin(x+6\pi) = \sin x$

X	f(X)	g(X)	
1	-3.141	0	0
2	-2.356	-0.707	-0.707
3	-1.57	-1	-1
4	-0.785	-0.707	-0.707
-3.141592654			

ยืนยันสูตร (2)

ยืนยันว่า $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

$\sin \text{ (-) (X) } \text{ () } \text{ EXE}$

$$f(x) = \sin(-x)$$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $g(x)$ (กำหนดค่า $g(x)$)] กด OK

$\text{(-) } \sin \text{ (X) } \text{ () } \text{ EXE}$

$$g(x) = -\sin(x)$$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น)]: $-\pi$, End (สิ้นสุด): 2π , Step (ขั้น): $\frac{\pi}{4}$

เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

Table Range			
Start: -3.141			
End : 6.2831			
Step : 0.7853			

X	f(X)	g(X)	
1	-3.141	0	0
2	-2.356	0.7071	0.7071
3	-1.57	1	1
4	-0.785	0.7071	0.7071
-3.141592654			

ยืนยันสูตร (3)

ยืนยันว่า $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

$\cos \text{ (X) } + \text{ (7) } \text{ () } \text{ EXE}$

$$f(x) = \cos(x+\pi)$$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $g(x)$ (กำหนดค่า $g(x)$)] กด OK

$\text{(-) } \cos \text{ (X) } \text{ () } \text{ EXE}$

$$g(x) = -\cos(x)$$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น)]: $-\pi$, End (สิ้นสุด): 2π , Step (ขั้น): $\frac{\pi}{4}$

เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

Table Range			
Start: -3.141			
End : 6.2831			
Step : 0.7853			

X	f(X)	g(X)	
1	-3.141	1	1
2	-2.356	0.7071	0.7071
3	-1.57	0	0
4	-0.785	-0.707	-0.707
-3.141592654			

ยืนยันสูตร (5)

$$\text{ยืนยันว่า } \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] $\odot$

เลือก [Define $g(x)$ (กำหนดค่า $g(x)$)] กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น): $-\pi$, End (สิ้นสุด): 2π , Step (ขั้น): $\frac{\pi}{4}$]

เลือก [Execute (คำนวณ)] กด $\odot$

Calculator screen showing the definition of $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{2})$ and $g(x) = -\frac{1}{\tan(x)}$.

Table Range: Start: -3.141, End: 6.2831, Step: 0.7853.

Table of values:

x	f(x)	g(x)
1	-3.141	ERROR
2	-2.356	-1
3	-1.57	0
4	-0.785	1

Result: -3.141592654

EXERCISE

◆ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

(1) $\sin \frac{25}{4} \pi$

$$\sin \frac{25}{4} \pi = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{24}{4} \pi \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 6\pi \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

check

เปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นระบบเรเดียน และจากนั้นจึงตรวจสอบความถูกต้อง

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด $\odot$ เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด $\odot$ เลือก

[Radian (เรเดียน)] กด $\odot$ กด $\odot$

Calculator screen showing the calculation of $\sin\left(\frac{25}{4}\pi\right)$ resulting in $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\cos \frac{7}{6} \pi$

$$\cos \frac{7}{6} \pi = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{6}{6} \pi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

check

Calculator screen showing the calculation of $\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ resulting in $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$

$$\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = -\tan \frac{4}{3} \pi = -\tan \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}$$

check

Calculator screen showing the calculation of $\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$ resulting in $-\sqrt{3}$.

PRACTICE

◆ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

(1) $\cos \frac{13}{3} \pi$

(2) $\sin \frac{4}{3} \pi$

(3) $\cos \left(-\frac{5}{6} \pi \right)$

(4) $\tan \left(-\frac{7}{6} \pi \right)$

สมการและอสมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแก้สมการและอสมการที่เกี่ยวข้องกับ $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$

STUDY GUIDE

สมการและอสมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สำหรับการแก้สมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาพิกัดของอินเตอร์เซกชันบนกราฟของเงื่อนไขและวงกลมหนึ่งหน่วย จากนั้นจึงหามุมที่ตรงตามเงื่อนไขเหล่านั้น

สมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\begin{cases} \sin\theta = \alpha \rightarrow \text{เชื่อมจุดกำเนิดกับอินเตอร์เซกชัน P ของวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีเส้น } y = \alpha \\ \cos\theta = \alpha \rightarrow \text{เชื่อมจุดกำเนิดกับอินเตอร์เซกชัน P ของวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีเส้น } x = \alpha \\ \tan\theta = \alpha \rightarrow \text{เชื่อมจุดกำเนิดกับอินเตอร์เซกชัน P ของเส้น } y = \alpha \text{ และ } x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ จงหามุม θ ที่เกิดจากด้านสิ้นสุด OP

อสมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ขั้นตอนแรก ให้สมมติว่าอสมการคือสมการ จากนั้นวาดวงกลมหนึ่งหน่วยและหามุมที่ตรงกับวงกลมหนึ่งหน่วยดังกล่าว ขั้นตอนถัดไป ให้พิจารณาเรนจ์ที่ตรงกับอสมการบนวงกลมหนึ่งหน่วย จากนั้นหาเรนจ์ของมุมที่ตรงกับอสมการดังกล่าว

อสมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แทนที่เครื่องหมายอสมการด้วยเครื่องหมายเท่ากับ และจากนั้นหา θ หาเรนจ์ของ θ จากความสัมพันธ์ของอสมการบนวงกลมหนึ่งหน่วย

EXERCISE

1 จงหาค่า θ ที่ตรงกับสมการต่อไปนี้

(1) เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ แล้ว $2\sin\theta - 1 = 0$

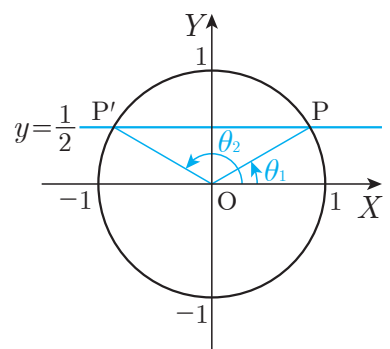
จาก $2\sin\theta - 1 = 0$ เราจะได้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

วงกลมหนึ่งหน่วยและจุดตัด $y = \frac{1}{2}$ ที่ P และ P' ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวา

มุม θ ที่เราหาคือมุม θ_1 ที่เกิดจากด้านสิ้นสุด OP และมุม θ_2 ที่เกิดจาก OP'

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = \pi - \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$



check

เปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน และจากนั้นจึงตรวจสอบความถูกต้อง

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด $\odot$

กด $\oplus$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด $\odot$ เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด $\odot$ เลือก [Radian (เรเดียน)] กด $\odot$ กด $\odot$

คำนวณ θ_1 โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

หา θ_2 ด้วยวิธีเดียวกับด้านบน โดยการคำนวณ $\pi - \theta_1$

$\uparrow$ $\sin$ $($ $\frac{1}{2}$ $)$ $\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

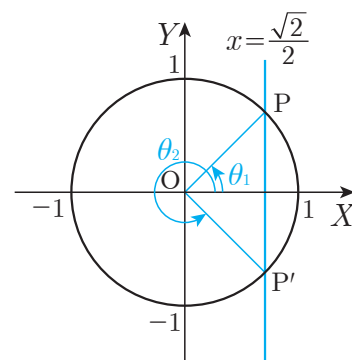
(2) เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ จากนั้น $2 \cos \theta = \sqrt{2}$

จาก $2 \cos \theta = \sqrt{2}$ เราจะได้ $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

วงกลมหนึ่งหน่วยและจุดตัด $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ที่ P และ P' ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวา

มุม θ ที่เราหาได้คือมุม θ_1 ที่เกิดจากด้านสิ้นสุด OP และ มุม θ_2 ที่เกิดจาก OP'

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = 2\pi - \theta_1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$



$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$$

check

เปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน และจากนั้นจึงตรวจสอบความถูกต้อง

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

กด $\ominus$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก

[Radian (เรเดียน)] กด OK กด AC

คำนวณ θ_1 โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

$\uparrow$ $\cos$ $\sqrt{\square}$ $\frac{2}{\square}$ $>$ EXE

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \frac{1}{4}\pi$$

หา θ_2 ด้วยวิธีเดียวกับด้านบน โดยการคำนวณ $2\pi - \theta_1$

(3) เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$

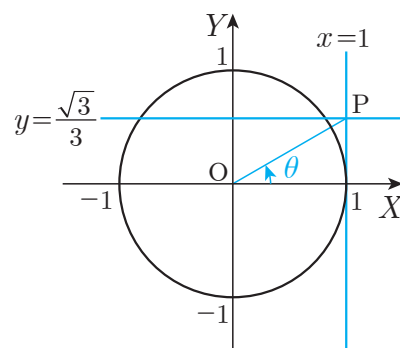
จาก $\sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$ เราจะได้ $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ และจุดตัด $x=1$ ที่ P ตามที่แสดงในรูปภาพด้านขวา

เราจะพบมุม θ ซึ่งเป็นมุมที่เกิดจากด้านสิ้นสุด OP

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$



check

เปลี่ยนหน่วยของมุมเป็นหน่วยวัดมุมเรเดียน และจากนั้นจึงตรวจสอบความถูกต้อง

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

กด $\ominus$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก

[Radian (เรเดียน)] กด OK กด AC

คำนวณ θ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

$\uparrow$ $\tan$ $\frac{1}{\square}$ $\sqrt{\square}$ $\frac{3}{\square}$ $>$ $>$ EXE

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \frac{1}{6}\pi$$

PRACTICE

① จงหาค่า θ ที่ตรงกับสมการต่อไปนี้

(1) เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ จากนั้น $2\sin \theta + \sqrt{3} = 0$

(2) เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ จากนั้น $2\cos \theta - 1 = 0$

(3) เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\tan \theta = 1$

EXERCISE

② จงหาเรนจ์ของ θ ที่ตรงกับอสมการต่อไปนี้

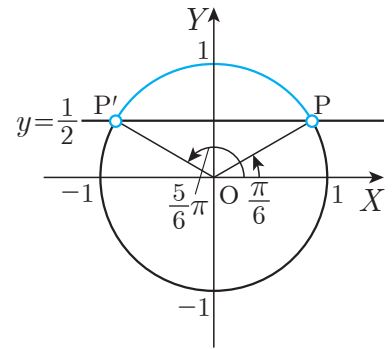
(1) เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ จากนั้น $\sin \theta > \frac{1}{2}$

สำหรับ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ด้วยการหาค่าของ θ เราจะได้ $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

จากรูปภาพด้านขวา เราจะได้ $\sin \theta > \frac{1}{2}$ ดังนั้นเรนจ์ของ θ ก็คือ

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

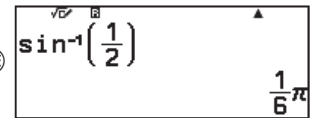
$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$



check

คำนวณ θ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

↑ sin 1) >) EXE



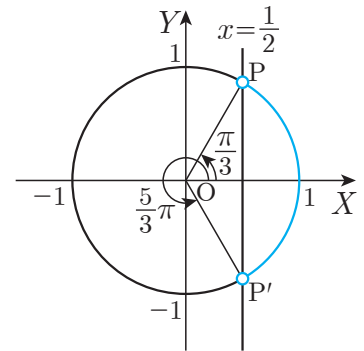
(2) เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ จากนั้น $\cos \theta > \frac{1}{2}$

สำหรับ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ด้วยการหาค่าของ θ เราจะได้ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

จากรูปภาพด้านขวา เราจะได้ $\cos \theta > \frac{1}{2}$ ดังนั้นเรนจ์ของ θ คือ $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$

และ $\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

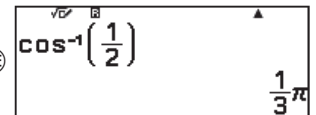
$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$$



check

คำนวณ θ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

↑ cos 1) >) EXE



(3) เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $-\sqrt{3} \leq \tan \theta \leq 1$

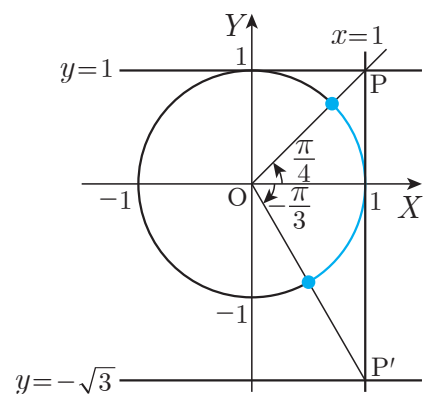
สำหรับ $\tan \theta = -\sqrt{3}$ ด้วยการหาค่าของ θ เราจะได้ $\theta = -\frac{\pi}{3}$

สำหรับ $\tan \theta = 1$ ด้วยการหาค่าของ θ เราจะได้ $\theta = \frac{\pi}{4}$

จากรูปภาพด้านขวา เราจะได้ $-\sqrt{3} \leq \tan \theta \leq 1$ ดังนั้นเรนจ์ของ θ คือ

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

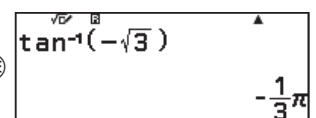
$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$



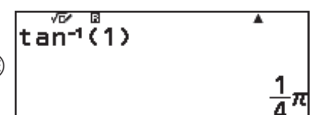
check

คำนวณ θ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

↑ tan -sqrt(3)) >) EXE



↑ tan 1) >) EXE



PRACTICE

๒ จงหาเรนจ์ของ θ ที่ตรงกับอสมการต่อไปนี้

(1) เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ จากนั้น $\sin \theta > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ จากนั้น $\cos \theta > -\frac{1}{2}$

(3) เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan \theta \leq \sqrt{3}$

เอกลักษณะผลบวกและผลต่างสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

TARGET

การทำความเข้าใจเอกลักษณะผลบวกและผลต่างสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

STUDY GUIDE

เอกลักษณะผลบวกและผลต่างสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก $\alpha + \beta$ และผลต่าง $\alpha - \beta$ ของมุม 2 มุม α และ β สามารถแสดงโดยฟังก์ชันตรีโกณมิติของ α และ β ได้ดังต่อไปนี้ ความสัมพันธ์นี้เรียกว่า **เอกลักษณะผลบวกและผลต่าง**

เอกลักษณะผลบวกและผลต่างสำหรับไซน์

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

เอกลักษณะผลบวกและผลต่างสำหรับโคไซน์

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

เอกลักษณะผลบวกและผลต่างสำหรับแทนเจนต์

$$(5) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$(6) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

explanation

การพิสูจน์เอกลักษณะผลบวกและผลต่างสำหรับไซน์และโคไซน์

ในรูปภาพด้านขวา พิกัด y ของจุด A คือ $\sin(\alpha + \beta)$

ดังนั้น เราจึงได้ $\sin(\alpha + \beta) = BC = BD + DC$

จาก $AD = \sin\alpha$ เราจะได้ $BD = AD \cos\beta = \sin\alpha \cos\beta$

จาก $OD = \cos\alpha$ เราจะได้ $DC = OD \sin\beta = \cos\alpha \sin\beta$

ดังนั้น เราจึงได้ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (1)

ในลักษณะเดียวกัน พิกัด x ของจุด A คือ $\cos(\alpha + \beta)$

ดังนั้น เราจึงได้ $\cos(\alpha + \beta) = -OE = OC - EC = OC - AB$

จาก $OD = \cos\alpha$ เราจะได้ $OC = OD \cos\beta = \cos\alpha \cos\beta$

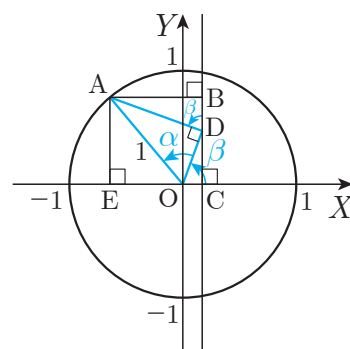
จาก $AD = \sin\alpha$ เราจะได้ $AB = AD \sin\beta = \sin\alpha \sin\beta$

ดังนั้น เราจึงได้ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (3)

จาก $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ และ $\cos(-\beta) = \cos\beta$ เราสามารถแทนที่ β ด้วย $-\beta$ ในสูตร (1) และ (3) ได้ตามลำดับ

โดยที่เราจะได้ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (2)

โดยที่เราจะได้ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (4)



การพิสูจน์เอกลักษณ์ผลบวกและผลต่างสำหรับแทนเจนต์

$$\text{จาก } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ เราจะได้ } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

หารตัวส่วนและตัวเศษของสูตรนี้ด้วย $\cos \alpha \cos \beta$ ตามลำดับ

$$\text{โดยที่เราจะได้ } \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \text{ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (5)}$$

เราจะได้ $\tan(\alpha - \beta)$ โดยการแทนที่ β ด้วย $-\beta$ ในสูตร (5)

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$



proof

ยืนยันสูตร (1)

(a) ยืนยันสูตรเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่างโดยแทนที่ค่าตัวเลขที่เหมาะสมใน

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

แทนที่ $\alpha = 30^\circ$ และ $\beta = 60^\circ$ ในสูตรด้านบน

$$(\text{ด้านซ้าย}) = \sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

$$(\text{ด้านขวา}) = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

ดังนั้น เราจึงสามารถยืนยันความถูกต้องของสูตรได้เนื่องจากด้านซ้ายและด้านขวาเหมือนกัน

(b) ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ของคุณเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่าง

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

กำหนดให้หน่วยของมุมเป็นองศา

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด $\odot$ เลือก

[Angle Unit (หน่วยมุม)] กด $\odot$ เลือก [Degree (องศา)] กด $\odot$ กด $\odot$

	$\%$	$f(x)$	$g(x)$
1			
2			
3			
4			

$f(x)/g(x) : \text{None}$

แสดง $\sin(x + 45^\circ) = \sin x \cos 45^\circ + \cos x \sin 45^\circ$ เพื่อดำเนินการนี้ ให้ป้อนข้อมูล $f(x) = \sin(x + 45^\circ)$,

$g(x) = \sin x \cos 45^\circ + \cos x \sin 45^\circ$ และแสดงโดยการคำนวณว่าค่าของ $f(x)$ และ $g(x)$ นั้นเท่ากับค่า x ใด ๆ

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$

$\sin(x) + 45 \rightarrow \text{EXE}$

	$\%$	$f(x)$	$g(x)$
1			
2			
3			
4			

$f(x) = \sin(x + 45)$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด $\odot$ เลือก [Define $g(x)$

(กำหนดค่า $g(x)$)] กด $\odot$

$\sin(x) \cos 45 + \cos(x) \sin 45 \rightarrow \text{EXE}$

	$\%$	$f(x)$	$g(x)$
1			
2			
3			
4			

$g(x) = \sin(x) \cos(45)$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น):0, End (สิ้นสุด):180, Step (ขั้น):15]

เลือก [Execute (คำนวณ)] กด $\odot$

	$\%$	$f(x)$	$g(x)$
1			
2			
3			
4			

Table Range
End : 180
Step : 15
Execute

	$\%$	$f(x)$	$g(x)$
1			
2			
3			
4			

0

EXERCISE

◆ จงหาค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้

(1) $\sin 105^\circ$

$$\begin{aligned} &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$



check

$\sin 105^\circ$

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

$\sin$ (1) (0) (5) () EXE

$$\sin(105) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos(-15^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \cos(30^\circ - 45^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

check

$\cos(-15^\circ)$

$\cos$ (-) (1) (5) () EXE

$$\cos(-15) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\cos 105^\circ$

$$\begin{aligned} &= \cos(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

check

$\cos 105^\circ$

$\cos$ (1) (0) (5) () EXE

$$\cos(105) = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

PRACTICE

◆ จงหาค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้

(1) $\sin 75^\circ$

(2) $\cos 75^\circ$

(3) $\sin 15^\circ$

สูตรมุมสองเท่า

TARGET

การทำความเข้าใจสูตรมุมสองเท่า

STUDY GUIDE

สูตรมุมสองเท่า

ด้วยเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่าง (1), (3) และ (5) โดยให้ $\beta = \alpha$ เราจะได้สูตรมุมสองเท่าดังต่อไปนี้

$$(1) \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

explanation

การพิสูจน์สูตร (1)

กำหนดให้ $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ เราจะได้สูตร (1)

การพิสูจน์สูตร (2)

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \dots (i)$$

จาก $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ แล้วเป็น $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ เราสามารถแทนที่ใน (i) เพื่อที่จะได้

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

จาก $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ แล้วเป็น $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ เราสามารถแทนที่ใน (i) เพื่อที่จะได้

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

การพิสูจน์สูตร (3)

โดยที่เราจะได้ $\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (3)



proof

ยืนยันสูตร (1)

กำหนดให้หน่วยของมุมเป็นองศา

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด EQ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก [Degree (องศา)] กด OK กด AC

กด DEF เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อนค่า $f(x) = \sin 2x$ แล้ว ให้กด EXE

ให้ป้อนค่า $g(x) = 2\sin x \cos x$ ด้วยวิธีการเดียวกัน

กด DEF เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น):0, End (สิ้นสุด):180, Step (ขั้น):10] เลือก

[Execute (คำนวณ)] กด EXE

x	$f(x)$	$g(x)$
10	0.342	0.342
20	0.6427	0.6427
30	0.866	0.866

จากจุดนี้ เราจะเห็นว่า $f(x) = \sin 2x$ และ $g(x) = 2\sin x \cos x$ นั้นเท่ากับค่า x ต่าง ๆ

EXERCISE

◆ จงหาค่าต่อไปนี้เมื่อ $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ และ α คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 3

(1) $\sin 2\alpha$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

α คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 3 และเนื่องจาก $\cos \alpha < 0$ เราจึงได้ $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{ดังนั้น เราจึงได้ } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

(2) $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9}$$

OTHER METHODS

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

PRACTICE

◆ จงหาค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้

(1) ค่าสำหรับ $\cos 2\alpha$ เมื่อ α คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 2 และ $\sin \alpha = \frac{1}{4}$

(2) ค่าสำหรับ $\tan 2\alpha$ เมื่อ α คือมุมหนึ่งในจตุภาคที่ 2 และ $\tan \alpha = -\sqrt{5}$

เอกลักษณ์ของครึ่งมุม

TARGET

การทำความเข้าใจเอกลักษณ์ของครึ่งมุม

STUDY GUIDE

เอกลักษณ์ของครึ่งมุม

เราสามารถหาเอกลักษณ์ของครึ่งมุมได้จากสูตรมุมสองเท่า

$$(1) \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$(2) \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$(3) \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

explanation

การพิสูจน์สูตร (1)

จาก $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ เราจะได้ $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

โดยการแทนที่ α ในสูตรนี้ด้วย $\frac{\alpha}{2}$ เราจะได้ $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (1)

การพิสูจน์สูตร (2)

จาก $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ เราจะได้ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

โดยการแทนที่ α ในสูตรนี้ด้วย $\frac{\alpha}{2}$ เราจะได้ $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (2)

การพิสูจน์สูตร (3)

โดยที่เราจะได้ $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ ซึ่งเราได้มาจากสูตร (3)



proof

ยืนยันสูตร (1)

แทนที่ค่าตัวเลขที่เหมาะสมลงในเอกลักษณ์ของครึ่งมุม $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ เพื่อยืนยันค่า

แทนที่ $\alpha = 60^\circ$ ในสูตรด้านบน

$$(\text{ด้านซ้าย}) = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{60^\circ}{2} = \sin^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(\text{ด้านขวา}) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \cos 60^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น เราจึงสามารถยืนยันความถูกต้องของสูตรได้เนื่องจากด้านซ้ายและด้านขวาเหมือนกัน

ยืนยันสูตร (2)

ใช้ฟังก์ชัน Table (ตาราง) ในเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ของคุณเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของเอกลักษณ์

$$\text{ของครึ่งมุม } \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

กำหนดให้หน่วยของมุมเป็นองศา

กด 2nd เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด 2nd CLR

กด MODE เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก

[Degree (องศา)] กด OK กด AC

กด 2nd เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

COS (X) 2nd F2 (X) 2nd F1 2nd F2 EXE

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

กด 2nd เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)]

กด OK เลือก [Define $g(x)$ (กำหนดค่า $g(x)$)] กด OK

2nd F1 $+$ COS (X) 2nd F1 2nd F2 EXE

$$g(x) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

กด 2nd เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อนค่า [Start (เริ่มต้น):0, End (สิ้นสุด):90, Step (ขั้น):10]

เลือก [Execute (คำนวณ)] กด EXE

Table Range
Start:0
End :90
Step :10

	x	$f(x)$	$g(x)$
1			
2	10	0.9924	0.9924
3	20	0.9698	0.9698
4	30	0.9333	0.9333



เราสามารถยืนยันความถูกต้องของเอกลักษณ์ของครึ่งมุมได้เนื่องจากค่าสำหรับ $f(x)$ และ $g(x)$ นั้นเหมือนกัน

EXERCISE

◆ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ จงหาค่าของ $\cos \frac{\alpha}{2}$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

จาก $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ เนื่องจาก $\cos \alpha > 0$ เราจึงได้ $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

$$\text{ดังนั้น เราจึงได้ } \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{12}{13}}{2} = \frac{25}{26}$$

จาก $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ เนื่องจาก $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ เราจึงได้ $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$

$$\text{ดังนั้น เราจึงได้ } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$\frac{5\sqrt{26}}{26}$$



check

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = 22.61\dots$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0.98\dots = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

$\uparrow$ sin 5 $\frac{\square}{\square}$ 1 3 $\frac{\square}{\square}$) EXE

$$\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$$

22.61986495

cos Ans $\frac{\square}{\square}$ 2 $\frac{\square}{\square}$) EXE

$$\cos\left(\frac{\text{Ans}}{2}\right)$$

0.9805806757

PRACTICE

◆ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ จงหาค่าของ $\cos \frac{\alpha}{2}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติประกอบ

TARGET

การเรียนรู้วิธีใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติประกอบและเวลาที่ใช้

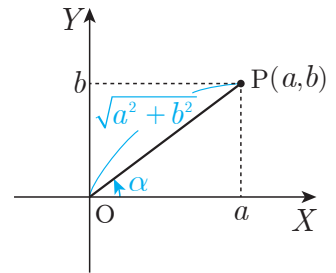
STUDY GUIDE

ฟังก์ชันตรีโกณมิติประกอบ

ผลรวมของนิพจน์เชิงเส้น $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ สามารถแปลงได้เป็นนิพจน์ไซน์เท่านั้น (หรือโคไซน์เท่านั้น) ซึ่งจะเรียกว่า **ฟังก์ชันตรีโกณมิติประกอบ** เราสามารถแสดงสูตรประกอบได้ตามที่แสดงด้านล่าง

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{อย่างไรก็ตาม } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



explanation

โดยให้ α เป็นมุมระหว่างแกน x และเส้น OP ที่เกิดจากจุด $P(a, b)$ และจุดกำเนิดพิกัด O

กำหนดให้ $\sqrt{a^2 + b^2} = r$ จากนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราจะได้ $a = r \cos \alpha$ และ $b = r \sin \alpha$

ดังนั้น เราจึงได้ $a \sin \theta + b \cos \theta = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta = r(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha)$

จากเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่างสำหรับไซน์ เรามี $r(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) = r \sin(\theta + \alpha)$

EXERCISE

◆ แปลง $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ ในรูปแบบ $r \sin(\theta + \alpha)$

จาก $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ โดยการแยกตัวประกอบ 2 ออกจากสมการด้านบน เราจะได้

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$$

จัดเรียงผลที่ได้ในรูปแบบของเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่างไซน์เพื่อที่จะได้ $2 \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{2} + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

α ใน $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ คือ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ดังนั้นเราจึงใช้สูตรประกอบ

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\underline{2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}$$

PRACTICE

◆ แปลงนิพจน์ต่อไปนี้เป็นรูปแบบ $r\sin(\theta+\alpha)$

(1) $\sin\theta+\cos\theta$

(2) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

(3) $2\sin\theta-4\cos\theta$

สูตรสำหรับผลบวกและผลคูณ

TARGET

การทำความเข้าใจสูตรผลบวกและผลคูณสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

STUDY GUIDE

สูตรสำหรับผลบวกและผลคูณ

โดยใช้เอกลักษณ์ผลบวกและผลต่าง เราสามารถหาสูตรสำหรับการแปลงผลคูณเป็นผลบวก และสูตรสำหรับการแปลงผลบวกเป็นผลคูณได้ ซึ่งเราจะเรียกว่าสูตรสำหรับผลบวกและผลคูณ ตามที่แสดงด้านล่าง

สูตรเปลี่ยนผลคูณเป็นผลบวก

$$(1) \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(2) \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(3) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$(4) \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

explanation

ทฤษฎีบทการบวก (1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

ทฤษฎีบทการบวก (2) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

โดยการนำผลบวกของนิพจน์ 2 ทั้งสองข้างมาจัดเรียงใหม่ เราจะได้สูตรเปลี่ยนผลคูณเป็นผลบวก (1)

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

และด้วยวิธีการเดียวกัน เราก็สามารถหาสูตรที่เหลือได้

สูตรเปลี่ยนผลบวกเป็นผลคูณ

$$(5) \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$(6) \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$(7) \quad \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$(8) \quad \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

explanation

โดยให้ $\alpha + \beta = A$ และ $\alpha - \beta = B$ เราจะได้ $\alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2}$ ซึ่งเรานำมาแทนที่ในสูตรเปลี่ยนผลบวกเป็นผลบวก (1)

$$\begin{aligned} \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= \frac{1}{2} (\sin A + \sin B) \\ \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

และด้วยวิธีการเดียวกัน เราก็สามารถหาสูตรที่เหลือได้

EXERCISE

◆ จงหาค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้โดยใช้สูตรเปลี่ยนผลบวกเป็นผลคูณ

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin 75^\circ \cos 15^\circ &= \frac{1}{2} \{ \sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ) \} = \frac{1}{2} (\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$



check

กำหนดให้หน่วยของมุมเป็นองศา

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

กด ≡ เลือก [Calc Settings (การตั้งค่าการคำนวณ)] กด OK เลือก [Angle Unit (หน่วยมุม)] กด OK เลือก

[Degree (องศา)] กด OK กด AC

$\sin 75^\circ \cos 15^\circ$

$\odot \sin \odot 7 \odot 5 \odot \odot \odot \cos \odot 1 \odot 5 \odot \odot \odot \text{EXE}$

$$\begin{array}{|l} \sqrt{\square} \square \\ \sin(75) \cos(15) \\ \hline \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \cos 45^\circ \cos 15^\circ &= \frac{1}{2} \{ \cos(45^\circ + 15^\circ) + \cos(45^\circ - 15^\circ) \} = \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 30^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

check

$\cos 45^\circ \cos 15^\circ$

$\odot \cos \odot 4 \odot 5 \odot \odot \odot \cos \odot 1 \odot 5 \odot \odot \odot \text{EXE}$

$$\begin{array}{|l} \sqrt{\square} \square \\ \cos(45) \cos(15) \\ \hline \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \sin 75^\circ + \sin 15^\circ \\
 &= 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}$$

check

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$$

(sin) (7) (5) (°) (+) (sin) (1) (5) (°) (EXE)

$$\sin(75) + \sin(15) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \cos 105^\circ - \cos 15^\circ \\
 &= -2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\
 &= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

check

$$\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$$

(cos) (1) (0) (5) (°) (-) (cos) (1) (5) (°) (EXE)

$$\cos(105) - \cos(15) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

PRACTICE

◆ จงหาค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้โดยใช้สูตรเปลี่ยนผลบวกเป็นผลคูณ

(1) $\cos 75^\circ \sin 45^\circ$

(2) $\sin 105^\circ \sin 15^\circ$

(3) $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$

(4) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$