

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ การคูณเมทริกซ์

เรื่อง สมบัติการคูณระหว่างเมทริกซ์

เวลา 50 นาที

สาระสำคัญ

บทนิยามที่ 7 การคูณเมทริกซ์

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [a_{ij}]_{p \times q}$

ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB จะนิยามได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$ และเมทริกซ์ผลคูณ AB

จะมีขนาด $m \times q$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, q\}$

ทฤษฎีบทที่ใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ มีดังต่อไปนี้

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ จะได้ว่า

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
3. $A(B + D) = AB + AD$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$
4. $(A + E)B = AB + EB$ เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

จากข้อ 1 ทำให้สามารถแทน $A(BC)$ และ $(AB)C$ ด้วย ABC โดยไม่เกิดความสับสน

สาระจำนวนและพีชคณิต

ใช้นิพจน์ สมการ อสมการและเมทริกซ์ อธิบายความสัมพันธ์ หรือช่วยแก้ปัญหาที่กำหนดให้

ผลการเรียนรู้

เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณของเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์เมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็น จำนวนนับที่ไม่เกินสาม

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนอธิบายสมบัติเกี่ยวกับการคูณระหว่างเมทริกซ์
2. นักเรียนแก้ปัญหาเกี่ยวกับการคูณระหว่างเมทริกซ์

สาระการเรียนรู้

การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนการคูณเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

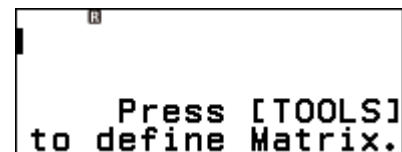
ตัวอย่างที่ 1 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (ไม่ใช่เครื่องคำนวณ)

วิธีทำ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 1) + (2 \times 5) & (3 \times 3) + (2 \times 2) \\ (1 \times 1) + (3 \times 5) & (1 \times 3) + (3 \times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (ใช้เครื่องคำนวณ)

วิธีทำ

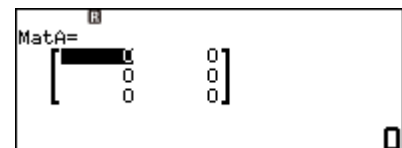
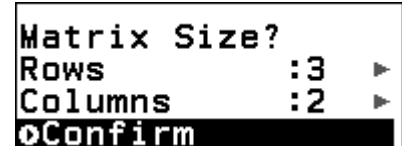
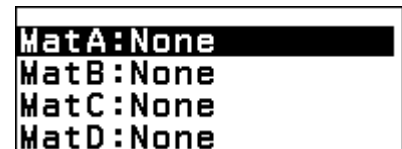
1) เลือกเมนู Matrix แล้วกดปุ่ม OK หรือ EXE



2) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ สร้างเมทริกซ์ A โดยกดปุ่ม TOOLS

แล้วเลือก MatA: None แล้วกดปุ่ม OK จากนั้นตั้งค่าเมทริกซ์

โดยกำหนดให้เป็น 3 แถว 2 หลัก แล้วกด Confirm

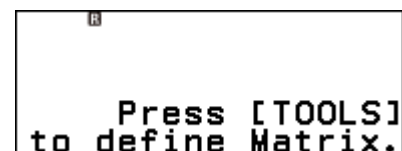
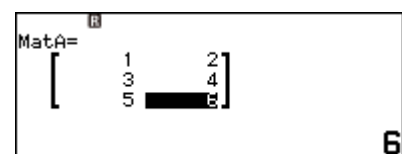


3) ป้อนค่าของสมาชิกแต่ละแถว แต่ละหลัก

① EXE ② EXE ③ EXE ④ EXE ⑤ EXE ⑥ EXE

เมื่อกดปุ่ม EXE จะปรากฏหน้าจอตั้งภาพ ซึ่งแสดงว่า

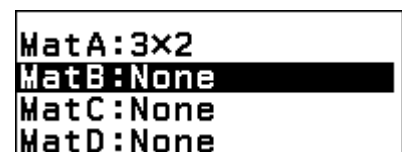
เครื่องคำนวณทำการเก็บค่าของ เมทริกซ์ A สำเร็จ



4) กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ สร้างเมทริกซ์ B โดยกดปุ่ม TOOLS

แล้วเลือก MatB: None แล้วกดปุ่ม OK จากนั้นตั้งค่าเมทริกซ์

โดยกำหนดให้เป็น 2 แถว 2 หลัก แล้วกด Confirm



- 5) ป้อนค่าของสมาชิกแต่ละแถว แต่ละหลัก ① (EXE) ③ (EXE) ⑤ (EXE) ② (EXE) เมื่อกดปุ่ม EXE จะปรากฏหน้าจอตั้งภาพ ซึ่งแสดงว่าเครื่องคำนวณทำการเก็บค่าของ เมทริกซ์ B สำเร็จ

- 6) นำเมทริกซ์ A มาคูณกับเมทริกซ์ B โดยการกดปุ่ม CATALOG เลือก Matrix แล้วเลือกเมทริกซ์ A จากนั้นกดปุ่มเครื่องหมายคูณ และทำการเรียกเมทริกซ์ B โดยใช้กระบวนการเดิม จากนั้นกดปุ่ม EXE ก็จะได้ผลลัพธ์ของการคูณเมทริกซ์

Matrix Size?
Rows :2
Columns :2
Confirm

MatB=
[0 0]
0

MatB=
[1 3]
5 2
2

Press [TOOLS]
to define Matrix.

Matrix
Func Analysis
Probability
Numeric Calc

Matrix Calc
MatA
MatB
MatC

Matrix Calc
MatA
MatB
MatC

MatA×MatB

MatAns=
[23 7]
35 27
11

- ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติที่เกี่ยวกับการคูณระหว่างเมทริกซ์
- ครูให้นักเรียนจับคู่ที่นั่งด้วยกัน เพื่อทำใบกิจกรรม โดยให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณ วิทยาศาสตร์ในการสำรวจคำตอบและให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายถึงข้อค้นพบในแต่ละข้อ โดยทำทีละข้อ (ขั้นการสำรวจและหาความสัมพันธ์)
- จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 1 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ $AB = BA$ หรือไม่ ซึ่งเมื่อทำกิจกรรมในข้อนี้เสร็จนักเรียนจะได้ข้อสรุปว่า $AB \neq BA$ (ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน) ซึ่งครูอาจจะเพิ่มเติมในบางกรณีที่ $AB = BA$

เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

เป็นต้น

5. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 2 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ แล้ว $(AB)C = A(BC)$ หรือไม่ (ขั้นการสำรวจ)
6. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 2 เสร็จแล้ว คุณครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(AB)C = A(BC)$ (ขั้นการสรุป)
7. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 3 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ c เป็นค่าคงตัวแล้ว $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ หรือไม่ (ขั้นการสำรวจ)
8. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 3 เสร็จแล้ว คุณครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ (ขั้นการสรุป)
9. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 4 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ แล้ว $A(B + C) = AB + AC$ หรือไม่ (ขั้นการสำรวจ)
10. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 3 เสร็จแล้ว คุณครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $A(B + C) = AB + AC$ (ขั้นการสรุป)
11. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 5 นักเรียนจะได้ตรวจสอบว่าเมื่อ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ และ $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ แล้ว $(A + B)C = AC + BC$ หรือไม่ (ขั้นการสำรวจ)
12. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 5 เสร็จแล้ว คุณครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(A + B)C = AC + BC$ (ขั้นการสรุป)
13. ให้นักเรียนตรวจสอบว่า เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $(A + B)C = CA + CB$ หรือไม่ โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ (ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน) ซึ่งการตรวจสอบแสดงได้ดังนี้

- กำหนดเมทริกซ์ A, B และ C

MatA= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 2

MatB= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ 6

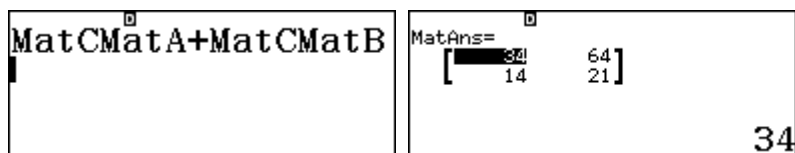
MatC= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 2

- คำนวณค่าของ $(A + B)C$

(MatA+MatB)MatC

MatAns= $\begin{bmatrix} 21 & 16 \\ 56 & 34 \end{bmatrix}$ 21

- คำนวณค่าของ $CA + CB$



- จึงสรุปได้ว่า $(A + B)C \neq CA + CB$

14. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ เรื่องการคูณเมทริกซ์ โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ (ขั้นการฝึกทักษะ)

15. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสมบัติการคูณระหว่างเมทริกซ์

สื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์
2. ใบกิจกรรม เรื่องการคูณเมทริกซ์
3. แบบฝึกทักษะ เรื่องการคูณเมทริกซ์

การวัดผลและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรม
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะ
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรม

เรื่อง การคูณระหว่างเมทริกซ์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ หาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้และตอบคำถามท้ายใบกิจกรรม

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

1.1) $AB =$

1.2) $BA =$

1.3) AB เท่ากับ BA หรือไม่

จากข้อ 1.1) – 1.3) เมทริกซ์มีสมบัติสลับที่สำหรับการคูณหรือไม่

2. จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

2.1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$
 $A(BC) =$ $(AB)C =$

2.2) $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ และ $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
 $D(EF) =$ $(DE)F =$

2.3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$
 $A(BC) =$ $(AB)C =$

จากข้อ 2.1) – 2.3) พอจะสรุปได้ว่า

ถ้า $[a_{ij}]_{m \times n}, [b_{ij}]_{n \times p}$ และ $[c_{ij}]_{p \times q}$ แล้ว $A(BC)$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 11 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3.1) $(2A)B =$

3.2) $A(2B) =$

3.3) $2(AB) =$

3.4) $(5A)C =$

3.5) $A(5C) =$

3.6) $5(AC) =$

3.7) $(4C)D =$

3.8) $C(4D) =$

3.9) $4(CD) =$

จากข้อ 3.1) – 3.9) พอจะสรุปได้ว่า

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ c เป็นค่าคงที่แล้ว $(cA)B =$

4. จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$4.1) \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \qquad AB + AC =$$

$$4.2) \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \qquad AB + AC =$$

$$4.3) \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \qquad AB + AC =$$

จากข้อ 4.1) – 4.3) พอจะสรุปได้ว่า

$$\text{ถ้า } A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times p}, C = [c_{ij}]_{n \times p} \text{ แล้ว } A(B + C) =$$

5. จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$5.1) \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)C = \qquad AC + BC =$$

$$4.2) \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)C = \qquad AC + BC =$$

$$4.3) \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)C = \qquad AC + BC =$$

จากข้อ 5.1) – 5.3) พอจะสรุปได้ว่า

$$\text{ถ้า } A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}, C = [c_{ij}]_{n \times p} \text{ และ } c \text{ เป็นค่าคงที่แล้ว } (A + B)C =$$

แบบฝึกทักษะ

เรื่อง การคูณระหว่างเมทริกซ์

คำชี้แจง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$
ให้นักเรียนหาค่าต่อไปนี้

1. $(AB)C =$

2. $A(BC) =$

3. $(2A)(5C) =$

4. $(2A)\left(\frac{3}{2}C\right) - 3AC =$

5. $AB + AC =$

6. $AB - AC =$

7. $AD + BD =$

ตรวจสอบความเข้าใจ / แบบทดสอบ (10 นาที)

ทำแบบทดสอบ