แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**

หน่วยการเรียนรู้ แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์

เรื่อง ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด, การคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง **เวลา 50 นาที**

.....

ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง A ซึ่งเป็นสับเซตของโดเมนของฟังก์ชัน f
ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง A
ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง A

ทฤษฎีบท กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ มีค่า
1) ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
2) ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในการศึกษาแนวคิดใหม่ (การคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง)
2. ศึกษาวิธีการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์เพื่อประเมินว่าฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด และศึกษาการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง

สรุปหัวข้อ

- <u>บทนำ</u>
  ทบทวนเนื้อหาก่อนหน้า, คำอธิบายหัวข้อของบทเรียนนี้
  กิจกรรมที่ 1 การคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง
  2 การตีความทางคณิตศาสตร์ของการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง
  3 ประยุกต์ใช้ในสิ่งต่าง ๆ นอกเหนือจากฟังก์ชันกำลังสองเพื่อยืนยันแนวคิด
  4_0 แนะนำอนุพันธ์ลำดับที่สูงขึ้น
  4 การตรวจสอบวิธีประเมินการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง
  5 การตรวจสอบสมมติฐาน
  แบบฝึกทักษะ 1 ตรวจสอบคุณสมบัติของเส้นโค้งโดยใช้ทฤษฎีบทและเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์
  2 ศึกษาการประยุกต์ในชีวิตจริง
- <u>บทสรุป</u>

สื่อการเรียนรู้

เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์, แอปพลิเคชัน CLASSWIZ, ใบกิจกรรม

กระบวนการจัดการเรียนรู้

<u>บทนำ</u>

ทบทวนเนื้อหาก่อนหน้าและกำหนดวัตถุประสงค์ของบทเรียนนี้

ผู้สอนต้องแน่ใจว่าผู้เรียนเข้าใจเนื้อหา และผู้สอนสามารถประเมินผู้เรียนได้ว่า $f(x)$ *เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด โดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันหรือ* $f'(x)$

ผู้สอนตั้งคำถามผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนเติมคำว่า “เพิ่มขึ้น” หรือ “ลดลง” ลงในช่องว่างต่อไปนี้

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ มีค่า เพิ่มขึ้น $\qquad f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ มีค่า ลดลง

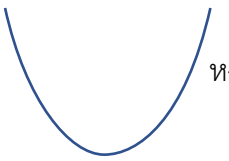
เราจะใช้แนวคิดนี้ในการประเมินการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง

<u>กิจกรรมที่ 1</u> - การคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง

ในหน่วยการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชันกำลังสอง เราได้ศึกษามาแล้วว่าเส้นโค้งสามารถหงายขึ้นหรือคว่ำลงได้

ผู้สอนถามผู้เรียนว่า เส้นโค้งต่อไปนี้ เส้นใดหงายขึ้นและเส้นใดคว่ำลง

(PPT)



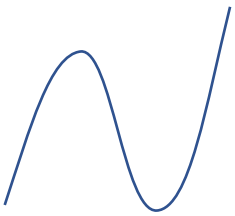
หงายขึ้น

คว่ำลง

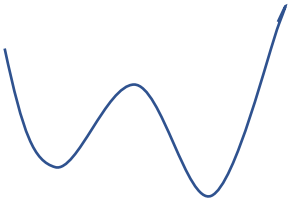
ผู้สอนให้ผู้เรียน พิจารณาการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง ในตัวอย่างต่อไปนี้ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันกำลังสอง ผู้เรียนสามารถบอกอะไรได้บ้างจากตัวอย่างเหล่านี้ ลองคิดเกี่ยวกับวิธีประเมินการคว่ำและการหงายของเส้นโค้งในทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 1

(PPT)



ตัวอย่างที่ 2



(ตัวอย่างคำตอบ) (1) เส้นโค้งดูเหมือนจะคว่ำลงในตอนแรก จากนั้นจึงเปลี่ยนเป็นหงายขึ้น

(2) เส้นโค้งดูเหมือนจะเปลี่ยนจากหงายขึ้นเป็นคว่ำลง

ต่อไป เราจะพิจารณาวิธีการประเมินการคว่ำและการหงายของเส้นโค้งในทางคณิตศาสตร์

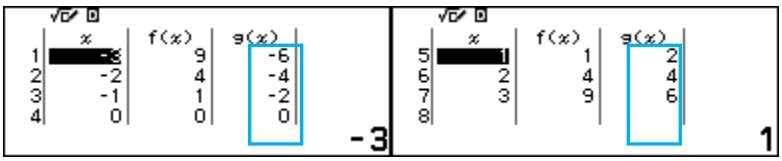
<u>กิจกรรมที่ 2</u> - การตีความทางคณิตศาสตร์ของการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของ $f'(x)$ ของฟังก์ชันกำลังสอง

(i) สำหรับเส้นโค้งหงาย: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

[ตาราง (Table)], ป้อนค่า x^2 สำหรับ $f(x) =$ และ $2x$ สำหรับ $g(x) =$

[ค่าเริ่มต้น (Start): -3, ค่าสิ้นสุด (End): 3, ขั้น (Step): 1]



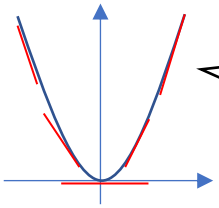
มุ่งเน้นความสนใจไปที่ข้อมูลในกล่องสีฟ้า ผู้สอนแนะนำให้ผู้เรียนมุ่งเน้นความสนใจไปที่การเปลี่ยนแปลงของ f' มากกว่าที่จะดูว่า f' มีค่าเป็นบวกหรือเป็นลบ

(ผู้สอนถามผู้เรียน) ลองคิดเกี่ยวกับสิ่งที่สามารถรวบรวมได้เกี่ยวกับ <u>เส้นโค้งหงาย</u> ที่ได้จาก $f'(x)$ ในตารางนี้

(ข้อสรุปที่จะนำเสนอ)

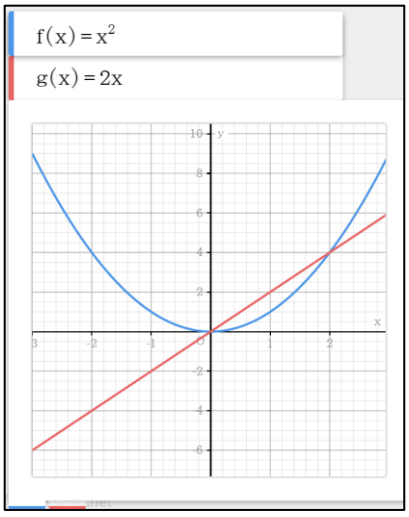
จากตาราง เราจะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น $f'(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสมีค่าเพิ่มขึ้น

เราสามารถเห็นการเปลี่ยนแปลงของเส้นสัมผัสบนกราฟได้ดังนี้



ผู้สอนอาจอธิบายเพิ่มเติมว่า <u>ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดบนเส้นโค้งจะอยู่เหนือเส้นโค้งเสมอ</u>

ใช้ QR Code ภายใต้ [ตาราง (Table)] แสดงกราฟของ $f(x) = x^2$ และ $f'(x) = 2x$

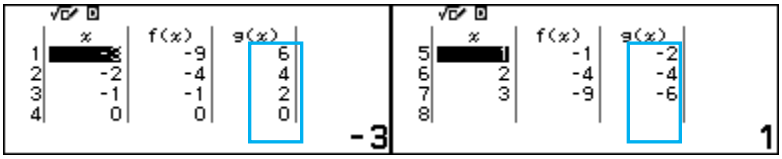


จากกราฟนี้ $f'(x)$ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง เราสามารถอนุมานได้ว่า ถ้า $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แล้วเส้นโค้งจะหงายขึ้น

(ii) สำหรับเส้นโค้งคว่ำ: $f(x) = -x^2$, $f'(x) = -2x$

[ตาราง (Table)], ป้อนค่า $-x^2$ สำหรับ $f(x) =$ และ $-2x$ สำหรับ $g(x) =$

[ค่าเริ่มต้น (Start): -3, ค่าสิ้นสุด (End): 3, ขั้น (Step): 1]



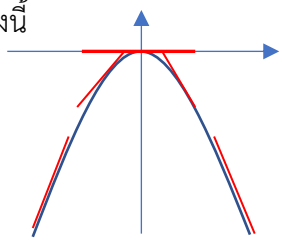
มุ่งเน้นความสนใจไปที่ข้อมูลในกล่องสีฟ้า ผู้สอนแนะนำให้ผู้เรียนมุ่งเน้นความสนใจไปที่การเปลี่ยนแปลงของ f' มากกว่าที่จะดูว่า f' มีค่าเป็นบวกหรือเป็นลบ

(ผู้สอนถามผู้เรียน) คิดว่าสิ่งที่สามารถรวบรวมได้เกี่ยวกับ <u>เส้นโค้งคว่ำ</u> ที่ได้จาก $f'(x)$ ในตารางนี้มีอะไรบ้าง

(ข้อสรุปที่จะนำเสนอ)

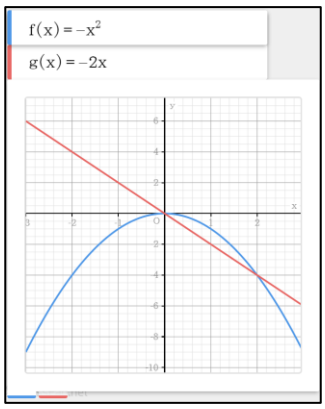
จากตาราง เราจะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น $f'(x)$ มีค่าลดลง นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสมีค่าลดลง

เราสามารถเห็นการเปลี่ยนแปลงของเส้นสัมผัสบนกราฟได้ดังนี้



ผู้สอนอาจอธิบายเพิ่มเติมว่า <u>ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดบนเส้นโค้งจะอยู่ใต้เส้นโค้งเสมอ</u>

ใช้ QR Code ภายใต้ [ตาราง (Table)] แสดงกราฟ $f(x) = -x^2$ และ $f'(x) = -2x$.



จากกราฟนี้ $f'(x)$ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง เราสามารถอนุมานได้ว่า ถ้า $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันลดแล้ว เส้นโค้งจะคว่ำลง

ในตัวอย่าง (i) และ (ii) เราอนุมานเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง $f'(x)$ และการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง แต่ไม่ได้ให้บทพิสูจน์ ต่อจากนี้เราจะยืนยันว่าข้อความนี้เป็นจริงกับกราฟอื่น ๆ ด้วย

สมมติฐานที่ได้ในกิจกรรมที่ 2

- เมื่อ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เราสามารถสรุปได้ว่าเส้นโค้งนั้นหงาย
- เมื่อ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันลด เราสามารถสรุปได้ว่าเส้นโค้งนั้นคว่ำ

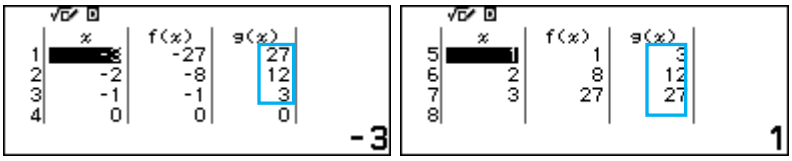
<u>กิจกรรมที่ 3</u> - ตรวจสอบสมมติฐานที่ได้จากกิจกรรมที่ 2

โดยใช้ฟังก์ชันอื่นที่ไม่ใช่ฟังก์ชันกำลังสอง เราจะดูว่าสมมติฐานข้างต้นสามารถนำไปใช้กับฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันกำลังสองได้อย่างไร

(iii) $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$

[ตาราง (Table)] ป้อนค่า x^3 สำหรับ $f(x) =$ และ $3x^2$ สำหรับ $g(x) =$

[ค่าเริ่มต้น (Start): -3, ค่าสิ้นสุด (End): 3, ขั้น (Step): 1]



(ผู้สอนถามผู้เรียน) ให้ผู้เรียนคาดการณ์ว่าเส้นโค้งจะหงายหรือคว่ำ

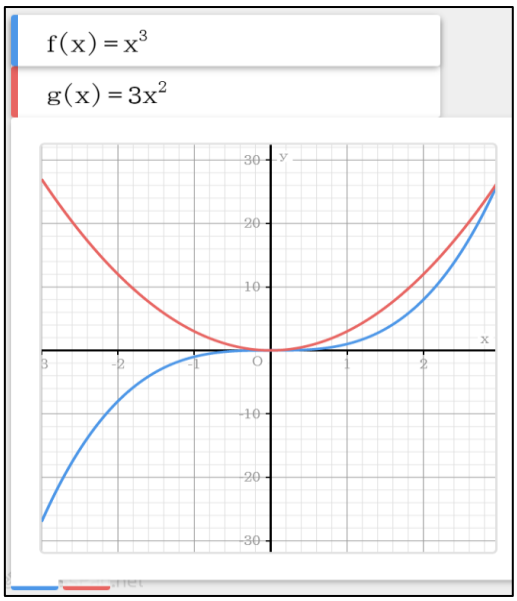
(ข้อสรุปที่จะนำเสนอ)

เนื่องจากเมื่อ $x = -3, -2, -1$, f' *เป็นฟังก์ชันลด*

และเมื่อ $x = 1, 2, 3$ f' *เป็นฟังก์ชันเพิ่ม*

เราคิดว่าเส้นโค้งจะคว่ำเมื่อ $x < 0$ *และจะหงายเมื่อ* $x > 0$

จากผลลัพธ์ใน [ตาราง (Table)] ใช้ QR Code แสดงกราฟ



(ผู้สอนถามผู้เรียน) จากกราฟนี้ เราค้นพบอะไรบ้างเกี่ยวกับการเพิ่มหรือการลดของ $f'(x)$ และการคว่ำและการหงายของเส้นโค้งของ $f(x)$ (ให้ผู้เรียนตอบคำถาม)

(ข้อสรุปที่จะนำเสนอ)

ในพื้นที่ที่ f'(สีแดง) ลดลงกราฟของ f (สีฟ้า) จะคว่ำ

ในพื้นที่ที่ f'(สีแดง) เพิ่มขึ้นกราฟของ f (สีฟ้า) จะหงาย

<u>กิจกรรมที่ 4_0</u> - แนะนำอนุพันธ์อันดับสูงกว่า

สามารถข้ามไปได้หาก
ศึกษามาก่อนแล้ว

เนื่องจาก $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เราจึงสามารถหาอนุพันธ์ของ $f'(x)$ เทียบกับ x ได้ เราเรียกสิ่งนี้ว่า อนุพันธ์อันดับที่สอง ของ $f(x)$ และเขียนแทนได้ด้วย $f''(x)$ ต่อมาเราจะศึกษาเกี่ยวกับการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองนี้

ตัวอย่าง *ให้* $f'(x) = x^2 - 3x + 2$, $f'' = 2x - 3$

<u>กิจกรรมที่ 4</u> - การตรวจสอบวิธีประเมินการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง

ต่อไป เราจะพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะประเมินการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง จากการคำนวณหา $f''(x)$ (ผู้สอนถามผู้เรียน) จากที่เราได้เรียนรู้มาก่อนหน้าแล้วว่า $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $f'(x) > 0$ และ $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $f'(x) < 0$ ให้ผู้เรียนเติมสูตรในช่องว่างต่อไปนี้

$\boxed{f''(x) > 0}$ $\Rightarrow f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม $\boxed{f''(x)<0}$ $\Rightarrow f'(x)$ *เป็นฟังก์ชันลด*

ตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง $f''(x)$ กับการคว่ำหรือการหงายของกราฟของ $f(x)$

สมมติฐาน

$\boxed{f'' > 0} \Rightarrow$ หงาย $\qquad$ $\boxed{f'' < 0} \Rightarrow$ คว่ำ

จากข้อ (i) ในกิจกรรมที่ 2 จะได้ว่า $f'' = 2 > 0$

จากข้อ (ii) ในกิจกรรมที่ 2 จะได้ว่า $f'' = -2 < 0$

ดังนั้น เราสามารถยืนยันได้ว่า สมมติฐานของเราเป็นจริงสำหรับฟังก์ชันเหล่านี้

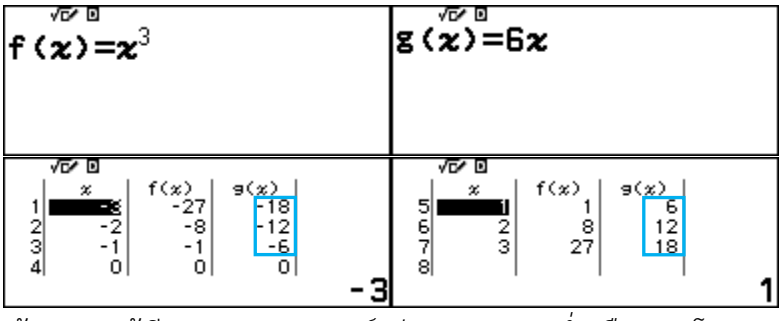
ต่อไป เราจะยืนยันสมมติฐานโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

<u>กิจกรรมที่ 5</u> - การยืนยันสมมติฐานโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

จากข้อ (iii) ในกิจกรรมที่ 3 จะได้ว่า $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, และ $f''(x) = 6x$

[ตาราง (Table)], ป้อนค่า x^3 ลงใน $f(x) =$ และ $6x$ ลงใน $g(x) =$

[ค่าเริ่มต้น (Start): -3, ค่าสิ้นสุด (End): 3, ขั้น (Step): 1] (PPT)



การอ่านตารางทางคณิตศาสตร์เป็นอีกส่วนหนึ่งที่สำคัญของการคิดอย่างเป็นวิทยาศาสตร์

(ผู้สอนถามผู้เรียน) *ลองคาดการณ์ดูว่า* $f(x)$ *จะคว่ำหรือหงายโดยดูจากเครื่องหมายของ* $f''(x)$

(ข้อสรุปที่จะนำเสนอ)

เนื่องจากเมื่อ $x = -3, -2, -1$ *แล้ว* $f'' < 0$ *และเมื่อ* $x = 1,\ 2,\ 3$ *แล้ว* $f'' > 0$ เราสามารถคาดการณ์ได้ว่า กราฟจะคว่ำเมื่อ $x < 0$ และจะหงายเมื่อ $x > 0$

เพื่อยืนยันสิ่งนี้ ให้แสดงกราฟโดยใช้ QR Code ภายใต้ [ตาราง (Table)]

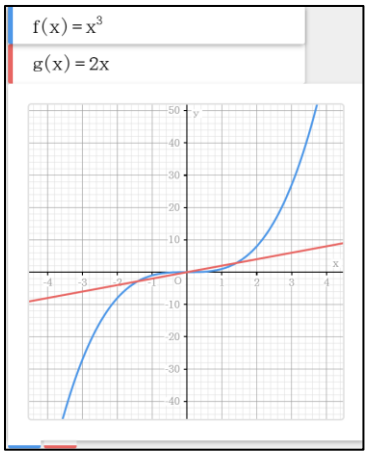
(ผู้สอนถามผู้เรียน) จากกราฟที่ได้ ให้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างการคว่ำและการหงายของ $f(x)$ กับ $f''(x)$

จากกราฟของ $f''(x)$ เราจะได้ว่า

เมื่อ $x < 0$ และ $f''(x) < 0$ เส้นโค้งจะมีลักษณะคว่ำ

เมื่อ $x > 0$ และ $f''(x) > 0$ เส้นโค้งจะมีลักษณะหงาย

ดังนั้น ตัวอย่างนี้จึงสอดคล้องกับสมมติฐานของเรา



การอ่านกราฟเป็นอีกส่วนสำคัญของการคิดอย่างเป็นวิทยาศาสตร์

สรุปผลการเรียนรู้

ทฤษฎีบทความสัมพันธ์กันระหว่าง $f''(x)$ และการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ เส้นโค้งหงาย
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ เส้นโค้งคว่ำ

จากตรงนี้ เราสามารถยืนยันได้แล้วว่าตัวอย่างของเราสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ ผู้สอนสามารถจะละการพิสูจน์ทางตรงไว้ได้

ทฤษฎีบทนี้ถูกใช้อย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์รายละเอียดของเส้นโค้ง
ที่จุด $(0,0)$ *เส้นโค้งเปลี่ยนจากคว่ำเป็นหงาย เราจะเรียกจุดแบบนี้ว่า จุดเปลี่ยนเว้า*
มีการพิสูจน์โดยทั่วไปแล้วว่า เส้นโค้งจะเปลี่ยนส่วนคว่ำและหงายที่จุดเปลี่ยนเว้า

<u>แบบฝึกทักษะ 1</u> - ตรวจสอบสมบัติของเส้นโค้งโดยใช้ทฤษฎีบทและเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

ลองตรวจสอบกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ *โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์*

แบบฝึกทักษะมีเนื้อหาขั้นสูงอยู่ ดังนั้น ให้เลือกส่วนที่จะใช้หรือไม่ใช้ตามระดับของผู้เรียน

(1) ***หาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุด***

แยกตัวประกอบของ $f'(x)=x^2-4x+3$ *และหาคำตอบเมื่อ* $f'(x)=0$

จะได้ $x=$ 1 , 3

ทบทวนเกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดถ้าจำเป็น เน้นย้ำผู้เรียนว่า <u>เราสามารถหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดได้โดยการหาค่า x เมื่อ $f'(x)=0$</u> ตั้งค่าช่วงโดยให้รวมค่าของ x เหล่านี้

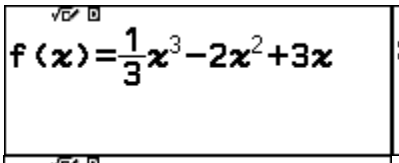
ⓐ, [ตาราง (Table)], ⓞⓚ, ล้างข้อมูลก่อนหน้า ⏻

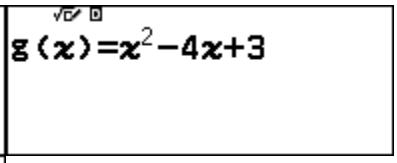
ⓞⓞⓞ, [กำหนด $f(x)/g(x)$], ⓞⓚ, [กำหนด $f(x)$], ⓞⓚ,

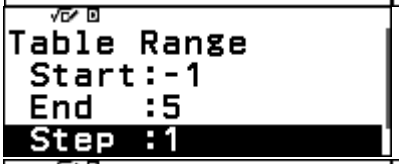
ใส่ค่า $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$, ⓔⓧⓔ,

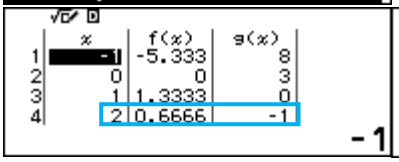
แล้วป้อนค่า $g(x)=x^2-4x+3$ ในทำนองเดียวกัน

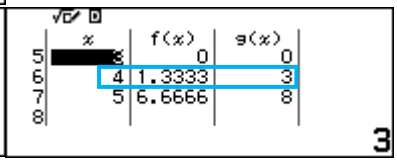
ⓞⓞⓞ, [ช่วงตาราง (Table Range)], ⓞⓚ, ป้อนค่า [เริ่มต้น (Start): -1, สิ้นสุด (End): 5, ขั้น (Step): 1], [ดำเนินการ (Execute)] ⓔⓧⓔ







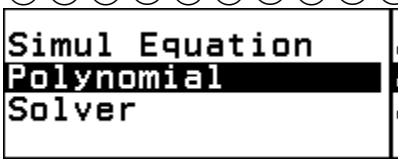


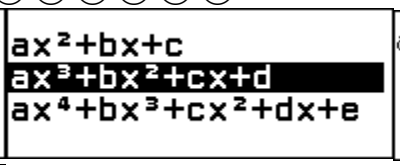


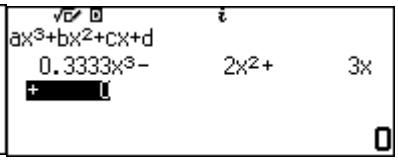
ผู้สอนต้องแน่ใจว่าผู้เรียนมีทักษะในการระบุว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด และสามารถหาค่าสูงสุดและต่ำสุดได้โดยใช้เพียงฟังก์ชัน [ตาราง (Table)]

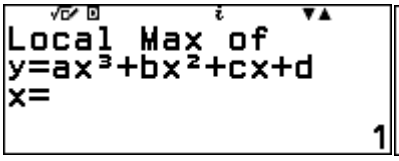
ⓐ, [สมการ(Equation)], ⓞⓚ, [พหุนาม(Polynomial)], ⓞⓚ, [ax³+bx²+cx+d], ⓞⓚ

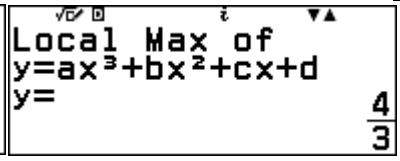
① ⓢⓗⓘⓕⓣ ③ ⓔⓧⓔ ⊖ ② ⓔⓧⓔ ③ ⓔⓧⓔ ⓔⓧⓔ ⓔⓧⓔ ⓔⓧⓔ ⓔⓧⓔ ⓔⓧⓔ ⓔⓧⓔ

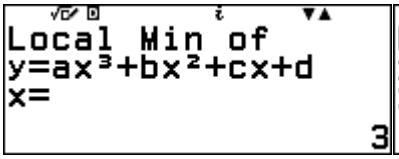


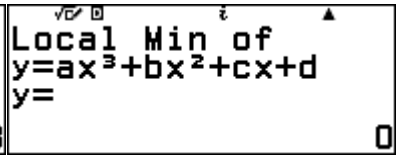












ตรวจสอบค่าสูงสุด (Max) ค่าต่ำสุด (Min) และค่าของ x แต่ละตัว ในสมการกำลังสาม ภายใต้ [Equation]

(2) *หาการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง*

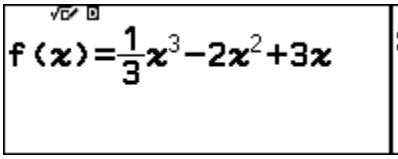
เนื่องจาก $f''(x) =$ $2x - 4$ *ดังนั้น* $f''(x) = 0$ *เมื่อ* $x =$ 2

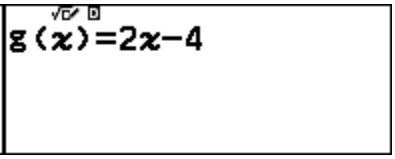
⌂, [ตาราง (Table)], OK, ล้างข้อมูลก่อนหน้า

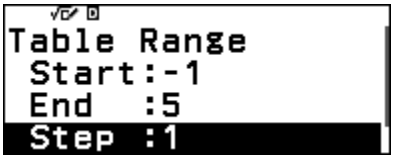
⋯, [กำหนด $f(x)/g(x)$], OK, [กำหนด $f(x)$], OK, ป้อนค่า $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$, B

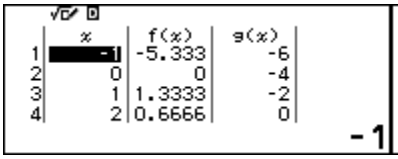
แล้วป้อนค่า $g(x) = 2x - 4$ ในทำนองเดียวกัน

⋯ [ช่วงตาราง (Table Range)], OK, ป้อนค่า [เริ่มต้น (Start): -1, สิ้นสุด(End): 5, ขั้น (Step): 1], [ดำเนินการ (Execute)] EXE



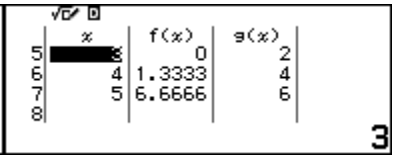






	x	f(x)	g(x)
1	-1	-5.333	-6
2	0	0	-4
3	1	1.3333	-2
4	2	0.6666	0

-1



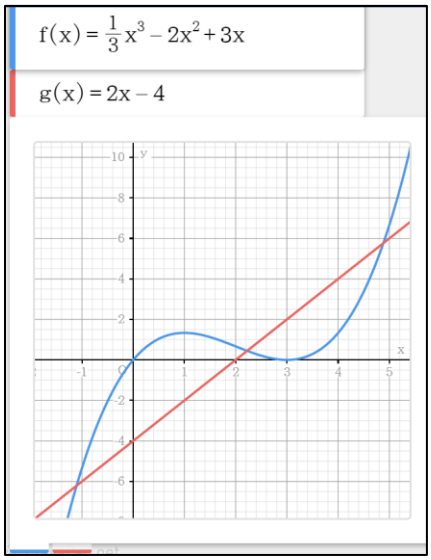
	x	f(x)	g(x)
5	3	0	2
6	4	1.3333	4
7	5	6.6666	6
8			

3

ผู้สอนต้องแน่ใจว่าผู้เรียนมีทักษะในการระบุว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด และสามารถหาค่าสูงสุดและต่ำสุดได้โดยใช้เพียง [ตาราง (Table)]

กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ *เป็นเส้นโค้งคว่ำเมื่อ* $x <$ $\boxed{2}$ *และเป็นเส้นโค้งหงายเมื่อ* $\boxed{2 < x}$

↑ ⓧ สแกน QR Code เพื่อแสดงกราฟ



จากการอ่านค่าที่ได้จาก [ตาราง (Table)] บนเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ เราสามารถยืนยันได้ว่า การเพิ่มขึ้นและลดลง ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน รวมถึงการคว่ำและการหงายที่เราหาค่าได้นั้นถูกต้อง

<u>แบบฝึกทักษะ 2</u> ตรวจสอบการประยุกต์ในชีวิตจริง

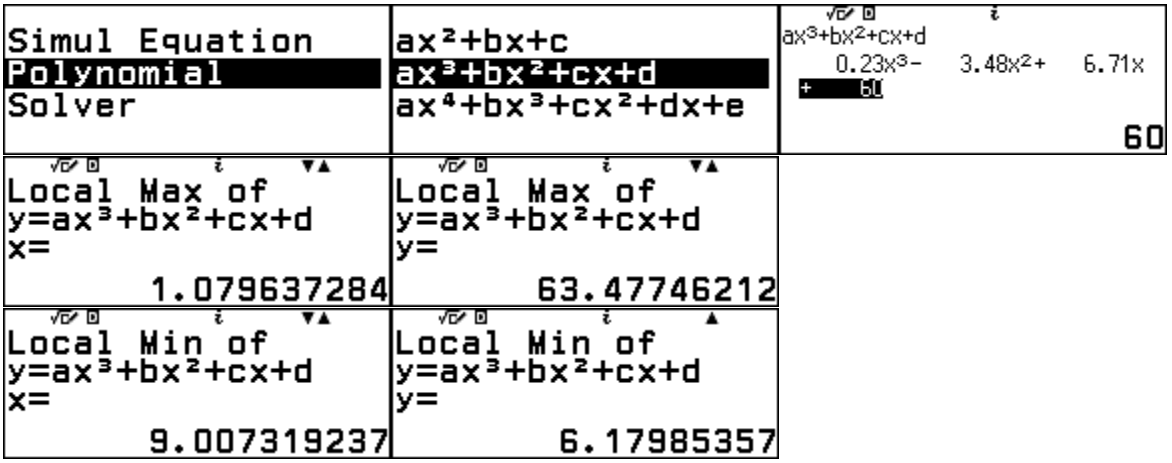
ลองนึกภาพดัชนี y ที่สะท้อนแนวโน้มเศรษฐกิจ โดยดัชนี y ที่สูงขึ้นจะบ่งชี้ถึงบรรยากาศทางเศรษฐกิจที่ดีขึ้น ในขณะที่หาก y มีค่าต่ำลง จะบ่งชี้ถึงบรรยากาศทางเศรษฐกิจที่แย่ลง ในช่วง 7 ปีตั้งแต่ปี 2015 ถึง 2022 การเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อเวลาผ่านไป x ปี สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชัน

$$y = 0.23x^3 - 3.48x^2 + 6.71x + 60$$

หากมีผู้เรียนที่ไม่เข้าใจปัญหา ให้ผู้สอนอธิบายว่าจุดสูงสุดทางเศรษฐกิจคือค่าสูงสุด และเศรษฐกิจตกต่ำคือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และจุดเปลี่ยนในแนวโน้มทางเศรษฐกิจจะหมายถึงจุดเปลี่ยนเว้า

ใช้ฟังก์ชันนี้ในการวิเคราะห์แนวโน้มเศรษฐกิจ

⏢, [สมการ(Equation)], ⓞ, [พหุนาม (Polynomial)], ⓞ, [ax³+bx²+cx+d], ⓞ,
⓪ ⋅ ② ③ ⓔ ⊖ ③ ⋅ ④ ⑧ ⓔ ⑥ ⋅ ⑦ ① ⓔ ⑥ ⓪ ⓔ ⓔ ⓔ ⓔ ⓔ ⓔ ⓔ ⓔ

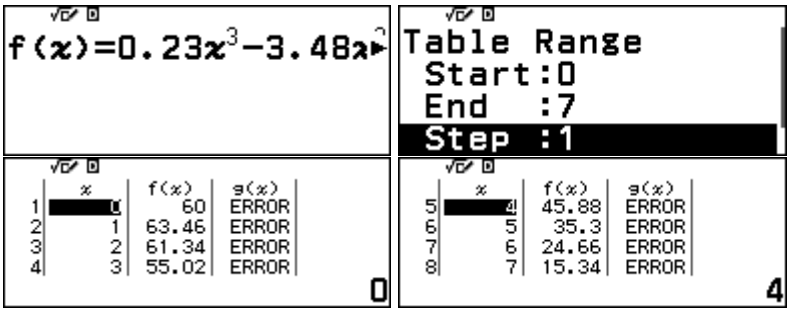


⏢, [ตาราง (Table)], ⓞ, ล้างข้อมูลก่อนหน้า ⏱

⋯, [กำหนด $f(x)/g(x)$], ⓞ, [กำหนด $f(x)$], ⓞ,

ป้อนค่า $f(x) = 0.23x^3 - 3.48x^2 + 6.71x + 60$, B

⋯ [ช่วงตาราง (Table Range)], ⓞ, ป้อนค่า [เริ่มต้น (Start): 0, สิ้นสุด(End): 7, ขั้น (Step): 1], [ดำเนินการ (Execute)] ⓔ



จุดสูงสุดของดัชนีเศรษฐกิจอยู่ที่ x ≈ 1.08 (ปี) เนื่องจาก x = 0 ในปี 2015 ดังนั้น
ค่าดัชนีสูงสุดนี้ซึ่งมีค่าประมาณ 63.5 จึงเกิดขึ้นในช่วงประมาณเดือนมกราคมหรือกุมภาพันธ์ของปี 2016 ในขณะที่จุดต่ำสุดของดรรชนีเศรษฐกิจอยู่ที่ x ≈ 9.01 (ปี) ซึ่งหมายความว่าสามารถคาดการณ์ได้ในช่วงประมาณเดือนมกราคมของปี 2024 ซึ่งค่าต่ำสุดนี้มีค่าประมาณ 6.18 นั่นเอง ยิ่งไปกว่านั้น

$$y = 0.23x^3 - 3.48x^2 + 6.71x + 60 \Rightarrow y' = 0.69x^2 - 6.96x + 6.71$$
$$\text{และ} \Rightarrow y'' = 1.38x - 6.96$$

ดังนั้น กำหนด $y'' = 0$ จะได้ว่า $x = \frac{6.96}{1.38} = 5.04$ นั่นคือ กราฟมีจุดเปลี่ยนเว้าอยู่ที่ x = 5.04 ซึ่งบ่งชี้ว่าในช่วงเดือนมกราคมของปี 2020 แนวโน้มการถดถอยของเศรษฐกิจจะเริ่มอ่อนตัวลง กล่าวคือ อัตราการถดถอยเริ่มดีขึ้นนั่นเอง

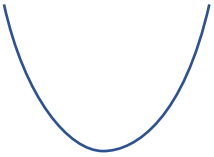
สรุปผลการเรียนรู้

ในบทเรียนนี้ นอกเหนือไปจากการใช้อนุพันธ์หาฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด จุดสูงสุด และจุดต่ำสุดแล้ว ผู้เรียนยังได้เรียนรู้เกี่ยวกับการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง ผ่านการประยุกต์ใช้อนุพันธ์อันดับที่สองอีกด้วย ดังนั้น ในบทเรียนนี้ ผู้เรียนได้เรียนรู้ว่าเราสามารถใช้อนุพันธ์อันดับถัดไป เพื่อให้ได้ข้อมูลเพิ่มขึ้นเกี่ยวกับสมบัติของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นการสะท้อนให้เห็นถึงโครงสร้างหลายชั้นของแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ ด้วยโครงสร้างนี้ เราสามารถใช้อนุพันธ์อันดับที่สามและอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่าไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาสาขาอื่น ๆ ที่หลากหลาย เช่น ในการกระจายเทเลอร์ ซึ่งเป็นการเขียนแสดงฟังก์ชันใด ๆ ให้อยู่ในรูปผลบวกอนันต์ของอินทิกรัลและอื่นๆ การประยุกต์เหล่านี้ไม่ได้จำกัดแต่ในเฉพาะสาขาวิชาคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่ยังปรากฏในสาขาวิชา STEM ตัวอย่างหนึ่งคือ ฟังก์ชัน $x = f(t)$ ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่ง (x) กับเวลา (t) เมื่อใช้ฟังก์ชันนี้ จะได้ความเร็วคือ $v = f'(t)$ ความเร่งคือ $a = f''(t)$ และแรงฉุดคือ $j = f'''(t)$ และเนื่องจากจุดเปลี่ยนเว้า (จุดที่เส้นโค้งเปลี่ยนระหว่างส่วนคว่ำกับส่วนหงาย) เป็นจุดเปลี่ยนที่แทนตำแหน่งที่แนวโน้มการเพิ่มขึ้น (หรือลดลง) เปลี่ยนไปเป็นลดลง (หรือเพิ่มขึ้น) จึงสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในชีวิตจริงได้อย่างหลากหลาย เช่น การเปลี่ยนแปลงทางเศรษฐกิจ ความผันผวนของราคาหุ้น หรือการเปลี่ยนแปลงแนวโน้มประเภทอื่น ๆ ดังที่ได้แสดงไปในแบบฝึกทักษะ 2 เนื่องจากแนวคิดเหล่านี้มีความสำคัญ เราควรพยายามใช้ความรู้ที่ได้รับระหว่างบทเรียนนี้อย่างจริงจังเมื่อต้องแก้ปัญหาตัวอย่าง

ใบกิจกรรม

หน่วย	แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์	**หัวข้อ**	อนุพันธ์อันดับสอง และการคว่ำและการหงายของเส้นโค้ง
ชื่อ		**ชั้นเรียน**	

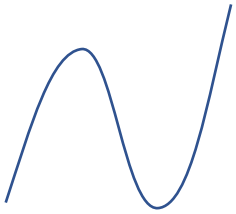
<u>กิจกรรมที่ 1</u>



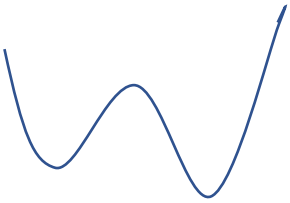
หงายขึ้น

คว่ำลง

ตัวอย่าง (1)



ตัวอย่าง (2)



(ตัวอย่างคำตอบ) (1) เส้นโค้งดูเหมือนจะคว่ำลงในตอนแรก จากนั้นจึงเปลี่ยนเป็นหงายขึ้น

(2) เส้นโค้งดูเหมือนจะเปลี่ยนจากหงายขึ้นเป็นคว่ำลง

ฉันคิดว่าต้องใช้อนุพันธ์ แต่ฉันอยากพิจารณาว่าใช้อย่างไร

กิจกรรมที่ 2

(i) สำหรับเส้นโค้งหงาย $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

จากตารางที่ได้จากการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ *เราจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น $f'(x)$* มีค่าเพิ่มขึ้น *ซึ่งมีความหมายว่า ความชันของเส้นสัมผัสจะ* เพิ่มขึ้น

(ii) สำหรับเส้นโค้งคว่ำ $f(x) = -x^2$, $f'(x) = -2x$

จากตารางที่ได้จากการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ *เราจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น $f'(x)$* มีค่าลดลง *ซึ่งมีความหมายว่า ความชันของเส้นสัมผัสจะ* ลดลง

f' เพิ่มขึ้น $\Rightarrow$ เส้นโค้ง หงายขึ้น f' ลดลง $\Rightarrow$ เส้นโค้ง คว่ำลง

สมมติฐานที่ได้ในกิจกรรมที่ 2

- เมื่อ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เราสามารถสรุปได้ว่าเส้นโค้งนั้น หงาย
- เมื่อ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันลด เราสามารถสรุปได้ว่าเส้นโค้งนั้น คว่ำ

กิจกรรมที่ 3

$f(x) = x^3$, $f'(x) =$ $3x^2$

จากกราฟที่ได้จากเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ คิดว่าความสัมพันธ์ระหว่างการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของ $f'(x)$ การคว่ำและการหงายของเส้นโค้งของ $f(x)$ จะเป็นอย่างไร

ในพื้นที่ที่ f' (สีแดง) ลดลง กราฟของ f (สีฟ้า) จะคว่ำ

ในพื้นที่ที่ f' (สีแดง) เพิ่มขึ้น กราฟของ f (สีฟ้า) จะหงาย

กิจกรรมที่ 4$_0$

เมื่อ $f'(x) = x^2 - 3x + 2$, $f'' =$ $2x - 3$

กิจกรรมที่ 4

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด

⇩ ⇩

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ เป็นฟังก์ชันลด

ตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง $f''(x)$ กับการคว่ำและการหงายของกราฟของ $f(x)$

$f'' > 0 \Rightarrow$ หงาย $f'' < 0 \Rightarrow$ คว่ำ

กิจกรรมที่ 5

$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$

เมื่อ $x < 0$ *และ* $f''(x) \leq 0$ *เส้นโค้งจะมีลักษณะ* คว่ำ

เมื่อ $x > 0$ *และ* $f''(x) \geq 0$ *เส้นโค้งจะมีลักษณะ* หงาย

(ปัญหา) จากกราฟที่ได้ ให้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างการคว่ำและการหงายของ $f(x)$ กับเครื่องหมายของ $f''(x)$

จากกราฟของ $f''(x)$ *เมื่อ* $x < 0, f''(x) < 0$ *เส้นโค้งจะคว่ำ และเมื่อ* $x > 0, f''(x) > 0$ *เส้นโค้งจะหงาย*

แบบฝึกทักษะ 1

(1) ให้ $f'(x) =$ $x^2 - 4x + 3$, $f'(x) = 0$ เมื่อ $x =$ 1 , 3

สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $x =$ 1 ค่าสูงสุดคือ $\frac{4}{3}$ และเมื่อ $x =$ 3 ค่าต่ำสุดคือ 0

(2) ให้ $f''(x) =$ $2x - 4$, $f''(x) = 0$ เมื่อ $x =$ 2

กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นเส้นโค้งคว่ำเมื่อ $x <$ 2 และเป็นเส้นโค้งหงายเมื่อ 2 $< x$

แบบฝึกทักษะ 2

$y = 0.23x^3 - 3.48x^2 + 6.71x + 60$