

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

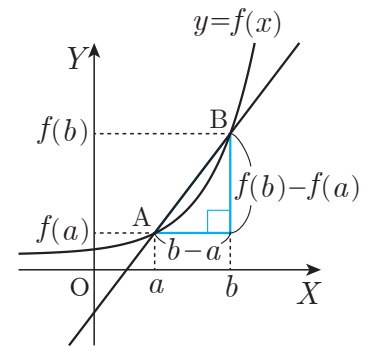
TARGET

เพื่อทำความเข้าใจอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และวิธีการหาอัตราดังกล่าว

STUDY GUIDE

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

ในฟังก์ชัน $y=f(x)$ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น b จากอัตราจำนวนการเปลี่ยนแปลงของ x ซึ่งก็คือ $b-a$ เป็นจำนวนการเปลี่ยนแปลงของ y ซึ่งก็คือ $f(b)-f(a)$ เรียกว่า **อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** ของฟังก์ชัน $y=f(x)$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก a เป็น b อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจะแสดงตามความชันของเส้นตรง AB ในรูปภาพด้านขวา



$$(\text{อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

EXERCISE

◆ สำหรับฟังก์ชัน $y = 2x^2 - 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยต่อไปนี้

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $x=2$ เป็น $x=4$

เมื่อ $x=2$ ค่าของ y คือ $y = 2 \times 2^2 - 1 = 7$

เมื่อ $x=4$ ค่าของ y คือ $y = 2 \times 4^2 - 1 = 31$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยคือ $\frac{31-7}{4-2} = \frac{24}{2} = 12$

12

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $x=a$ เป็น $x=b$

เมื่อ $x=a$ ค่าของ y คือ $y = 2a^2 - 1$

เมื่อ $x=b$ ค่าของ y คือ $y = 2b^2 - 1$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยคือ $\frac{2b^2 - 1 - (2a^2 - 1)}{b - a} = \frac{2(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{2(b-a)(b+a)}{b-a} = 2(a+b)$

$2(a+b)$

(3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $x=1$ เป็น $x=1+h$

เมื่อ $x=1$ ค่าของ y คือ $y = 2 \times 1^2 - 1 = 1$

เมื่อ $x=1+h$ ค่าของ y คือ $y = 2 \times (1+h)^2 - 1 = 1 + 4h + 2h^2$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยคือ $\frac{1 + 4h + 2h^2 - 1}{1 + h - 1} = \frac{2h(2+h)}{h} = 2(2+h)$

$2(2+h)$

PRACTICE

◆ สำหรับฟังก์ชัน $y = -3x^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยต่อไปนี้

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $x=-1$ เป็น $x=3$

เมื่อ $x=-1$ ค่าของ y คือ $y = -3 \times (-1)^2 = -3$

เมื่อ $x=3$ ค่าของ y คือ $y = -3 \times 3^2 = -27$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยคือ $\frac{-27 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{-24}{4} = -6$

—6

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $x=a$ เป็น $x=b$

เมื่อ $x=a$ ค่าของ y คือ $y = -3a^2$

เมื่อ $x=b$ ค่าของ y คือ $y = -3b^2$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยคือ

$$\frac{-3b^2 - (-3a^2)}{b - a} = \frac{-3(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{-3(b - a)(b + a)}{b - a} = -3(a + b)$$

—3(a+b)

(3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $x=1$ เป็น $x=1+h$

เมื่อ $x=1$ ค่าของ y คือ $y = -3 \times 1^2 = -3$

เมื่อ $x=1+h$ ค่าของ y คือ $y = -3(1+h)^2 = -3 - 6h - 3h^2$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยคือ $\frac{-3 - 6h - 3h^2 - (-3)}{1 + h - 1} = \frac{-3h(2 + h)}{h} = -3(2 + h)$
—3(2+h)

ค่าลิมิต

TARGET

การทำความเข้าใจค่าลิมิตและวิธีการหาค่าลิมิต

STUDY GUIDE

ค่าลิมิต

ในฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อค่า x เข้าใกล้ a แบบอนันต์ ในขณะที่ค่าตัวอื่นที่เหลือนั้นไม่ใช้ a แล้วค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ b ซึ่งแสดงเป็น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ค่า b นี้เรียกว่า **ค่าลิมิต** ของ $f(x)$ เมื่อ $x \rightarrow a$ ซึ่ง $\lim$ เป็นสัญลักษณ์ย่อของ ลิมิต (limit)

ค่าลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ หรือ } f(x) \rightarrow b \text{ เมื่อ } x \rightarrow a$$

Ex. ในฟังก์ชัน $f(x) = x + 4$ เมื่อค่า x เข้าใกล้ 3 ค่าลิมิตคือ $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 4) = 7$

EXERCISE

◆ จงหาค่าลิมิตของโจทย์ต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x + 2)$

เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 5 $x^2 - 3x + 2$ จะเข้าใกล้ $5^2 - 3 \times 5 + 2 = 12$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x + 2) = 12$$

12



check

ใช้ ตาราง (เพื่อสร้างตารางฟังก์ชัน) เพื่อดูว่าค่าลิมิตจะเข้าใกล้เท่าใด

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด $\odot$

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$ หลังจากป้อน $f(x) = x^2 - 3x + 2$ กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$ หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):4.9, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):0.01] แล้วให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด $\odot$

	%	$f(x)$	$g(x)$
1	4.9	11.378	ERROR
2	4.91	11.378	ERROR
3	4.92	11.446	ERROR
4	4.93	11.514	ERROR

11.31

	%	$f(x)$	$g(x)$
5	4.94	11.583	ERROR
6	4.95	11.652	ERROR
7	4.96	11.721	ERROR
8	4.97	11.790	ERROR

11.7909

	%	$f(x)$	$g(x)$
8	4.97	11.79	ERROR
9	4.98	11.86	ERROR
10	4.99	11.93	ERROR
11	5	12	ERROR

12

จากตาราง เราสามารถยืนยันได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 12 เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 5 จาก 4.9

ในกรณีนี้ ค่าเข้าใกล้ 5 ในขณะที่ค่าตัวอื่นน้อยกว่า 5 แต่เราได้ผลลัพธ์ที่คล้ายกันแม้ว่าค่าจะเข้าใกล้ในขณะที่ยังมีค่าที่มากกว่าอยู่

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+10}{x+2}$$

เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 2 จาก $\frac{3x+10}{x+2}$ จะเข้าใกล้ $\frac{3 \times 2 + 10}{2 + 2} = \frac{16}{4} = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+10}{x+2} = 4$$

check

ใช้ ตาราง (เพื่อสร้างตารางฟังก์ชัน) เพื่อดูว่าค่าลิมิตจะเข้าใกล้เท่าใด

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] เลือก OK เลือก

[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = \frac{3x+10}{x+2}$ แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):1.9, End (สิ้นสุด):2, Step (ขั้น):0.01] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

x	$f(x)$	$g(x)$
1	1.9	4.0125
2	1.91	4.023
3	1.92	4.0204
4	1.93	4.0178

x	$f(x)$	$g(x)$
5	1.94	4.0152
6	1.95	4.0126
7	1.96	4.0101
8	1.97	4.0075

x	$f(x)$	$g(x)$
8	1.97	4.0075
9	1.98	4.005
10	1.99	4.0025
11	2	4

Table Range	Start	End	Step
Start	1.9	2	0.01

x	$f(x)$	$g(x)$
8	1.97	4.0075
9	1.98	4.005
10	1.99	4.0025
11	2	4

จากตาราง เราสามารถยืนยันได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 4 เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 2 จาก 1.9

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+3)$$

เมื่อค่าของ h เข้าใกล้ 0 จาก $h+3$ จะเข้าใกล้ $0+3=3$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h} = 3$$

check

ใช้ ตาราง (เพื่อสร้างตารางฟังก์ชัน) เพื่อดูว่าค่าลิมิตจะเข้าใกล้เท่าใด

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] เลือก OK เลือก

[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$ แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):0.1, End (สิ้นสุด):0, Step (ขั้น):-0.01] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

x	$f(x)$	$g(x)$
1	0.1	3.01
2	0.09	3.09
3	0.08	3.08
4	0.07	3.07

x	$f(x)$	$g(x)$
5	0.06	3.06
6	0.05	3.05
7	0.04	3.04
8	0.03	3.03

x	$f(x)$	$g(x)$
8	0.03	3.03
9	0.02	3.02
10	0.01	3.01
11	0	3

Table Range	Start	End	Step
Start	0.1	0	-0.01

x	$f(x)$	$g(x)$
8	0.03	3.03
9	0.02	3.02
10	0.01	3.01
11	0	3

จากตาราง เราสามารถยืนยันได้ว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3 เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 0 จาก 0.1
ในตาราง $x=0$ แสดงผลเป็น ข้อผิดพลาด เนื่องจากไม่มีค่า

PRACTICE

◆ จงหาค่าลิมิตของโจทย์ต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 5x + 2)$

เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 4 จาก $x^2 - 5x + 2$ จะเข้าใกล้ $4^2 - 5 \times 4 + 2 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 5x + 2) = -2$$

−2

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x+1}{x+3}$

เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 1 จาก $\frac{7x+1}{x+3}$ จะเข้าใกล้ $\frac{7 \times 1 + 1}{1 + 3} = \frac{8}{4} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x+1}{x+3} = 2$$

2

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^2 + 8h}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^2 + 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h(h-4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{-2(h-4)\}$$

เมื่อค่าของ h เข้าใกล้ 0 จาก $-2(h-4)$ จะเข้าใกล้ $-2(0-4)=8$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^2 + 8h}{h} = 8$$

8

ADVANCED

(4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2)$$

เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ −2 จาก $x-2$ จะเข้าใกล้ $(-2-2)=-4$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$$

−4

คำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์

TARGET

การทำความเข้าใจคำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์ที่แสดงโดยอัตราการเปลี่ยนแปลงและวิธีการหาค่าดังกล่าว

STUDY GUIDE

คำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์

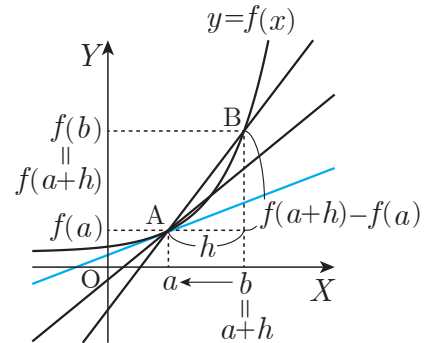
ในอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ b

กำลังเข้าใกล้ a ค่าลิมิตคือ $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ที่จุดนี้ เนื่องจาก $b-a=h$

และเราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลง x คือ h ซึ่งเราสามารถ

แสดงค่าลิมิตได้ดังต่อไปนี้ คำนี้เรียกว่า **คำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์** ของ

ฟังก์ชัน $f(x)$ สำหรับ $x=a$ และแสดงเป็น $f'(a)$



$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EXERCISE



◆ จงหาคำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(1) คำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=3x-5$ เมื่อ $x=4$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{3(4+h) - 5\} - (3 \times 4 - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

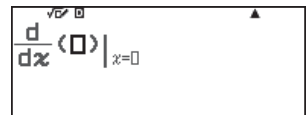
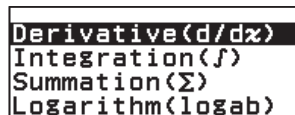
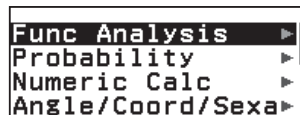
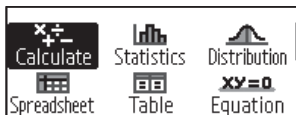
3

check

ยืนยันค่านี้โดยใช้ฟังก์ชันเพื่อคำนวณคำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

กด $\oplus$ เลือก [Func Analysis (การวิเคราะห์ฟังก์ชัน)] กด OK เลือก [Derivative (อนุพันธ์) (d/dx)] กด OK



บนหน้าจอที่แสดงขึ้นมา คุณสามารถป้อนฟังก์ชันและค่าของ x เพื่อยืนยันคำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์ได้

③ $\odot$ $\ominus$ ⑤ $>$ ④ EXE

$$\frac{d}{dx} (3x-5) \Big|_{x=4}$$

3

(2) คำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์ $f'(-3)$ ของฟังก์ชัน $f(x)=x^2$

$$f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - (-3)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-6+h)}{h} = -6$$

-6

$\oplus$ OK OK $\odot$ $\ominus$ $>$ $\ominus$ ③ EXE

$$\frac{d}{dx} (x^2) \Big|_{x=-3}$$

-6

PRACTICE

◆ จงหาค่าลิมิตของโจทย์ต่อไปนี้

(1) ค่าลิมิตปริพันธ์เชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = -5x + 9$ เมื่อ $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-5(2+h) + 9\} - (-5 \times 2 + 9)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h}{h} = -5$$

⏏ OK OK − 5 × + 9 > 2 EXE

$$\frac{d}{dx}(-5x+9) \Big|_{x=2} = -5$$

(2) ค่าลิมิตปริพันธ์เชิงอนุพันธ์ $f'(2)$ ของฟังก์ชัน $f(x) = -3x^2$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(2+h)^2 - (-3 \times 2^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h(4+h)}{h} = -12$$

⏏ OK OK − 3 × □² > 2 EXE

$$\frac{d}{dx}(-3x^2) \Big|_{x=2} = -12$$

อนุพันธ์

TARGET

การทำความเข้าใจอนุพันธ์และวิธีการหาอนุพันธ์

STUDY GUIDE

อนุพันธ์

ฟังก์ชัน $f(x)$ ฟังก์ชันใหม่ 1 ฟังก์ชันได้มาจากการหาค่าสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์ $f'(a)$ กับแต่ละค่า a ของ x ฟังก์ชันนี้เรียกว่าอนุพันธ์ของ $f(x)$ และแสดงในรูปต่อไปนี้โดยใช้ $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ในนิพจน์ด้านบน h คือส่วนเพิ่มของ x ซึ่งจะเขียนเป็น Δx นอกจากนี้ $f(x+h) - f(x)$ นั้นเรียกว่าตัวดำเนินการของ y และแสดงโดยสัญลักษณ์ Δy ตอนนี้เราสามารถแสดงอนุพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

นอกจาก $f'(x)$ แล้ว ยังมีสัญลักษณ์อนุพันธ์อื่น ๆ อีก เช่น y' , $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d}{dx}f(x)$ เมื่อเราพบอนุพันธ์ $f'(x)$ จากฟังก์ชัน $f(x)$ ของ x เราสามารถได้ว่าเรากำลังหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$

EXERCISE

◆ จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

(1) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$$

$$\underline{f'(x) = 2x}$$

(2) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 5$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5-5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\underline{f'(x) = 0}$$

PRACTICE

◆ จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

(1) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 7x + 9$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{7(x+h) + 9\} - (7x + 9)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 7 = 7 \\ f'(x) &= 7 \end{aligned}$$

(2) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = -3x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(x+h)^2 - (-3x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{-3(2x+h)\} = -6x \\ f'(x) &= -6x \end{aligned}$$

ADVANCED

(3) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \\ f'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

สมบัติต่าง ๆ ของอนุพันธ์

TARGET

การเรียนรู้สมบัติของอนุพันธ์และการทำความเข้าใจวิธีการหาอนุพันธ์ต่าง ๆ

STUDY GUIDE

สมบัติต่าง ๆ ของอนุพันธ์

การหาอนุพันธ์ $f'(x)$ จากฟังก์ชัน $f(x)$ เราจะใช้สูตรต่อไปนี้ซึ่งได้มาจากนิยามของฟังก์ชัน

$$(1) \quad y = x^n \quad (n \text{ เป็นจำนวนจริง}) \Rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$(2) \quad y = c \quad (c \text{ เป็นค่าคงที่}) \Rightarrow y' = 0$$

$$(3) \quad y = kf(x) \quad (k \text{ เป็นค่าคงที่}) \Rightarrow y' = kf'(x)$$

$$(4) \quad y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

Ex.

$$(1) \quad \text{เมื่อ } y = x^4 \text{ แล้ว } y' = 4x^3$$

$$(2) \quad \text{เมื่อ } y = -6 \text{ แล้ว } y' = 0$$

$$(3) \quad \text{เมื่อ } y = 4x^3 \text{ แล้ว } y' = 4 \times 3x^2 = 12x^2$$

$$(4) \quad \text{เมื่อ } y = 3x^5 + 2x^3 \text{ แล้ว } y' = 3 \times 5x^4 + 2 \times 3x^2 = 15x^4 + 6x^2$$

โดยการแทนที่ a ด้วย x ในอนุพันธ์ $f'(x)$ ของฟังก์ชัน $f(x)$ เราสามารถหาอนุพันธ์ $f'(a)$ สำหรับ $x=a$ ได้

อนุพันธ์ของตัวแปรอื่นที่ไม่ใช่ x

ฟังก์ชัน $y=f(x)$ แสดงฟังก์ชันโดยใช้ตัวแปร x และ y แต่เราสามารถเลือกตัวแปรใดก็ได้เพื่อแสดงฟังก์ชัน ตัวอย่างเช่น ความสัมพันธ์ $S = \pi r^2$ ของรัศมี r ของวงกลมและพื้นที่ S ของวงกลมก็เป็นฟังก์ชันของตัวแปร r และ S เช่นกัน

ในตอนนี้ เมื่อหาอนุพันธ์ของ S โดย r เราจะได้ $\frac{dS}{dr} = 2\pi r$ ซึ่งเราจะเห็นสูตรสำหรับการหาเส้นรอบวงกลม

นอกจากนี้ ในความสัมพันธ์ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ สำหรับรัศมี r ของทรงกลมและปริมาตร V ของทรงกลม เมื่อหาอนุพันธ์

ของ V โดย r เราจะได้ $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ ซึ่งเราจะเห็นสูตรสำหรับการหาพื้นที่ผิวของทรงกลม

EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

$$(1) \quad \text{หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน } y = -7x^3 - 5x^2 + 4x - 8$$

$$\begin{aligned} y' &= (-7x^3)' - (5x^2)' + (4x)' - (8)' = -7(x^3)' - 5(x^2)' + 4(x)' - (8)' = -7 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 4 \cdot 1 - 0 \\ &= -21x^2 - 10x + 4 \end{aligned}$$

$$\underline{y' = -21x^2 - 10x + 4}$$

(2) หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน $f(x) = x(x-2)(x+3)$

$$f(x) = x(x-2)(x+3) = x^3 + x^2 - 6x$$

$$f'(x) = (x^3)' + (x^2)' - (6x)' = (x^3)' + (x^2)' - 6(x)' = 3x^2 + 2x - 6 \cdot 1 = 3x^2 + 2x - 6$$

$$\underline{f'(x) = 3x^2 + 2x - 6}$$



(3) ใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = -4x^2 + 7x - 10$ เพื่อหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อ $x=5$

$$f'(x) = (-4x^2)' + (7x)' - (10)' = -4(x^2)' + 7(x)' - (10)' = -4 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 = -8x + 7$$

$$f'(5) = -8 \cdot 5 + 7 = -33$$

-33

⊞ OK OK

⊞

4

x

⊞

7

x

⊞

1

0

>

5

EXE

$$\frac{d}{dx}(-4x^2+7x-10) \Big|_{x=5} = -33$$

PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน $y = -2x^3 + 4x^2 - 7x + 13$

$$y' = (-2x^3)' + (4x^2)' - (7x)' + (13)' = -2(x^3)' + 4(x^2)' - 7(x)' + (13)'$$

$$= -2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = -6x^2 + 8x - 7$$

$$y' = -6x^2 + 8x - 7$$

(2) หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน $f(x) = 3x(x+1)(x-1)$

$$f(x) = 3x(x+1)(x-1) = 3x^3 - 3x$$

$$f'(x) = (3x^3)' - (3x)' = 3(x^3)' - 3(x)' = 3 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1 = 9x^2 - 3$$

$$f'(x) = 9x^2 - 3$$

(3) ใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 5x^2 - 9x + 8$ เพื่อหาอนุพันธ์ของ $x=-2$ เมื่อ $f(x)$

$$f'(x) = (5x^2)' - (9x)' + (8)' = 5(x^2)' - 9(x)' + (8)' = 5 \cdot 2x - 9 \cdot 1 + 0 = 10x - 9$$

$$f'(-2) = 10 \cdot (-2) - 9 = -29$$

-29

⊞ OK OK

5

x

⊞

9

x

+

8

>

⊞

2

EXE

$$\frac{d}{dx}(5x^2-9x+8) \Big|_{x=-2} = -29$$

สมการของเส้นสัมผัส

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีการหาสมการสำหรับเส้นสัมผัสจากกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ

STUDY GUIDE

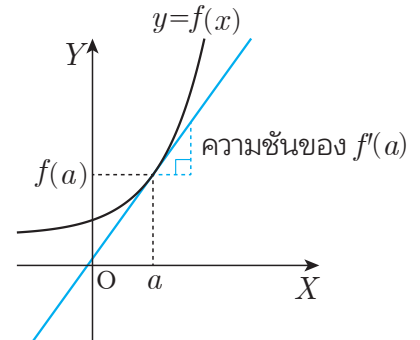
สมการของเส้นสัมผัส

คำสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์ $f'(a)$ ของฟังก์ชัน $y=f(x)$ โดยที่ $x=a$ คือ

ความชันของเส้นสัมผัสของจุด $(a, f(a))$ บนกราฟ

สมการของเส้นสัมผัสสำหรับจุด $(a, f(a))$ บนกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ จะแสดงดังต่อไปนี้

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



EXTRA Info.

สมการสำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันของ m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EXERCISE



- 1 กำหนดให้ m คือความชันของเส้นสัมผัส l สำหรับจุด $P(5, 10)$ บนกราฟของฟังก์ชัน $y = x^2 - 4x + 5$ ในตอนนี้จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

- (1) จงหาค่าของ m

โดยกำหนดให้ $f(x) = x^2 - 4x + 5$ เราจะได้ $m=f'(5)$

โดยการหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ เราจะได้ $f'(x) = (x^2 - 4x + 5)' = 2x - 4$

ดังนั้น เราจึงได้ $m = f'(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$

⊞ OK OK (X) □ − 4 (X) + 5 > 5 EXE

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5) \Big|_{x=5} = 6$$

6

- (2) จงหาสมการของเส้นสัมผัส l

เส้นสัมผัส l คือเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(5, 10)$ โดยมีความชัน $m=6$

ดังนั้น จาก $y - 10 = 6(x - 5)$ เราจึงได้ $y = 6x - 20$

$$\underline{y = 6x - 20}$$

check

เพื่อการทำความเข้าใจที่ดีขึ้น ให้ใช้ตารางและคิวอาร์โค้ดเพื่อคำนวณและวาดความสัมพันธ์ของเส้นสัมผัสและกราฟของฟังก์ชัน

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^2 - 4x + 5$ กด EXE

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 6x - 20$

$$g(x) = 6x - 20$$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):0, End (สิ้นสุด):7, Step (ขั้น):1] เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

Table Range
Start:0
End:7
Step:1

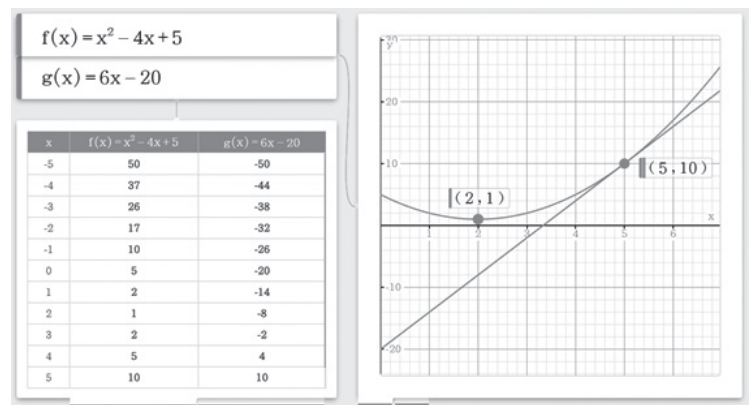
กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

x	f(x)	g(x)
0	5	-20
1	2	-14
2	1	-8
3	2	-2

x	f(x)	g(x)
4	5	4
5	10	10
6	17	16
7	26	22

จากตารางและกราฟ เราจะเห็นได้ว่าค่าต่ำสุดของ $f(x)$ คือ $x=2$

$f(x)$ และ $g(x)$ ใช้จุด (5, 10) ร่วมกัน



② กราฟของฟังก์ชัน $y = x^2 + 1$ มีเส้นสัมผัส 2 เส้นที่วาดจากจุดกำเนิด จงหาสมการของเส้นสัมผัสเหล่านี้

เมื่อกำหนดให้ $f(x) = x^2 + 1$ เราจะได้ $f'(x) = 2x$

เนื่องจากพิกัดของเส้นสัมผัสคือ $(a, a^2 + 1)$ เราจึงพบว่าความชันของเส้นสัมผัสคือ $f'(a) = 2a$

สมการของเส้นสัมผัสมาจาก $y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$ แล้วเราจะได้ $y = 2ax - a^2 + 1$

เส้นนี้ผ่านจุดกำเนิด ดังนั้นจาก $0 = 2a \cdot 0 - a^2 + 1$ เราจะได้ $a = \pm 1$

เมื่อ $a=1$ แล้ว $y = 2x$

เมื่อ $a=-1$ แล้ว $y = -2x$

$$y = 2x, y = -2x$$

PRACTICE

- ① กำหนดให้ m คือความชันของเส้นสัมผัส l สำหรับจุด $P(-1, 9)$ บนกราฟของฟังก์ชัน $y = -x^2 - 6x + 4$ ในตอนนี้จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) จงหาค่าของ m

โดยกำหนดให้ $f(x) = -x^2 - 6x + 4$ เราจะได้ $m = f'(-1)$

โดยการหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ เราจะได้ $f'(x) = (-x^2 - 6x + 4)' = -2x - 6$

ดังนั้น เราจึงได้ $m = f'(-1) = -2 \cdot (-1) - 6 = -4$

-4

Ⓐ OK OK - (X) x² - 6 (X) + 4 > - 1 EXE

$$\frac{d}{dx}(-x^2 - 6x + 4) \Big|_{x=-1} = -4$$

(2) จงหาสมการของเส้นสัมผัส l

เส้นสัมผัส l คือเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(-1, 9)$ โดยมีความชัน $m = -4$

ดังนั้น จาก $y - 9 = -4\{x - (-1)\}$ เราจึงได้ $y = -4x + 5$

$$y = -4x + 5$$

check

เพื่อการทำความเข้าใจที่ดีขึ้น ให้ใช้ตารางและคิวอาร์โค้ดเพื่อคำนวณและวาด

ความสัมพันธ์ของเส้นสัมผัสและกราฟของฟังก์ชัน

กด Ⓐ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึง

ล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด Ⓐ

กด ∞ เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))]

กด OK เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))], กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = -x^2 - 6x + 4$ กด EXE

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -4x + 5$

กด ∞ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจาก

ป้อน [Start (เริ่มต้น): -5, End (สิ้นสุด): 2, Step (ขั้น): 1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด ↑ (X) สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดง
กราฟ

	%	f(x)	g(x)
1	-5	9	25
2	-4	12	21
3	-3	13	17
4	-2	12	13

$$f(x) = -x^2 - 6x + 4$$

$$g(x) = -4x + 5$$

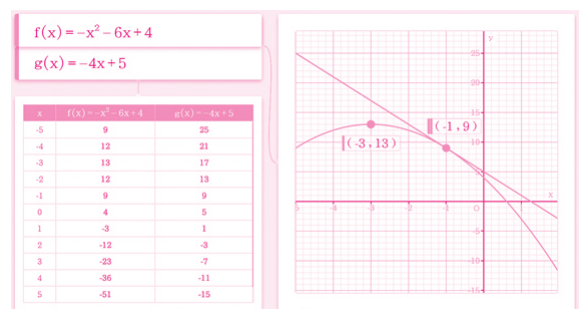
Table Range
Start: -5
End: 2
Step: 1

	%	f(x)	g(x)
5	-1	9	5
6	0	4	1
7	1	-3	-3
8	2	-12	-13

จากตารางและกราฟ เราจะเห็นได้ว่าค่า

สูงสุดของ $f(x)$ คือ $x = -3$

$f(x)$ และ $g(x)$ ใช้จุด $(-1, 9)$ ร่วมกัน



๒ กราฟของฟังก์ชัน $y = 3x^2 + 2$ มีเส้นสัมผัส 2 เส้นที่วาดจากจุด $(0, -10)$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสเหล่านี้

เมื่อกำหนดให้ $f(x) = 3x^2 + 2$ เราจะได้ $f'(x) = 6x$

เนื่องจากพิกัดของเส้นสัมผัสคือ $(a, 3a^2 + 2)$ เราจึงพบว่าความชันของเส้นสัมผัสคือ $f'(a) = 6a$

สมการของเส้นสัมผัสมาจาก $y - (3a^2 + 2) = 6a(x - a)$ แล้วเราจะได้

$$y = 6ax - 3a^2 + 2$$

เส้นนี้ผ่านจุด $(0, -10)$ ดังนั้นจาก $-10 = 6a \cdot 0 - 3a^2 + 2$ เราจะได้ $a = \pm 2$

เมื่อ $a = 2$ แล้ว $y = 12x - 10$

เมื่อ $a = -2$ แล้ว $y = -12x - 10$

$$y = 12x - 10, y = -12x - 10$$

ฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดและค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน (1)

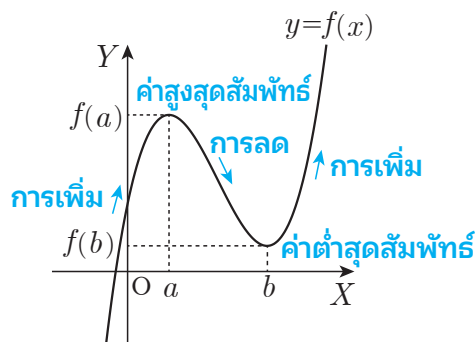
TARGET

การทำความเข้าใจหลักพื้นฐานของฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดและค่าสูงสุด/ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

STUDY GUIDE

ฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดและค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

สมการเชิงอนุพันธ์แสดงความชันของเส้นสัมผัสที่จุดของเส้นสัมผัส
จากส่วนนี้ เราสามารถพิจารณาการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ หาก $f'(x) > 0$ อยู่ภายในพิสัยหนึ่ง เส้นสัมผัสมีความชันบวก ดังนั้นกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ จึงเพิ่มขึ้น ในทำนองเดียวกัน หาก $f'(x) < 0$ อยู่ภายในพิสัยหนึ่ง เส้นสัมผัสมีความชันลบ ดังนั้นกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ จึงลดลง



สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ภายในพิสัย:

หาก $f'(x) > 0$ แล้ว $f(x)$ เพิ่มขึ้นภายในพิสัยนั้น

หาก $f'(x) < 0$ แล้ว $f(x)$ ลดลงภายในพิสัยนั้น

เมื่อฟังก์ชัน $f(x)$ เปลี่ยนจากเพิ่มเป็นลดที่ $x=a$ ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=a$ ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า $f(a)$ คือค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เมื่อฟังก์ชัน $f(x)$ เปลี่ยนจากเพิ่มเป็นลดที่ $x=b$ ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=b$ ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า $f(b)$ คือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์นั้นจะเรียกโดยรวมว่าค่าสุดขีดสัมพัทธ์

เพื่อการจัดรูปแบบการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน $f(x)$ อย่างมีประสิทธิภาพ ให้ใช้ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดตามภาพที่แสดงด้านขวา

สำหรับ $f'(a)=0$ จากก่อนถึงหลัง $x=a$ สัญลักษณ์ของ $f'(x)$

เปลี่ยนจากบวกเป็นลบ

⇒ เมื่อ $x=a$ คือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ แล้ว $f(a)$ ก็คือค่าสูงสุดสัมพัทธ์

สำหรับ $f'(b)=0$ จากก่อนถึงหลัง $x=b$ สัญลักษณ์ของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากลบเป็นบวก

⇒ เมื่อ $x=b$ คือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ แล้ว $f(b)$ ก็คือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

x	...	a	...	b	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	ค่าสูงสุดสัมพัทธ์	↘	ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์	↗

วิธีวาดกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$

- (1) จงหาอนุพันธ์ของ $y=f(x)$ เพื่อที่จะได้ $f'(x)=0$ เพื่อหา x
- (2) จงกำหนดสัญลักษณ์ของ $(y')f'(x)$ ในส่วนของ $f'(x)=0$ สำหรับพิสัยของค่าอื่นที่ไม่ใช่ x
- (3) ในตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลด ให้จัดรูปแบบการเพิ่มและการลดของ y และการเปลี่ยนแปลงสัญลักษณ์ของ y'
- (4) จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์จากตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลด และวาดกราฟ

EXERCISE

1 จงแก้โจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชัน $y = x^3 - 3x$ ดังต่อไปนี้

(1) หาอนุพันธ์ของ y' และเมื่อกำหนดให้ $y'=0$ จงหาค่าของ x

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0, x^2 = 1, x = \pm 1$$

$$y' = 3x^2 - 3, x = \pm 1$$

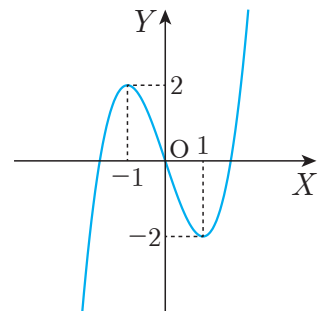
(2) ทำตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดทางด้านขวาให้สมบูรณ์

เมื่อ $x=-1$ แล้ว $y=2$ ซึ่งเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $x=1$ แล้ว $y=-2$ ซึ่งเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

x	...	-1	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗

(3) วาดกราฟของฟังก์ชัน $y = x^3 - 3x$



check

(2) กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$

หลังจากป้อน $f(x) = x^3 - 3x$ กด $\odot$

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 3x^2 - 3$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$ หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):-3, End (สิ้นสุด):3, Step (ขั้น):0.5]

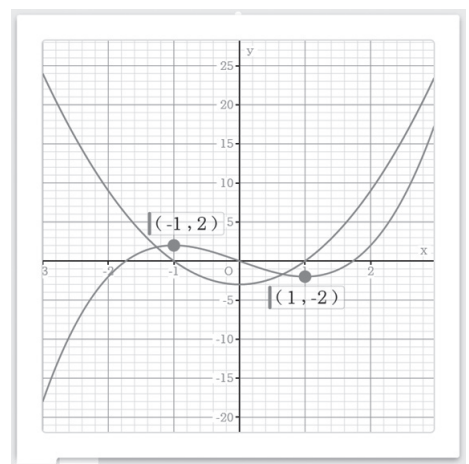
แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด $\odot$

x	$f(x)$	$g(x)$
-3	-27	24
-2	-8	15.75
-1	-2	9
0	0	3
1	1	0
2	8	-3
3	27	-6

x	$f(x)$	$g(x)$
-1	-2	9
0	0	3
1	1	0
2	8	-3
3	27	-6

x	$f(x)$	$g(x)$
1	1	0
2	8	-3
3	27	-6

(3) กด $\odot$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



ในบริเวณที่อนุพันธ์ $g(x)$ เป็นบวก $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น และจะลดลงในบริเวณที่เป็นลบ

- ๒) พิจารณาว่าฟังก์ชัน $y = 2x^3 - 3x^2$ เพิ่มขึ้นหรือลดลง วาดกราฟ และหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$$y' = (2x^3 - 3x^2)' = 6x^2 - 6x$$

$$6x^2 - 6x = 0, 6x(x - 1) = 0, x = 0, 1$$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดแสดงอยู่ทางด้านขวา

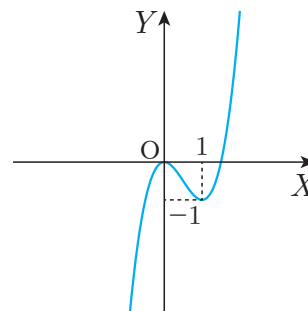
เมื่อ $x=0$ แล้ว $y=0$ ซึ่งเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $x=1$ แล้ว $y=-1$ ซึ่งเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

กราฟแสดงในแผนภาพด้านขวา

x	...	0	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	0	↘	-1	↗

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ...0 ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ...-1



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

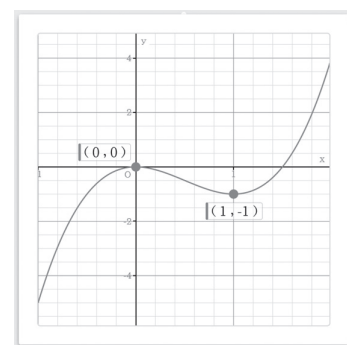
[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ กด EXE

กด $\odot\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจาก

ป้อน [Start (เริ่มต้น):-1, End (สิ้นสุด):2, Step (ขั้น):1] แล้ว

ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

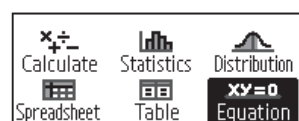
กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



OTHER METHODS

ใช้สมการ เพื่อหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์โดยตรง

กด $\odot$ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK



เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก

$[ax^3 + bx^2 + cx + d]$ กด OK

Simul Equation
Polynomial
Solver

ax^2+bx+c
 ax^3+bx^2+cx+d
 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

ป้อน $a=2, b=-3, c=0$ และ $d=0$

$\odot$ EXE $\ominus$ $\odot$ EXE $\odot$ EXE $\odot$ EXE

ax^3+bx^2+cx+d
 $2x^3-$ $3x^2+$ $0x$
 $+$ 0

แสดงตามลำดับโดยการกด EXE EXE สำหรับจุดตัดแกน x แล้วกด EXE EXE สำหรับค่าสูงสุดสัมพัทธ์ แล้วกด EXE EXE

สำหรับค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

Local Max of
 $y=ax^3+bx^2+cx+d$
 $x=$ 0

Local Max of
 $y=ax^3+bx^2+cx+d$
 $y=$ 0

Local Min of
 $y=ax^3+bx^2+cx+d$
 $x=$ 1

Local Min of
 $y=ax^3+bx^2+cx+d$
 $y=$ -1

PRACTICE

1 จงแก้โจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชัน $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ ดังต่อไปนี้

(1) หาอนุพันธ์ของ y' และเมื่อกำหนดให้ $y'=0$ จงหาค่าของ x

$$y' = (-x^3 + 3x^2 - 3)' = -3x^2 + 6x$$

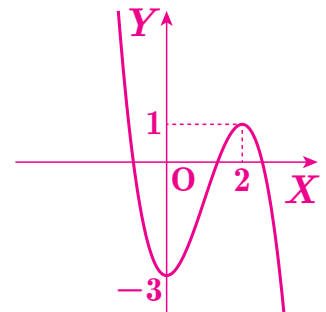
$$-3x^2 + 6x = 0, -3x(x - 2) = 0, x = 0, 2$$

$$y' = -3x^2 + 6x, x = 0, 2$$

(2) ทำตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดทางด้านขวาให้สมบูรณ์

x	...	0	...	2	...
y'	—	0	+	0	—
y	↘	-3	↗	1	↘

(3) วาดกราฟของฟังก์ชัน $y = -x^3 + 3x^2 - 3$



check

(2) กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ แล้ว

ให้กด EXE

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = -3x^2 + 6x$

กด $\odot\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น): -2, End (สิ้นสุด): 3, Step (ขั้น): 0.5] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	17	-24
-1.5	7.125	-15.75
-1	1	-9
-0.5	-2.125	-3.75

-2

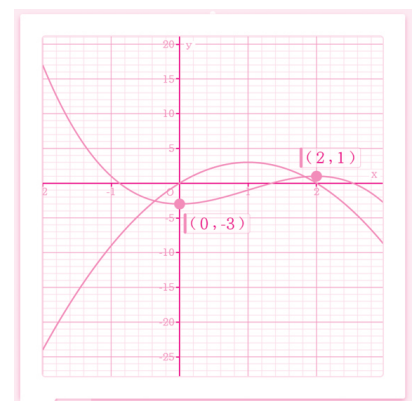
x	$f(x)$	$g(x)$
0	-3	0
0.5	-2.375	2.25
1	-1	3
1.5	0.375	2.25

0

x	$f(x)$	$g(x)$
2	1	0
2.5	0.125	-3.75
3	-3	-9

2

(3) กด $\uparrow$ $\otimes$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ
ในบริเวณที่อนุพันธ์ $g(x)$ เป็นบวก $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น
และจะลดลงในบริเวณที่เป็นลบ



- ๒) พิจารณาว่าฟังก์ชัน $y = -x^3 + 12x$ เพิ่มขึ้นหรือลดลง วาดกราฟ และหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$$y' = (-x^3 + 12x)' = -3x^2 + 12$$

$$-3x^2 + 12 = 0, x^2 = 4, x = \pm 2$$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดแสดงอยู่
ทางด้านขวา

เมื่อ $x = -2$ แล้ว $y = -16$ ซึ่งเป็นค่าต่ำสุด
สัมพัทธ์

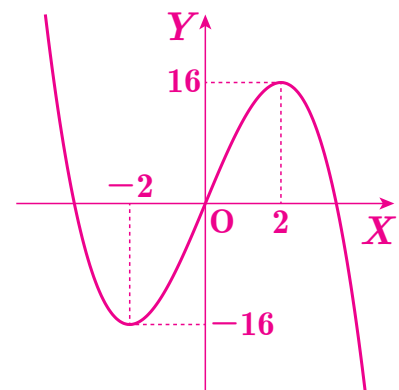
เมื่อ $x = 2$ แล้ว $y = 16$ ซึ่งเป็นค่าสูงสุด
สัมพัทธ์

กราฟแสดงในแผนภาพด้านขวา

x	...	-2	...	2	...
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	-16	$\nearrow$	16	$\searrow$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ... 16

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ... -16



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด DEF เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

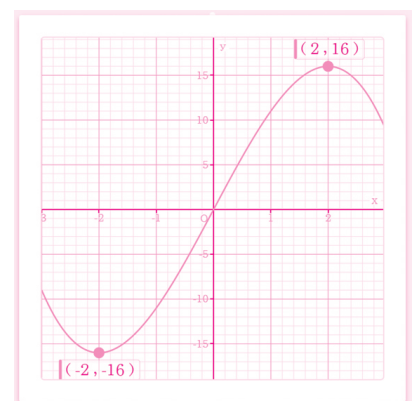
[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = -x^3 + 12x$ กด EXE

กด F6 เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น): -3, End (สิ้นสุด): 3, Step (ขั้น): 1] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด F1 X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



ฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดและค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน (2)

TARGET

การทำความเข้าใจค่าสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์และค่าสุดขีดสัมพัทธ์ รวมถึงฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

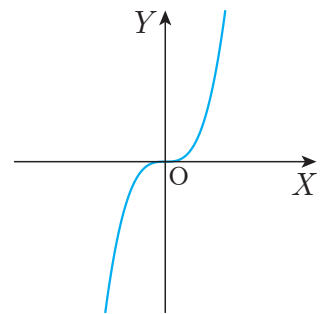
STUDY GUIDE

ค่าสัมประสิทธิ์เชิงอนุพันธ์และค่าสุดขีดสัมพัทธ์

หากฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าสุดขีดที่ $x=a$ แล้วเราจะได้ $f'(a)=0$ อย่างไรก็ตาม แม้ว่า $f'(a)=0$ เราก็ไม่สามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าสุดขีดที่ $x=a$

Ex. สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ จาก $f'(x) = 3x^2$ เราจะได้ $f'(0)=0$ แต่เราไม่สามารถหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ได้ตามที่แสดงในตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดด้านขวา เนื่องจากก่อนและหลัง $x=0$ และเป็น $f'(x)>0$ เสมอ ดังนั้นค่าจึงเพิ่มขึ้นเท่านั้น

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗



ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

รายการที่เกี่ยวข้องกับการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อไปนี้ถูกต้อง

- (1) ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x=a \Rightarrow f'(a)=0$
- (2) สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ เฉพาะเมื่อ $f'(x)>0$ หรือ $f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ ฟังก์ชันเพิ่ม
สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ เฉพาะเมื่อ $f'(x)<0$ หรือ $f'(x)\leq 0 \Rightarrow$ ฟังก์ชันลด

โปรดทราบว่าใน (2) ที่ด้านบน ค่าคงตัวที่เพิ่มขึ้นจะเรียกว่าฟังก์ชันเพิ่ม และค่าคงตัวที่ลดลงจะเรียกว่าฟังก์ชันลด

EXERCISE

① จงแก้โจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ดังต่อไปนี้

(1) พิจารณาค่าของค่าคงที่ a และ b เพื่อหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์

$$x=-1 \text{ และ } x=3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x=-1$ และ $x=3$ ดังนั้นเรา

$$\text{จะได้ } f'(-1)=0 \text{ และ } f'(3)=0$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 0, 2a - b = 3 \quad \dots(i)$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b = 0, 6a + b = -27 \quad \dots(ii)$$

จากการแก้โจทย์ (i) และ (ii) เราจะได้ $a=-3$ และ $b=-9$

$$\underline{a=-3, b=-9}$$

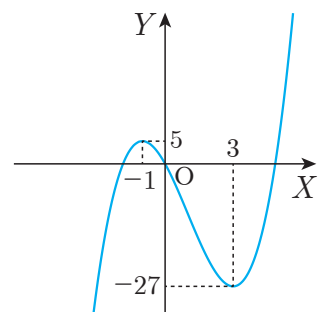
(2) หาค่าสุดขีดสัมพัทธ์สำหรับ (1)

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ แสดงอยู่ทางด้านขวา

ดังนั้น เมื่อ $x=-1$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 5 และเมื่อ $x=3$ ค่าต่ำสุด

สัมพัทธ์คือ -27

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

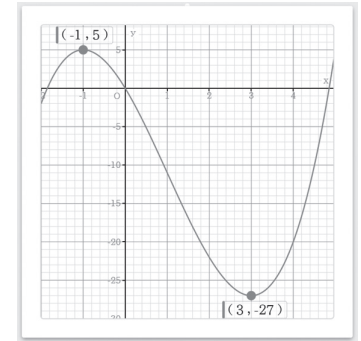


เมื่อ $x=-1$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 5 และเมื่อ $x=3$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ -27



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด F1
 กด F2 เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK
 เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
 กด F3
 กด F2 เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจาก
 ป้อน [Start (เริ่มต้น): -2, End (สิ้นสุด): 5, Step (ขั้น): 1] แล้ว
 ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด F3
 กด F1 F2 สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



- ② โดยกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x - 4$ จงพิสูจน์ว่าค่าของ $f(x)$ เพิ่มขึ้นเสมอสำหรับพิสัยของ x ทั้งหมด
 [การพิสูจน์]

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

เนื่องจากค่าทั้งหมดของ x , $x^2 \geq 0$ แล้วจาก $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ เราจะได้ $f'(x) > 0$

ดังนั้น เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x - 4$ ค่าของ $f(x)$ จึงเพิ่มขึ้นเสมอสำหรับพิสัยของ x ทั้งหมด

PRACTICE

- ① จงพิจารณาค่าของค่าคงที่ a และ b เพื่อให้ฟังก์ชัน $f(x) = -x^3 + ax + b$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ 4 เมื่อ $x=1$

$$f'(x) = -3x^2 + a$$

ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ 4 เมื่อ $x=1$ ดังนั้นเราจะได้ $f'(1)=0$ และ $f(1)=4$

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + a = 0, a = 3 \dots (i)$$

$$f(1) = -1^3 + a \cdot 1 + b = 4, a + b = 5 \dots (ii)$$

จากการแก้โจทย์ (i) และ (ii) เราจะได้ $a=3$

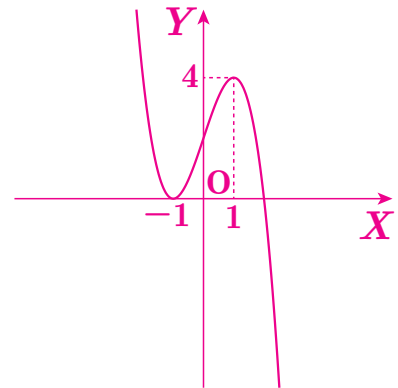
และ $b=2$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟ

แสดงอยู่ทางด้านขวา

$$a=3, b=2$$

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

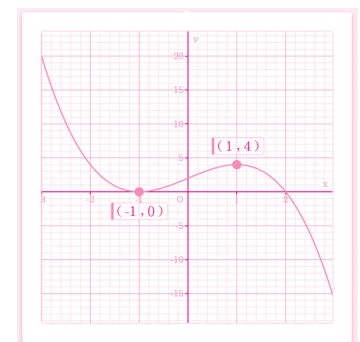
[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ กด EXE

กด $\odot\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น): -3 , End (สิ้นสุด): 3 , Step (ขั้น): 1] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด $\uparrow \odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



- ② โดยกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 5x + 7$ จงพิสูจน์ว่าค่าของ $f(x)$ เพิ่มขึ้นเสมอสำหรับพิสัยของ x ทั้งหมด

[การพิสูจน์]

$$f'(x) = 6x^2 + 5$$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ สำหรับค่าทั้งหมดของ x จาก $6x^2 + 5 \geq 5 > 0$ เราจะได้

$$f'(x) > 0$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 5x + 7$ ค่าของ $f(x)$ จึงเพิ่มขึ้นเสมอสำหรับพิสัยของ x ทั้งหมด

ฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดและกราฟที่เกี่ยวข้อง (1)

TARGET

การทำความเข้าใจค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันภายในพิสัยที่กำหนด

STUDY GUIDE

ค่าสูงสุด/ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

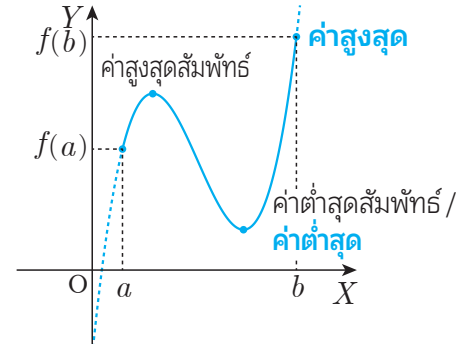
ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x)$ ตามที่นิยามโดย $a \leq x \leq b$ อาจไม่เท่ากับค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เสมอไป

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดคือค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเมื่อพิจารณาทั้งโดเมน

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดตามลำดับภายในพิสัยที่ใกล้กับจุดเหล่านั้นในระยะที่เหมาะสม

ดังนั้น หากต้องการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด เราต้องพิจารณาตัวแปร

ต่าง ๆ ต่อไปนี้



- (1) หาอนุพันธ์ $f'(x)$ เพื่อแก้โจทย์ $f'(x)=0$
- (2) วาดตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟ
- (3) เปรียบเทียบค่าจากปลายทั้งสองข้างของโดเมนและค่าสูงสุด เพื่อหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชัน $y = x^3 + 3x^2$ ดังต่อไปนี้

(1) หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสำหรับ $-3 \leq x \leq 1$

จาก $y' = 3x^2 + 6x$ เราจะได้ $3x^2 + 6x = 0, 3x(x+2) = 0, x = 0, -2$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟแสดงอยู่ทางด้านขวา

เมื่อ $x=-2$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 4 ซึ่งเป็นค่าสูงสุดด้วย

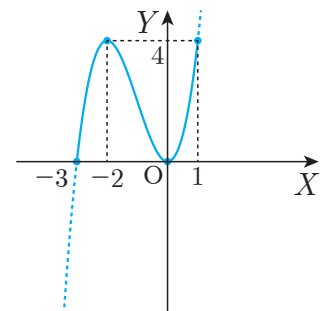
เมื่อ $x=0$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ 0 ซึ่งเป็นค่าต่ำสุดด้วย

เมื่อ $x=-3$ ค่าต่ำสุดคือ 0

เมื่อ $x=1$ ค่าสูงสุดคือ 4

x	-3	...	-2	...	0	...	1
y'		+	0	-	0	+	
y	0	↗	4	↘	0	↗	4

**เมื่อ $x=-2$ หรือ 1 ค่าสูงสุดคือ 4
และเมื่อ $x=-3$ หรือ 0 ค่าต่ำสุดคือ 0**



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด $\odot$ เลือก

[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$ หลังจากป้อน $f(x) = x^3 + 3x^2$ แล้ว

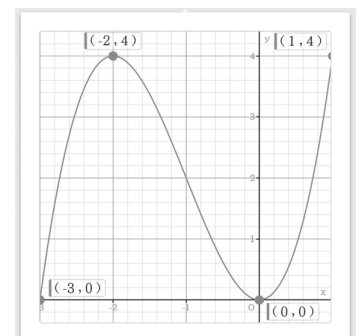
ให้กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$ หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):-3, End (สิ้นสุด):1, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด $\odot$

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



(2) หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสำหรับ $-4 \leq x \leq 2$

จาก $y' = 3x^2 + 6x$ เราจะได้ $3x^2 + 6x = 0, 3x(x+2) = 0, x = 0, -2$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟแสดงอยู่ทางด้านขวา

เมื่อ $x = -2$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 4

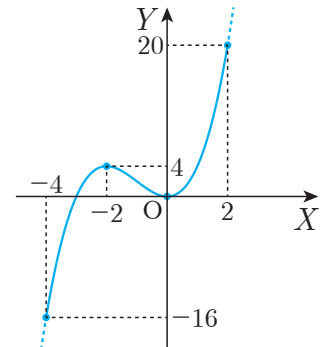
เมื่อ $x = 0$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ 0

เมื่อ $x = -4$ ค่าต่ำสุดคือ -16

เมื่อ $x = 2$ ค่าสูงสุดคือ 20

x	-4	...	-2	...	0	...	2
y'		+	0	-	0	+	
y	-16	↗	4	↘	0	↗	20

เมื่อ $x=2$ ค่าสูงสุดคือ 20
และเมื่อ $x=-4$ ค่าต่ำสุดคือ -16



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

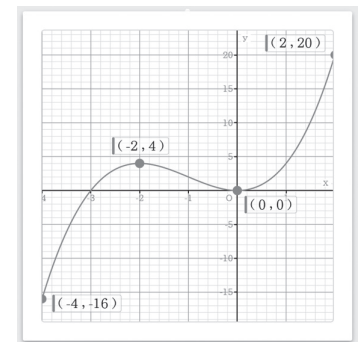
กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^3 + 3x^2$ กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจาก

ป้อน [Start (เริ่มต้น):-4, End (สิ้นสุด):2, Step (ขั้น):1] แล้ว

ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชัน $y = -2x^3 + 3x^2$ ดังต่อไปนี้

(1) หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสำหรับ $0 \leq x \leq 1$

จาก $y' = -6x^2 + 6x$ เราจะได้ $-6x^2 + 6x = 0, -6x(x-1) = 0, x = 0, 1$

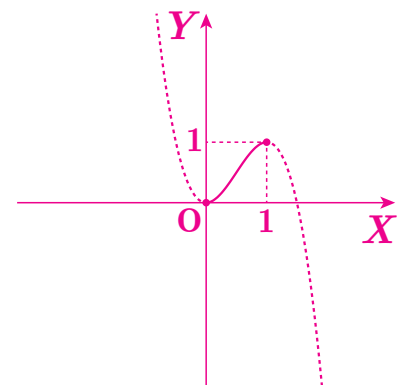
ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟแสดงอยู่ทางด้านขวา

เมื่อ $x = 0$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ 0 ซึ่งเป็นค่าต่ำสุดด้วย

เมื่อ $x = 1$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 1 ซึ่งเป็นค่าสูงสุดด้วย

x	...	0	...	1	...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	0	↗	1	↘

เมื่อ $x=1$ ค่าสูงสุดคือ 1 และ
เมื่อ $x=0$ ค่าต่ำสุดคือ 0



(2) หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสำหรับ $-1 \leq x \leq 2$

จาก $y' = -6x^2 + 6x$ เราจะได้ $-6x^2 + 6x = 0, -6x(x-1) = 0, x = 0, 1$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟ

แสดงอยู่ทางด้านขวา

เมื่อ $x=0$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ 0

เมื่อ $x=1$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 1

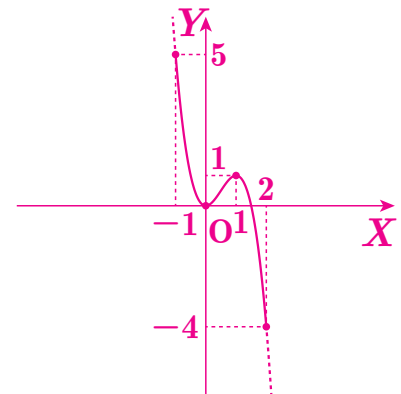
เมื่อ $x=-1$ ค่าสูงสุดคือ 5

เมื่อ $x=2$ ค่าต่ำสุดคือ -4

x	-1	...	0	...	1	...	2
y'		-	0	+	0	-	
y	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

เมื่อ $x=-1$ ค่าสูงสุดคือ 5 และ

เมื่อ $x=2$ ค่าต่ำสุดคือ -4



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

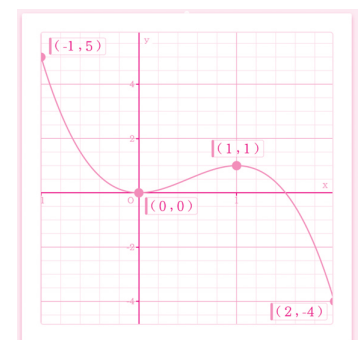
[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):-1, End (สิ้นสุด):2, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



ฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดและกราฟที่เกี่ยวข้อง (2)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีใช้กราฟเพื่อหาจำนวนคำตอบของจำนวนจริงในสมการ

STUDY GUIDE

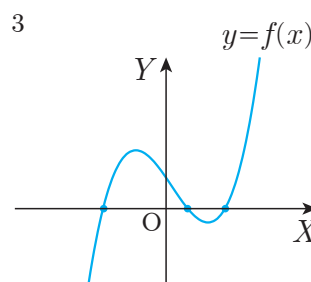
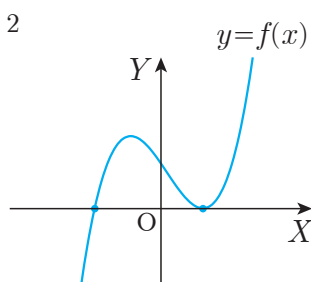
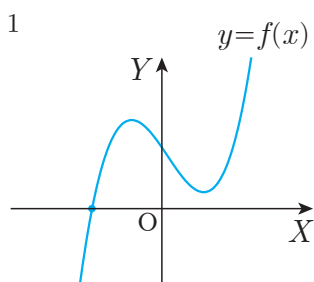
จำนวนคำตอบของจำนวนจริงในสมการ

จำนวนคำตอบของจำนวนจริงในสมการ $f(x)=0$ คือพิกัด x ที่มีจุดตัดบนแกน x ของกราฟฟังก์ชัน $y=f(x)$ โดยพิจารณาว่าฟังก์ชัน $y=f(x)$ เพิ่มขึ้นและลดลงอย่างไร รวมถึงการวาดกราฟ เราสามารถหาจำนวนคำตอบของจำนวนจริงในสมการ $f(x)=0$ ได้

(จำนวนคำตอบของจำนวนจริงในสมการ $f(x)=0$)

$\Leftrightarrow$ (กราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ และจำนวนของจุดตัดบนแกน x)

จำนวนคำตอบของจำนวนจริงใน $f(x)=0$



EXERCISE

◆ หาจำนวนคำตอบของจำนวนจริงที่แตกต่างกันในสมการ $x^3 - 3x + 1 = 0$

สำหรับฟังก์ชัน $y = x^3 - 3x + 1$ เราจะได้ $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

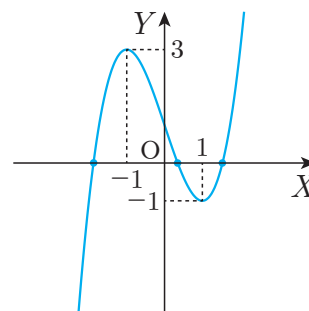
เมื่อ $y'=0$ เราจะได้ $x=\pm 1$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟแสดงอยู่ทางด้านขวา

ดังนั้น จำนวนคำตอบของจำนวนจริงคือ 3

x	...	-1	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

3



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน

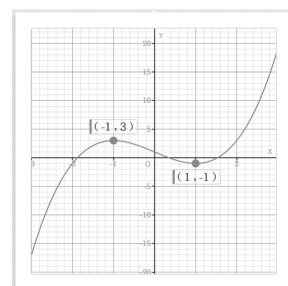
$f(x)=x^3-3x+1$ แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):-3, End (สิ้นสุด):3, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

หาจำนวนคำตอบของจำนวนจริงที่แตกต่างกันในสมการ $x^3 - 6x^2 + 2 = 0$

สำหรับฟังก์ชัน $y = x^3 - 6x^2 + 2$ เราจะได้ $y' = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

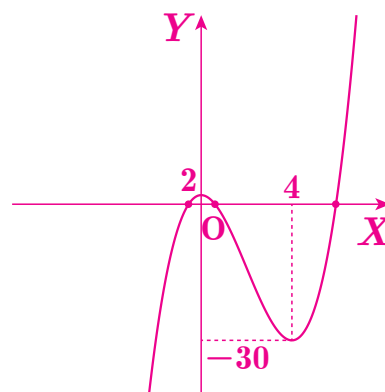
เมื่อ $y' = 0$ เราจะได้ $x = 0, 4$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟแสดงอยู่ทางด้านขวา

ดังนั้น จำนวนคำตอบของจำนวนจริงคือ 3

x	...	0	...	4	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-30	↗

3



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

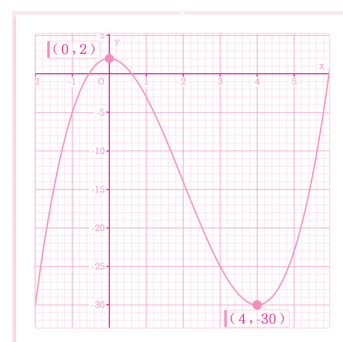
[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):-2, End (สิ้นสุด):6, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



ฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดและกราฟที่เกี่ยวข้อง (3)

TARGET

การทำความเข้าใจการพิสูจน์และวิธีการพิสูจน์อสมการของฟังก์ชันกำลังสาม

STUDY GUIDE

การพิสูจน์อสมการของฟังก์ชันกำลังสาม

เราสามารถพิสูจน์อสมการ $f(x) \geq g(x)$ ($x \geq a$) ด้วยวิธีต่อไปนี้ โดยการกำหนดการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน ใช้สมบัติของ $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ เพื่อพิจารณาการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน $f(x) - g(x)$ ที่ $x \geq a$ เพื่อแสดงว่าค่าต่ำสุดคือ ≥ 0

การพิสูจน์ $f(x) \geq g(x)$

$$F(x) = f(x) - g(x) \text{ ค่าต่ำสุด } \geq 0$$

EXERCISE

- ◆ หาก $x \geq 1$ จากนั้นให้พิสูจน์อสมการ $x^3 + 9x \geq 6x^2$ และแก้โจทย์เมื่อเครื่องหมายสมการเป็นจริง

[การพิสูจน์]

โดยกำหนดให้ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ เราจะได้

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

เมื่อ $f'(x) = 0$ เราจะได้ $x = 1, 3$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟแสดงอยู่ทางด้านขวา

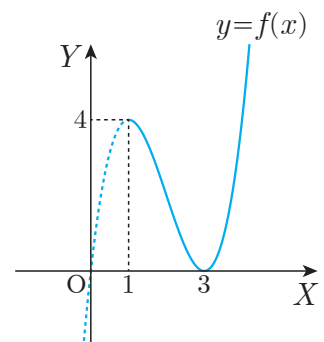
ดังนั้น เมื่อ $x \geq 1$ แล้ว $f(x)$ มีค่าต่ำสุดของ 0 ที่ $x = 3$

ดังนั้น เมื่อ $x \geq 1$ แล้ว $f(x) \geq 0$ ก็จะได้ $x^3 - 6x^2 + 9x \geq 0$

เราจะได้ $x^3 + 9x \geq 6x^2$ โดยเฉพาะ

นอกจากนี้ เครื่องหมายสมการจะเป็นจริงเมื่อ $x = 3$

x	1	...	3	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด DEF เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

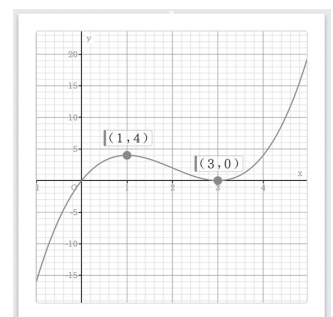
[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ กด EXE

กด RANGE เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น): -1, End (สิ้นสุด): 5, Step (ขั้น): 1] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด F6 สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

■ หาก $x \geq -1$ จากนั้นให้พิสูจน์อสมการ $x^3 + 16 \geq 12x$ และแก้โจทย์เมื่อเครื่องหมายสมการเป็นจริง

[การพิสูจน์]

โดยกำหนดให้ $f(x) = x^3 + 16 - 12x$ เราจะได้

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$

เมื่อ $f'(x) = 0$ เราจะได้ $x = \pm 2$

ตารางแสดงฟังก์ชันเพิ่ม/ลดและกราฟแสดง
อยู่ทางด้านขวา

ดังนั้น เมื่อ $x \geq -1$ แล้ว $f(x)$ มีค่าต่ำสุดของ 0 ที่
 $x = 2$

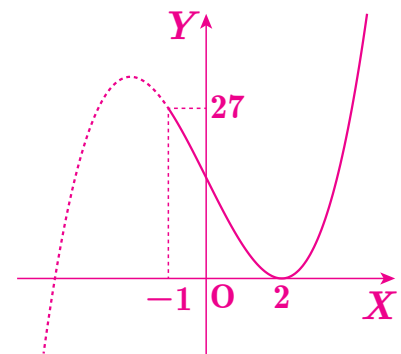
ดังนั้น เมื่อ $x \geq -1$ แล้ว $f(x) \geq 0$ ก็จะได้

$$x^3 + 16 - 12x \geq 0$$

เราจะได้ $x^3 + 16 \geq 12x$ โดยเฉพาะ

นอกจากนี้ เครื่องหมายสมการจะเป็นจริงเมื่อ $x = 2$

x	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	27	↘	0	↗



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก

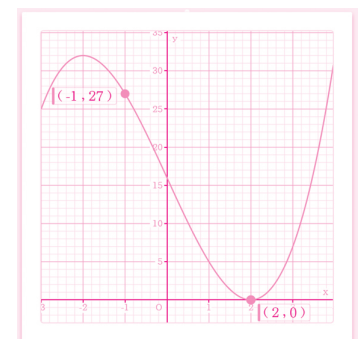
[Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^3 - 12x + 16$ กด EXE

กด $\odot\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):-3, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก

[Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

TARGET

การทำความเข้าใจปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

STUDY GUIDE

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ การหาอนุพันธ์ $f(x)$ ของฟังก์ชัน $F(x)$ ซึ่งจะเรียกว่า **ปฏิยานุพันธ์** ของ $f(x)$ ซึ่งก็คือ $F'(x)=f(x)$

Ex. $(x^3)' = 3x^2, (x^3 + 5)' = 3x^2, (x^3 - 8)' = 3x^2$ เพื่อให้ $x^3, x^3 + 5, x^3 - 8$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $3x^2$

ดังนั้น จึงมีจำนวนอนันต์ของปฏิยานุพันธ์สำหรับ $f(x)$ และผลต่างเดียวคือค่าคงที่

โดยกำหนดให้ $F(x)$ คือ 1 ของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้ว $F(x)+C$ (โดยที่ C คือค่าคงที่) นั้นเขียนในรูป

$\int f(x)dx$ ซึ่งเราจะเรียกว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** ของ $f(x)$

การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int f(x)dx$ ของฟังก์ชัน $f(x)$ เรียกว่า **การหาปริพันธ์** และค่าคงตัว C เรียกว่า **ค่าคงตัวใด ๆ**

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

Ex. $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ (C คือค่าคงตัวใด ๆ)

EXTRA Info.

การหาปริพันธ์และการหาอนุพันธ์คือการดำเนินการที่ตรงข้ามกัน

$$3x^2 \xrightleftharpoons[\text{การหาอนุพันธ์}]{\text{การหาปริพันธ์}} x^3 + C$$

EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) เลือกคำตอบทั้งหมดจาก (a) ถึง (e) ที่เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $2x$ ต่อไปนี้

(a) x^2 (b) $2x^2$ (c) $x^2 - 9$ (d) 2 (e) $x^2 + \frac{1}{2}$

$$(x^2)' = 2x, (2x^2)' = 4x, (x^2 - 9)' = 2x, (2)' = 0, \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)' = 2x$$

ฟังก์ชันทั้งหมดที่หาอนุพันธ์ได้เป็น $2x$ คือปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $2x$

(a), (c), (e)

(2) ใช้ $(x^4)' = 4x^3$ เพื่อหา $\int 4x^3 dx$

เนื่องจาก $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ เราจะได้ $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ (C คือค่าคงตัวใด ๆ)

$x^4 + C$ (C คือค่าคงตัวใด ๆ)

(3) หาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x$

จาก $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$ เนื่องจาก $\frac{1}{2}x^2$ คือปฏิยานุพันธ์ 1 ฟังก์ชันของ x เราจะได้ $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$ (C คือค่าคงตัวใด ๆ)

$\frac{1}{2}x^2 + C$ (C คือค่าคงตัวใด ๆ)

PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) เลือกคำตอบทั้งหมดจาก (a) ถึง (e) ที่เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $5x^4$ ต่อไปนี้

(a) $5x^5$ (b) x^5 (c) $20x^3$ (d) $x^5 + 3$ (e) $x^5 - \frac{4}{5}$

$$(5x^5)' = 25x^4, (x^5)' = 5x^4, (20x^3)' = 60x^2, (x^5 + 3)' = 5x^4, \left(x^5 - \frac{4}{5}\right)' = 5x^4$$

ฟังก์ชันทั้งหมดที่หาอนุพันธ์ได้เป็น $5x^4$ คือปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $5x^4$
(b), (d), (e)

(2) ใช้ $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ เพื่อหา $\int x^2 dx$

เนื่องจาก $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ เราจะได้ $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
(C คือค่าคงตัวใดๆ)

$$\frac{1}{3}x^3 + C \text{ (} C \text{ คือค่าคงตัวใดๆ)}$$

(3) หาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$

จาก $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ เนื่องจาก $\frac{1}{4}x^4$ คือปฏิยานุพันธ์ 1 ฟังก์ชันของ x^3 เราจะได้

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C \text{ (} C \text{ คือค่าคงตัวใดๆ)}$$

$$\frac{1}{4}x^4 + C \text{ (} C \text{ คือค่าคงตัวใดๆ)}$$

สมบัติต่าง ๆ ของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติต่าง ๆ ของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและวิธีการคำนวณปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

STUDY GUIDE

วิธีการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

จาก $(x)' = 1, \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x, \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2, \dots$ สมการต่อไปนี้เป็นจริงเมื่อ n คือจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 0 และ C ค่าคงตัว

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

EXTRA Info.

เมื่อ $n=0$ เราจะได้ $\int 1 dx$ แต่มักจะเขียนโดยไม่มี 1 ซึ่งจะเขียนเป็น $\int dx$ นอกจากนี้ C ยังเรียกว่าค่าคงตัวใด ๆ แต่มักจะไม่เขียน

สมบัติต่าง ๆ ของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

สมการต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของตัวประกอบคงที่ ผลรวม และผลต่างของฟังก์ชัน

$$(1) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \text{ คือค่าคงตัว})$$

$$(2) \int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(3) \int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

explanation

โดยกำหนดให้ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ เป็น $F(x)$ และ $G(x)$ ตามลำดับ แล้วเราจะได้ $F'(x)=f(x)$ และ $G'(x)=g(x)$

(1) กำหนดให้ k คือค่าคงตัว แล้วเราจะได้ $\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$

(2) เราจะได้ $\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

(3) เราจะได้ $\{F(x) - G(x)\}' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$

EXERCISE

① หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

$$(1) \int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\underline{\frac{1}{3} x^3 + C}$$

$$(2) \int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{1}{4} x^4 + C$$

$$\underline{\frac{1}{4} x^4 + C}$$

$$(3) \int 1 dx$$

$$= \int x^0 dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} + C = x + C$$

$$\underline{x + C}$$

② จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

$$(1) \text{ หา } \int (5x^3 - 7x^2 + 3x - 4) dx$$

$$= 5 \int x^3 dx - 7 \int x^2 dx + 3 \int x dx - 4 \int dx$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{4} x^4 - 7 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 4 \cdot x + C$$

$$= \frac{5}{4} x^4 - \frac{7}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 4x + C$$

ค่าคงตัวใด ๆ จะเขียนเป็น $+C$ โดยไม่แยกกันสำหรับแต่ละพจน์ แต่จะเขียนเป็น 1

$$\underline{\frac{5}{4} x^4 - \frac{7}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 4x + C}$$

$$(2) \text{ หา } \int (12t^2 - 6t + 5) dt$$

$$= 12 \int t^2 dt - 6 \int t dt + 5 \int dt$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{3} t^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} t^2 + 5 \cdot t + C$$

$$= 4t^3 - 3t^2 + 5t + C$$

สูตรนี้ยังใช้กับตัวแปรอื่นที่ไม่ใช่ x

$$\underline{4t^3 - 3t^2 + 5t + C}$$

(3) หาฟังก์ชัน $F(x)$ ที่ตรงกับเงื่อนไข $F'(x) = 8x - 3$ และ $F(-1) = 5$

$$F(x) = \int (8x - 3) dx = 8 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 3 \cdot x + C = 4x^2 - 3x + C$$

จาก $F(-1) = 4 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + C = 5$ เราจะได้ $7 + C = 5, C = -2$

ดังนั้น เราจึงได้ $F(x) = 4x^2 - 3x - 2$

$$\underline{F(x) = 4x^2 - 3x - 2}$$

PRACTICE

① หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

$$(1) \int x^4 dx$$

$$= \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C = \frac{1}{5} x^5 + C$$

$$\frac{1}{5} x^5 + C$$

$$(2) \int x dx$$

$$= \frac{1}{1+1} x^{1+1} + C = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\frac{1}{2} x^2 + C$$

② จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

$$(1) \text{ หา } \int (3x^2 + 4x - 1) dx$$

$$= 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - \int dx$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 1 \cdot x + C$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + C$$

$$x^3 + 2x^2 - x + C$$

$$(2) \text{ หา } \int \left(t^2 - \frac{1}{3}t - 9 \right) dt$$

$$= \int t^2 dt - \frac{1}{3} \int t dt - 9 \int dt$$

$$= \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} t^2 - 9 \cdot t + C$$

$$= \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{6} t^2 - 9t + C$$

$$\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{6} t^2 - 9t + C$$

(3) หาฟังก์ชัน $F(x)$ ที่ตรงกับเงื่อนไข $F'(x) = 6x - 5$ และ $F(2) = 3$

$$F(x) = \int (6x - 5) dx = 6 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 5 \cdot x + C = 3x^2 - 5x + C$$

จาก $F(2) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + C = 3$ เราจะได้ $2 + C = 3, C = 1$

ดังนั้น เราจึงได้ $F(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$$F(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

สมบัติต่าง ๆ ของปริพันธ์จำกัดเขต

TARGET

การทำความเข้าใจสมบัติต่าง ๆ ของปริพันธ์จำกัดเขตและวิธีการคำนวณปริพันธ์จำกัดเขต

STUDY GUIDE

ปริพันธ์จำกัดเขต

โดยกำหนดให้ $F(x)$ คือค่า 1 ของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เราจึงกล่าวได้ว่า $F(b) - F(a)$ สำหรับจำนวนจริง 2 ตัว a และ b คือ **ปริพันธ์จำกัดเขต** ของ $f(x)$ จาก a ถึง b ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้

$$\text{เมื่อ } F'(x) = f(x) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ในส่วนนี้ เรากล่าวได้ว่า a และ b คือ **ขอบล่าง** และ **ขอบบน** ตามลำดับ และการหาปริพันธ์จำกัดเขตนี้เรียกว่า

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ จาก a ถึง b

นอกจากนี้ เนื่องจาก $[F(x) + C]_a^b = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a)$ ค่าคงตัวใด ๆ C ไม่จำเป็นต้องอยู่ในปริพันธ์จำกัดเขต

สมบัติต่าง ๆ ของปริพันธ์จำกัดเขต

สมการต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับปริพันธ์จำกัดเขตของผลคูณคงที่ ผลรวม และผลต่างของฟังก์ชัน

$$(1) \quad \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ คือค่าคงตัว})$$

$$(2) \quad \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(3) \quad \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$(4) \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

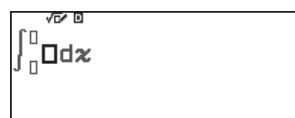
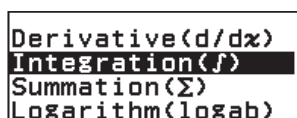
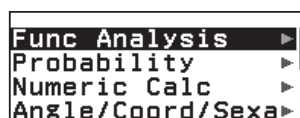
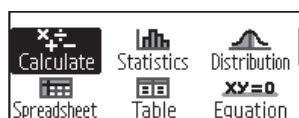
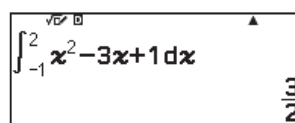
$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$(6) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(ความสัมพันธ์เชิงขนาดของ a , b และ c ไม่มีผลต่อการคำนวณ)

$$(1) \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \right) - \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + (-1) \right\} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{3}{2}$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right]_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \{2^3 - (-1)^3\} - \frac{3}{2} \cdot \{2^2 - (-1)^2\} + \{2 - (-1)\} = \frac{3}{2}$$

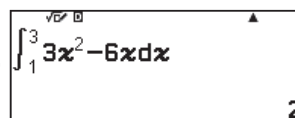
กด **Ⓜ** เลือก [Func Analysis (การวิเคราะห์ฟังก์ชัน)] กด **OK** เลือก [Integration (ปริพันธ์) ($\int$)] กด **OK**


$$(x) \square^2 (-) 3 (x) (+) 1 (\vee) (-) 1 (\wedge) 2 (\text{EXE})$$


$$(2) \int_1^3 (4x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^3 (x^2 + 3x + 2) dx$$

$$= \int_1^3 \{(4x^2 - 3x + 2) - (x^2 + 3x + 2)\} dx = \int_1^3 (3x^2 - 6x) dx = [x^3 - 3x^2]_1^3 = (3^3 - 3 \cdot 3^2) - (1^3 - 3 \cdot 1^2) = 2$$

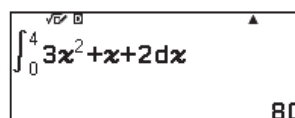
2



$$(3) \quad \int_0^3 (3x^2 + x + 2)dx + \int_3^4 (3x^2 + x + 2)dx$$

$$= \int_0^4 (3x^2 + x + 2) dx = \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^4 = \left(4^3 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \right) - \left(0^3 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \right) = 80$$

80



PRACTICE

◆ หาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

(1) $\int_{-2}^3 (2x^2 + x - 3) dx$

$$= \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 3x \right]_{-2}^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot 3^3 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right) - \left\{ \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) \right\}$$

$$= \frac{65}{6}$$

$$\frac{65}{6}$$

⏮ OK √ OK ② X $\frac{\square^2}{2}$ + X - ③ √ - ② ^ ③ EXE

$$\int_{-2}^3 2x^2 + x - 3 dx$$

$$\frac{65}{6}$$

(2) $\int_1^2 (2x^2 - 3x + 4) dx + \int_1^2 (x^2 + 3x + 1) dx$

$$= \int_1^2 \{ (2x^2 - 3x + 4) + (x^2 + 3x + 1) \} dx = \int_1^2 (3x^2 + 5) dx$$

$$= [x^3 + 5x]_1^2 = (2^3 + 5 \cdot 2) - (1^3 + 5 \cdot 1) = 12$$

$$12$$

⏮ OK √ OK ③ X $\frac{\square^2}{2}$ + ⑤ √ ① ^ ② EXE

$$\int_1^2 3x^2 + 5 dx$$

$$12$$

(3) $\int_0^1 (x^2 - 3x + 4) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 4) dx$

$$= \int_0^3 (x^2 - 3x + 4) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x \right]_0^3$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \right) = \frac{15}{2}$$

$$\frac{15}{2}$$

⏮ OK √ OK X $\frac{\square^2}{2}$ - ③ X + ④ √ ① ^ ③ EXE

$$\int_0^3 x^2 - 3x + 4 dx$$

$$\frac{15}{2}$$

แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์และแคลคูลัสเชิงปริพันธ์: แคลคูลัสเชิงปริพันธ์

ปริพันธ์จำกัดเขตและแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์

TARGET

การทำความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างปริพันธ์จำกัดเขตและแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์

STUDY GUIDE

ปริพันธ์จำกัดเขตและแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์

เมื่อ a คือค่าคงตัว ปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^x f(t)dt$ คือฟังก์ชันของขอบบน x เมื่อหาอนุพันธ์โดย x อนุพันธ์จะกลายเป็น $f(x)$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \text{ คือค่าคงตัว})$$

explanation

โดยกำหนดให้ $F(t)$ คือ 1 ของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(t)$ แล้ว $F'(t)=f(t)$

$$\text{ดังนั้น เราจึงได้ } \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx} [F(t)]_a^x = \frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\}$$

เนื่องจาก $F(a)$ เป็นค่าคงที่ เมื่อหาอนุพันธ์แล้วจะกลายเป็น 0 ดังนั้น เราจะได้

$$\frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x) = f(x)$$

ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

และเนื่องจาก $f(x) = x^2, f(x) = x^4, \dots$ เรากล่าวได้ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ เพื่อจะได้ $f(-x)=f(x)$ เป็นจริงเสมอ คือฟังก์ชันคู่ และกราฟของฟังก์ชันคู่จะสมมาตรกับแกน y

และเนื่องจาก $f(x) = x, f(x) = x^3, \dots$ เรากล่าวได้ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ เพื่อจะได้ $f(-x)=-f(x)$ เป็นจริงเสมอ คือฟังก์ชันคี่ และกราฟของฟังก์ชันคี่จะสมมาตรกับจุดกำเนิด

สมการต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

$$f(x) \text{ คือฟังก์ชันคู่} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

$$f(x) \text{ คือฟังก์ชันคี่} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Ex. (1) $\int_{-3}^3 x^4 dx = 2 \int_0^3 x^4 dx = 2 \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^3 = 2 \left(\frac{1}{5} \cdot 3^5 - \frac{1}{5} \cdot 0^5 \right) = \frac{486}{5}$

(2) $\int_{-12}^{12} x^5 dx = 0$

(3) $\int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 + 5x + 1)dx = 2 \int_0^2 (-3x^2 + 1)dx = 2[-x^3 + x]_0^2 = 2\{(-2^3 + 2) - (-0^3 + 0)\} = -12$

EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \int_2^x (6t^2 - 2t) dt$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_2^x (6t^2 - 2t) dt = 6x^2 - 2x$$

$$\underline{f'(x) = 6x^2 - 2x}$$

(2) โดยกำหนดให้ a คือค่าคงตัว หาค่าของค่าคงตัว a และฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ตรงกับ $\int_a^x f(t) dt = x^2 + 3x - 4$
หาอนุพันธ์ของสมการที่กำหนดทั้งสองข้างโดย x

จาก $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (x^2 + 3x - 4)$ เราจะได้ $f(x) = 2x + 3$

โดยให้ $x=a$ ในสมการที่กำหนด

เนื่องจาก $\int_a^a f(t) dt = 0$ เราจะได้ $0 = a^2 + 3a - 4, a = 1, -4$

$$\underline{f(x) = 2x + 3, a = 1, -4}$$

(3) หาฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ตรงกับสมการ $f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(t) dt$

หากเรากำหนดให้ $\int_0^1 f(t) dt = a$ (a เป็นค่าคงตัว)...(i) แล้วเราจะได้ $f(x) = x^2 + 2a$...(ii)

จาก (i) และ (ii) เราจะได้ $\int_0^1 (t^2 + 2a) dt = a$ และ $\int_0^1 (t^2 + 2a) dt = \left[\frac{1}{3} t^3 + 2at \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2a$

ดังนั้น เนื่องจากเราได้ $\frac{1}{3} + 2a = a, a = -\frac{1}{3}$ มาแล้ว เราจึงได้ $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}$

$$\underline{f(x) = x^2 - \frac{2}{3}}$$

PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \int_1^x (3t^2 + 4t) dt$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x (3t^2 + 4t) dt = 3x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

(2) โดยกำหนดให้ a คือค่าคงตัว หาค่าของค่าคงที่ a และฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ตรงกับสมการ $\int_a^x f(t) dt = x^2 - 5x + 6$

หาอนุพันธ์ของสมการที่กำหนดทั้งสองข้างโดย x

จาก $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (x^2 - 5x + 6)$ เราจะได้ $f(x) = 2x - 5$

โดยให้ $x=a$ ในสมการที่กำหนด

เนื่องจาก $\int_a^a f(t) dt = 0$ เราจะได้ $0 = a^2 - 5a + 6, a = 2, 3$

$$f(x) = 2x - 5, a = 2, 3$$

(3) หาฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ตรงกับสมการ $f(x) = 3x^2 + \int_{-1}^2 f(t) dt$

หากเรากำหนดให้ $\int_{-1}^2 f(t) dt = a$ (a เป็นค่าคงตัว)...(i)

แล้วเราจะได้ $f(x) = 3x^2 + a$...(ii)

จาก (i) และ (ii) เราจะได้ $\int_{-1}^2 (3t^2 + a) dt = a$ และ

$$\int_{-1}^2 (3t^2 + a) dt = [t^3 + at]_{-1}^2 = 9 + 3a$$

ดังนั้น เนื่องจากเราได้ $9 + 3a = a, a = -\frac{9}{2}$ มาแล้ว เราจึงได้ $f(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}$

$$f(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}$$

ปริพันธ์จำกัดเขตและพื้นที่ของรูปทรง (1)

TARGET

การทำความเข้าใจพื้นที่ใต้กราฟและแกน x และเส้นตรง 2 เส้น $x=a$ และ $x=b$

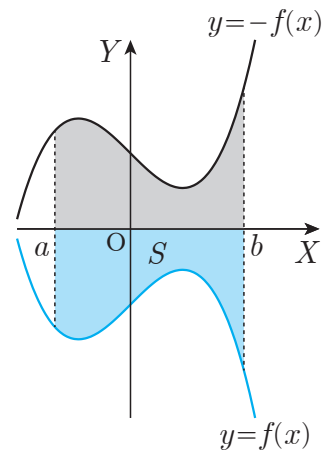
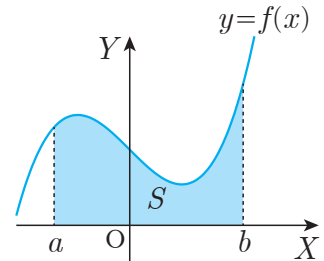
STUDY GUIDE

ปริพันธ์จำกัดเขตและพื้นที่ของรูปทรง

โดยกำหนดให้ $a \leq x \leq b$ แล้วเมื่อ $f(x) \geq 0$ พื้นที่ใต้กราฟ S ที่ปิดล้อมโดยเส้นโค้ง $y=f(x)$ และแกน x และเส้นตรง 2 เส้น $x=a$ และ $x=b$ มีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

นอกจากนี้ เมื่อกำหนดให้ $a \leq x \leq b$ แล้วเมื่อ $f(x) \leq 0$ พื้นที่ S ที่ปิดล้อมโดยเส้นโค้ง $y=f(x)$ และแกน x และเส้นตรง 2 เส้น $x=a$ และ $x=b$ คือพื้นที่ใต้กราฟที่ปิดล้อมโดยเส้นโค้ง $y=f(x)$ สะท้อนข้ามแกน x และแกน x และเส้นตรง 2 เส้น $x=a$ และ $x=b$ โดยกำหนดให้ $a \leq x \leq b$ ซึ่งเราจะได้ $S = \int_a^b \{-f(x)\} dx = -\int_a^b f(x) dx$



explanation

เพื่อหาพื้นที่ S จาก $x=a$ ถึง $x=b$ เราจะพิจารณาฟังก์ชัน $S(x)$ ซึ่งแสดงพื้นที่จาก $x=a$ ถึง $x=x$

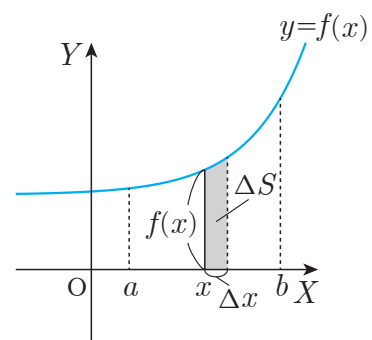
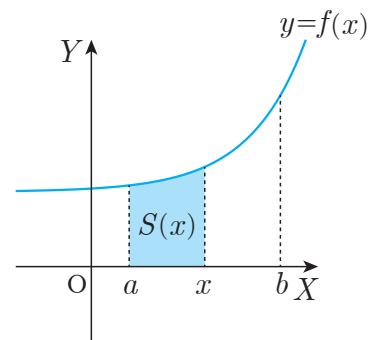
ดังนั้น $S(a)=0$ และ $S(b)=S$

โดยกำหนดให้ ΔS เป็นพื้นที่จาก x ถึง $x+\Delta x$ แล้ว ΔS สามารถหาค่าประมาณได้โดยใช้พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า $f(x)\Delta x$ สำหรับ Δx ที่มีขนาดเล็กมาก ดังนั้น เราจึงได้

$$\Delta S = f(x)\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow \frac{dS}{dx} = f(x)$$

ดังนั้น $S(x)$ คือ 1 ของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$

เนื่องจาก $S(x) = \int f(x) dx$ เราจึงได้ $S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x) dx$ โดยเฉพาะ



EXERCISE



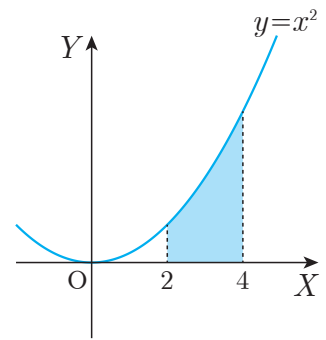
หาพื้นที่ใต้กราฟ S ที่ปิดล้อมโดยเส้นโค้งและเส้นตรงต่อไปนี้

(1) เส้นโค้ง $y = x^2$ และแกน x และเส้นตรง 2 เส้น $x=2$ และ $x=4$

สำหรับ $2 \leq x \leq 4$ เราจะได้ $y = x^2 > 0$

$$S = \int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_2^4 = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 = \frac{56}{3}$$

$$\frac{56}{3}$$



⊞ OK √ OK

⊗ ⊞ √ ⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

$$\int_2^4 x^2 dx \quad \frac{56}{3}$$

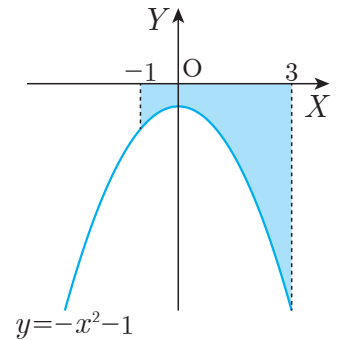
(2) เส้นโค้ง $y = -x^2 - 1$ และแกน x และเส้นตรง 2 เส้น $x=-1$ และ $x=3$

สำหรับ $-1 \leq x \leq 3$ เราจะได้ $y = -x^2 - 1 < 0$

$$S = \int_{-1}^3 \{-(-x^2 - 1)\} dx = - \int_{-1}^3 (-x^2 - 1) dx = - \left[-\frac{1}{3} x^3 - x \right]_{-1}^3$$

$$= - \left[\left(-\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1) \right) \right] = \frac{40}{3}$$

$$\frac{40}{3}$$



⊞ OK √ OK

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

$$\int_{-1}^3 -(-x^2 - 1) dx \quad \frac{40}{3}$$

(3) เส้นโค้ง $y = -x^2 + 1$ และแกน x

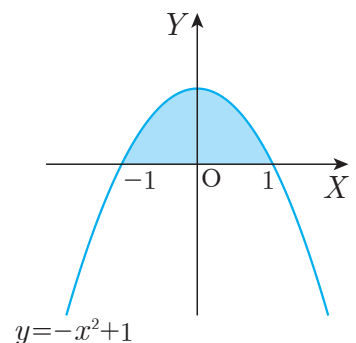
โดยการแก้ $-x^2 + 1 = 0$ เราจะได้ $x = \pm 1$ ดังนั้นเส้นโค้ง $y = -x^2 + 1$ จะ

ข้ามแกน x ที่ $x = \pm 1$

$$S = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 + x \right]_{-1}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1) \right) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}$$



⊞ OK √ OK

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

⊙ ⊙ ⊙

$$\int_{-1}^1 -x^2 + 1 dx \quad \frac{4}{3}$$

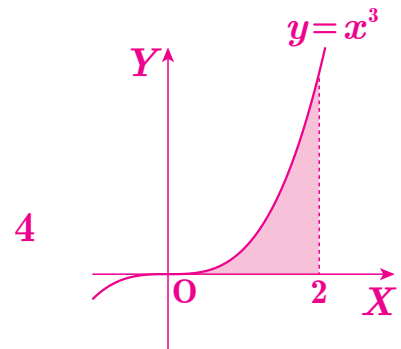
PRACTICE

◆ หาพื้นที่ใต้กราฟ S ที่ปิดล้อมโดยเส้นโค้งและเส้นตรงต่อไปนี้

- (1) เส้นโค้ง $y = x^3$ และแกน x และเส้นตรง 2 เส้น $x=0$ และ $x=2$

สำหรับ $0 \leq x \leq 2$ เราจะได้ $y = x^3 \geq 0$

$$S = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = 4$$



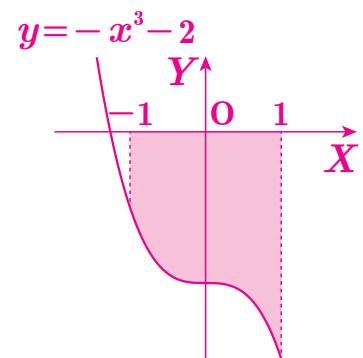
Ⓐ OK √ OK ⓧ □ ③ ∇ ① ^ ② EXE

$$\int_0^2 x^3 dx$$

- (2) เส้นโค้ง $y = -x^3 - 2$ และแกน x และเส้นตรง 2 เส้น $x=-1$ และ $x=1$

สำหรับ $-1 \leq x \leq 1$ เราจะได้ $y = -x^3 - 2 < 0$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{-(-x^3 - 2)\} dx = - \int_{-1}^1 (-x^3 - 2) dx \\ &= - \left[-\frac{1}{4} x^4 - 2x \right]_{-1}^1 \\ &= - \left[\left(-\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1 \right) - \left\{ -\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1) \right\} \right] = 4 \end{aligned}$$



Ⓐ OK √ OK - (- ⓧ □ ③ > - ②) ∇ - ① ^ ① EXE

$$\int_{-1}^1 -(-x^3 - 2) dx$$

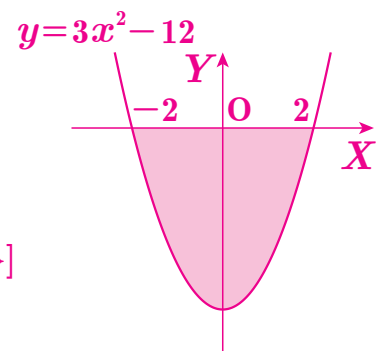
- (3) เส้นโค้ง $y = 3x^2 - 12$ และแกน x

โดยการแก้ $3x^2 - 12 = 0$ เราจะได้ $x = \pm 2$ ดังนั้นเส้น

โค้ง $y = 3x^2 - 12$ จะข้ามแกน x ที่ $x = \pm 2$

สำหรับ $-2 \leq x \leq 2$ เราจะได้ $y = 3x^2 - 12 \leq 0$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \{-(3x^2 - 12)\} dx = - \int_{-2}^2 (3x^2 - 12) dx \\ &= -[x^3 - 12x]_{-2}^2 = -[(2^3 - 12 \cdot 2) - \{(-2)^3 - 12 \cdot (-2)\}] \\ &= 32 \end{aligned}$$



32

Ⓐ OK √ OK - (③ ⓧ □ - ① ②) ∇ - ② ^ ② EXE

$$\int_{-2}^2 -(3x^2 - 12) dx$$

ปริพันธ์จำกัดเขตและพื้นที่ของรูปทรง (2)

TARGET

การทำความเข้าใจปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันที่มีค่าสัมบูรณ์

STUDY GUIDE

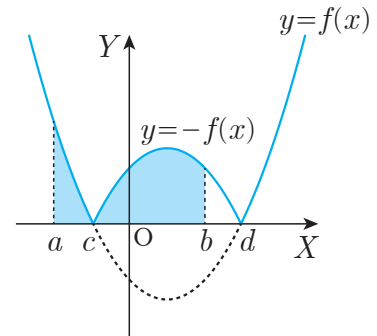
ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันที่มีค่าสัมบูรณ์

หากฟังก์ชันที่จะหาปริพันธ์มีค่าสัมบูรณ์ เราจะหาปริพันธ์ฟังก์ชันหลังจากนำสัญลักษณ์ค่าสัมบูรณ์ออกแล้วโดยการแบ่งช่วงของปริพันธ์

$$|A| = \begin{cases} A & (\text{เมื่อ } A \geq 0) \\ -A & (\text{เมื่อ } A \leq 0) \end{cases}$$

ตามที่แสดงในภาพด้านขวา ฟังก์ชัน $y = |f(x)|$ เมื่อ $x \leq c$ และ $d \leq x$, $y = f(x)$ และเมื่อ $c \leq x \leq d$ จึงเป็น $y = -f(x)$

ปริพันธ์จำกัดเขตจาก a ถึง b ของฟังก์ชัน $y = |f(x)|$ คือ $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx$



EXERCISE

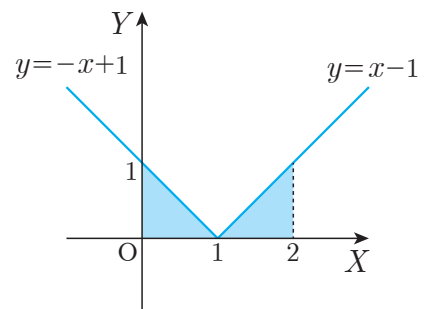


หาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

(1) $\int_0^2 |x-1| dx$

$|x-1|$ คือ $-x+1$ สำหรับ $x \leq 1$ แล้วจึงเป็น $x-1$ สำหรับ $1 \leq x$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 \right) \right) = 1 \end{aligned}$$



1

Ⓢ Ⓚ Ⓜ Ⓟ Ⓡ

Ⓢ Ⓚ Ⓜ Ⓟ Ⓡ Ⓚ Ⓡ

Ⓢ Ⓚ Ⓜ Ⓟ Ⓡ Ⓚ Ⓡ Ⓚ Ⓡ Ⓚ Ⓡ Ⓚ Ⓡ

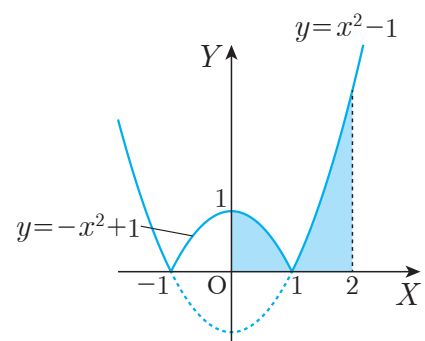
$$\int_0^2 |x-1| dx$$

(2) $\int_0^2 |x^2-1| dx$

$|x^2-1|$ คือ x^2-1 สำหรับ $x \leq -1$ และ $1 \leq x$ และจึงเป็น $-x^2+1$

สำหรับ $-1 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (-x^2+1) dx + \int_1^2 (x^2-1) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1 \right) \right) = 2 \end{aligned}$$



2

Ⓢ Ⓚ Ⓜ Ⓟ Ⓡ

Ⓢ Ⓚ Ⓜ Ⓟ Ⓡ Ⓚ Ⓡ

Ⓢ Ⓚ Ⓜ Ⓟ Ⓡ Ⓚ Ⓡ Ⓚ Ⓡ Ⓚ Ⓡ Ⓚ Ⓡ

$$\int_0^2 |x^2-1| dx$$

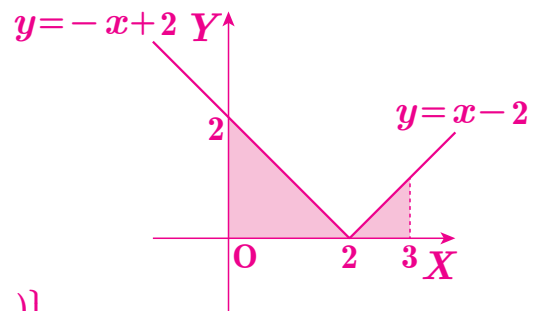
PRACTICE

◆ หาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

(1) $\int_0^3 |x-2| dx$

$|x-2|$ คือ $-x+2$ สำหรับ $x \leq 2$ และจึงเป็น $x-2$ สำหรับ $2 \leq x$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 (-x+2) dx + \int_2^3 (x-2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \right) + \left\{ \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \right) \right\} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$



$\frac{5}{2}$

⊞ OK ∇ OK

⊞ ∇ ∇ OK OK

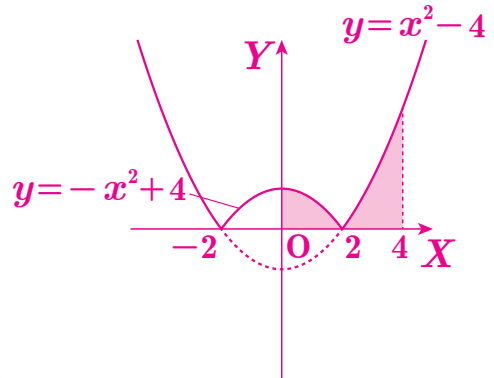
⊗ − 2 ∇ 0 ∧ 3 EXE

$$\int_0^3 |x-2| dx = \frac{5}{2}$$

(2) $\int_0^4 |x^2-4| dx$

$|x^2-4|$ คือ x^2-4 สำหรับ $x \leq -2$ และ $2 \leq x$ และจึงเป็น $-x^2+4$ สำหรับ $-2 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 (-x^2+4) dx + \int_2^4 (x^2-4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_2^4 \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 \right) + \left\{ \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4 - \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 \right) \right\} \\ &= 16 \end{aligned}$$



16

⊞ OK ∇ OK

⊞ ∇ ∇ OK OK

⊗ x^2 − 4 ∇ 0 ∧ 4 EXE

$$\int_0^4 |x^2-4| dx = 16$$

(2) เส้นโค้ง 2 เส้น $y = x^2 - 1$ และ $y = -x^2 - 2$ และเส้นตรง 2 เส้น $x = -1$ และ $x = 1$

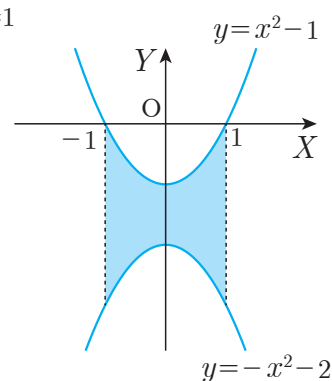
โดยกำหนดให้ $-1 \leq x \leq 1$ จาก $x^2 - 1 - (-x^2 - 2) = 2x^2 + 1 > 0$ เราจะได้

$$x^2 - 1 > -x^2 - 2$$

$$S = \int_{-1}^1 \{x^2 - 1 - (-x^2 - 2)\} dx = \int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + x \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1 - \left\{ \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + (-1) \right\} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{10}{3}$$



⊞ OK ✓ OK

②

(X)

■

+

①

✓

-

①

^

①

EXE

$$\int_{-1}^1 2x^2 + 1 dx$$

$$\frac{10}{3}$$

(3) เส้นโค้ง 2 เส้น $y = x^2 - 1$ และ $y = -x^2 + 1$

พิกัด x ของจุดตัดของเส้นโค้ง 2 เส้นคือ

$$x^2 - 1 = -x^2 + 1, 2x^2 = 2, x = \pm 1$$

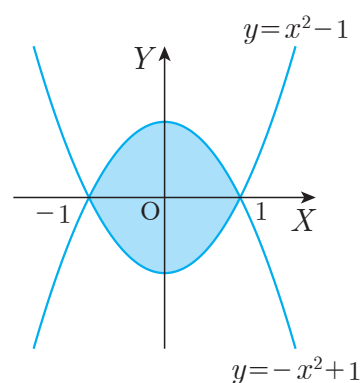
โดยกำหนดให้ $-1 \leq x \leq 1$ จาก $x^2 - 1 - (-x^2 + 1) = 2x^2 - 2 \leq 0$ เรา

จะได้ $x^2 - 1 \leq -x^2 + 1$

$$S = \int_{-1}^1 \{-x^2 + 1 - (x^2 - 1)\} dx = \int_{-1}^1 \{-2(x^2 - 1)\} dx = -2 \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_{-1}^1$$

$$= -2 \left[\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1 - \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1) \right\} \right] = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3}$$



⊞ OK ✓ OK

-

②

(

(X)

■

-

①

)

✓

-

①

^

①

EXE

$$\int_{-1}^1 -2(x^2 - 1) dx$$

$$\frac{8}{3}$$

PRACTICE

◆ หาพื้นที่ใต้กราฟ S ที่ปิดล้อมโดยเส้นโค้งและเส้นตรงต่อไปนี้

(1) เส้นโค้ง 2 เส้น $y = 2x^2 + 3$ และ $y = x^2$ และเส้นตรง 2 เส้น $x = -1$ และ $x = 2$

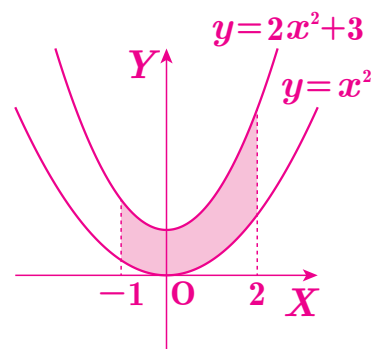
โดยกำหนดให้ $-1 \leq x \leq 2$ จาก $2x^2 + 3 - x^2 = x^2 + 3 > 0$

เราจะได้ $2x^2 + 3 > x^2$

$$S = \int_{-1}^2 (2x^2 + 3 - x^2) dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 + 3x \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) \right\}$$

$$= 12$$



$$12$$

⊞ OK ✓ OK

(X)

■

+

③

✓

-

①

^

②

EXE

$$\int_{-1}^2 x^2 + 3 dx$$

$$12$$

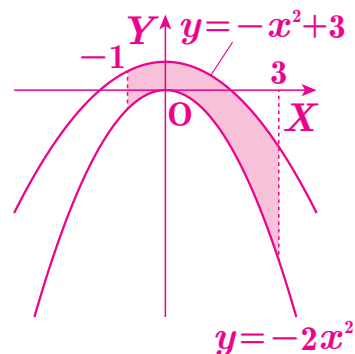
(2) เส้นโค้ง 2 เส้น $y = -2x^2$ และ $y = -x^2 + 3$ และเส้นตรง 2 เส้น $x = -1$ และ $x = 3$

โดยกำหนดให้ $-1 \leq x \leq 3$

$$\text{จาก } -2x^2 - (-x^2 + 3) = -x^2 - 3 < 0$$

$$\text{เราจะได้ } -2x^2 < -x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 \{-x^2 + 3 - (-2x^2)\} dx = \int_{-1}^3 (x^2 + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 3x \right]_{-1}^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 - \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) \right\} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$



$$\frac{64}{3}$$

⊞ OK ∇ OK

ⓧ $\frac{\square}{\square}$ + 3 ∇ - 1 ^ 3 EXE

$$\int_{-1}^3 x^2 + 3 dx = \frac{64}{3}$$

(3) เส้นโค้ง 2 เส้น $y = 2x^2$ และ $y = x^2 + 1$

พิกัด x ของจุดตัดของเส้นโค้ง 2 เส้นคือ

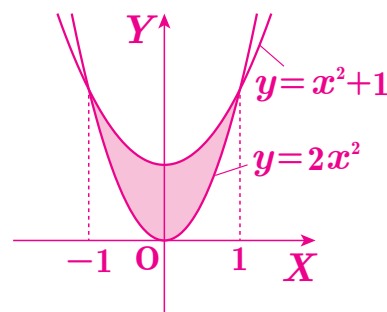
$$2x^2 = x^2 + 1, x^2 = 1, x = \pm 1$$

โดยกำหนดให้ $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{จาก } 2x^2 - (x^2 + 1) = x^2 - 1 \leq 0$$

$$\text{เราจะได้ } 2x^2 \leq x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (x^2 + 1 - 2x^2) dx = \int_{-1}^1 -(x^2 - 1) dx \\ &= - \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_{-1}^1 = - \left[\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1 - \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1) \right\} \right] \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$



$$\frac{4}{3}$$

⊞ OK ∇ OK

- (ⓧ $\frac{\square}{\square}$ - 1) ∇ - 1 ^ 1 EXE

$$\int_{-1}^1 -(x^2 - 1) dx = \frac{4}{3}$$

ปริพันธ์จำกัดเขตและพื้นที่ของรูปทรง (4)

TARGET

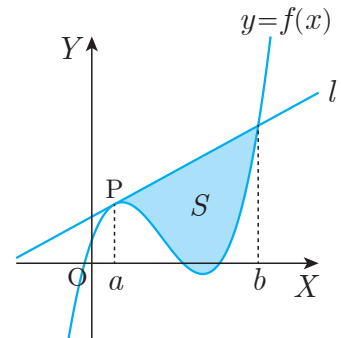
การทำความเข้าใจพื้นที่ใต้กราฟที่ปิดล้อมโดยเส้นโค้งและเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง

STUDY GUIDE

พื้นที่ใต้กราฟที่ปิดล้อมโดยเส้นโค้งและเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง

พื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันกำลังสาม $y=f(x)$ และเส้นสัมผัสกับจุด P บนเส้นโค้ง นั้นสามารถหาได้โดยใช้วิธีการต่อไปนี้

- (1) หาสมการของเส้นสัมผัส l ที่สัมผัสกับจุด P บนเส้นโค้ง $y=f(x)$
- (2) หาพิกัด x ของจุดตัดของเส้นสัมผัส l และเส้นโค้ง $y=f(x)$
- (3) หาพื้นที่ใต้กราฟโดยใช้ปริพันธ์จำกัดเขต



EXTRA Info.

สมการของเส้นสัมผัสกับจุด $(a, f(a))$ บนกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$
 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

EXERCISE



◆ แก่โจทย์เกี่ยวกับเส้นโค้ง $y = x^3$ ต่อไปนี้

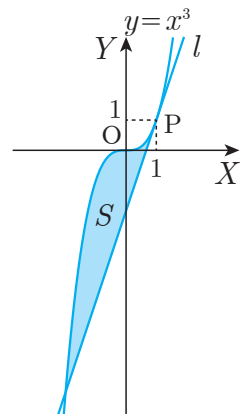
- (1) หาสมการสำหรับเส้นสัมผัส l ที่สัมผัสกับจุด P (1, 1) บนเส้นโค้ง $y = x^3$

จาก $y = x^3$ และเนื่องจาก $y' = 3x^2$ โดยการแทนที่ $x=1$ เราจะได้ $y' = 3 \cdot 1^2 = 3$
 สมการของเส้นสัมผัส l คือ $y - 1 = 3(x - 1), y = 3x - 2$

$$y = 3x - 2$$

⊕ OK OK ⊗ 3 > > ① EXE

$$\frac{d}{dx}(x^3) \Big|_{x=1}$$



- (2) หาพิกัด x ของอินเตอร์เซกชันของเส้นสัมผัส l และเส้นโค้ง $y = x^3$

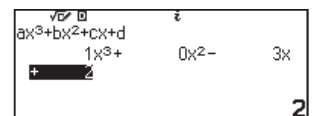
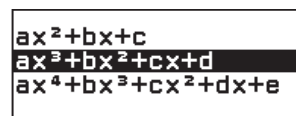
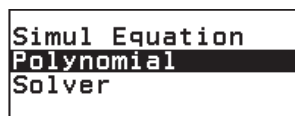
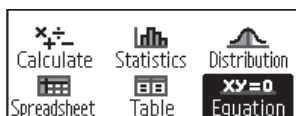
$$x^3 = 3x - 2, x^3 - 3x + 2 = 0, (x - 1)^2(x + 2) = 0, x = -2, 1$$

$$x = -2, 1$$

check

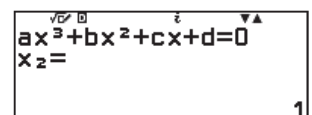
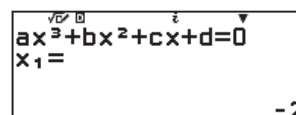
กด ⊕ เลือก [Equation (สมการ)] กด OK เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด OK เลือก [$ax^3 + bx^2 + cx + d$] กด OK

① EXE 0 EXE - ③ EXE ② EXE



พิจารณาคำตอบ $x=-2$ และ 1
 สำหรับสมการกำลังสาม

▶ EXE EXE



(3) หาพื้นที่ใต้กราฟ S ที่ปิดล้อมโดยเส้นสัมผัส l และเส้นโค้ง $y = x^3$

โดยกำหนดให้ $-2 \leq x \leq 1$ เราจะได้ $x^3 \geq 3x - 2$

$$S = \int_{-2}^1 \{x^3 - (3x - 2)\} dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - \left\{ \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \right\} = \frac{27}{4}$$

27
4

check

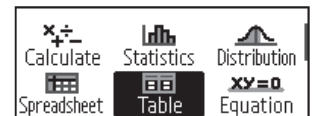
⏏ OK ✓ OK (x) $\frac{\square}{\square}$ 3 > - 3 (x) + 2 ✓ - 2 ^ 1 EXE

$$\int_{-2}^1 x^3 - 3x + 2 dx$$

27
4

การตรวจสอบกราฟ

กด ⏏ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด ⏏



กด ⏏ เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด OK เลือก

[Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^3$ กด EXE

$$f(x) = x^3$$

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 3x - 2$

$$g(x) = 3x - 2$$

กด ⏏ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจาก

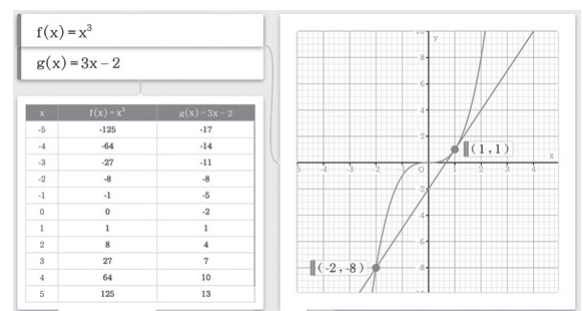
ป้อน [Start (เริ่มต้น):-5, End (สิ้นสุด):5, Step (ขั้น):1] แล้ว

ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

Table Range
Start:-5
End:5
Step:1

กด ⏏ (x) สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

x	f(x)	g(x)
-5	-125	-17
-4	-64	-14
-3	-27	-11
-2	-8	-8
-1	-1	-5
0	0	-2
1	1	1
2	8	4
3	27	7
4	64	10
5	125	13



PRACTICE

◆ แก้อิทธิพลเกี่ยวกับเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$ ต่อไปนี้

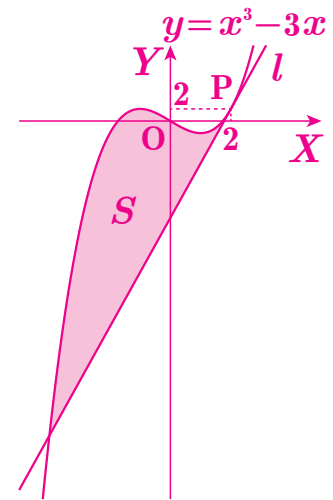
(1) หาสมการสำหรับเส้นสัมผัส l ที่จุด $P(2, 2)$ กับเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$

จาก $y = x^3 - 3x$ และเนื่องจาก $y' = 3x^2 - 3$ โดยการ
แทนที่ $x=2$ เราจะได้ $y' = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$

สมการของเส้นสัมผัส l คือ $y - 2 = 9(x - 2), y = 9x - 16$
 $y = 9x - 16$

$\frac{d}{dx}(x^3 - 3x) \Big|_{x=2}$

9



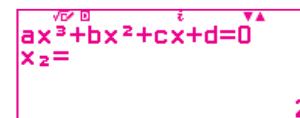
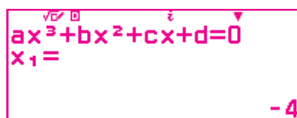
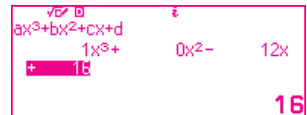
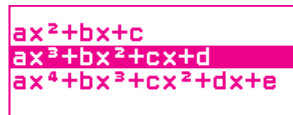
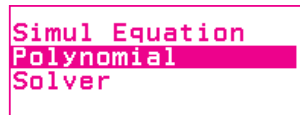
(2) หาพิกัด x ของจุดตัดของเส้นสัมผัส l และเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$

$$x^3 - 3x = 9x - 16, x^3 - 12x + 16 = 0, (x - 2)^2(x + 4) = 0, x = 2, -4$$

$$x = 2, -4$$

check

กด เลือก [Equation (สมการ)] กด เลือก [Polynomial (พหุนาม)] กด เลือก
[$ax^3 + bx^2 + cx + d$] กด



(3) หาพื้นที่ S ที่ปิดล้อมโดยเส้นสัมผัส l และเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$

โดยกำหนดให้ $-4 \leq x \leq 2$ เราจะได้ $x^3 - 3x \geq 9x - 16$

$$S = \int_{-4}^2 \{x^3 - 3x - (9x - 16)\} dx = \int_{-4}^2 (x^3 - 12x + 16) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - 6x^2 + 16x \right]_{-4}^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - \left\{ \frac{1}{4} \cdot (-4)^4 - 6 \cdot (-4)^2 + 16 \cdot (-4) \right\} = 108$$

108

check

☰ OK ∇ OK (x) □ 3 > - 1 2 (x) + 1 6 ∇ - 4 ^ 2 EXE

$$\int_{-4}^2 x^3 - 12x + 16 dx$$

108

การตรวจสอบกราฟ

กด ☰ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK จากนั้นจึงล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด ○

กด ○ เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))]

กด OK เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = x^3 - 3x$ กด EXE

และด้วยวิธีเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 9x - 16$

กด ○ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจาก

ป้อน [Start (เริ่มต้น): -5, End (สิ้นสุด): 5, Step (ขั้น): 1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] แล้วกด EXE

กด ↑ (x) สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ

Calculate Statistics Distribution
Spreadsheet Table Equation

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$g(x) = 9x - 16$$

Table Range
Start: -5
End: 5
Step: 1

x	f(x)	g(x)
-5	-110	-61
-4	-52	-52
-3	-18	-43
-2	-2	-34
-1	2	-25
0	0	-16
1	-2	-7
2	2	2
3	18	11
4	52	20
5	110	29

