

ลำดับ

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแสดงลำดับและพจน์ทั่วไปของลำดับ

STUDY GUIDE

พจน์ทั่วไปของลำดับ

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกเรียกว่าลำดับ และสมาชิกแต่ละตัวเรียกว่าพจน์

ลำดับที่มีจำนวนพจน์จำกัดเรียกว่าลำดับจำกัด และลำดับที่มีจำนวนพจน์อนันต์เรียกว่าลำดับอนันต์

เรากล่าวได้ว่าลำดับจำกัดนั้นมีจำนวนพจน์ มีพจน์แรกและพจน์สุดท้าย

โดยทั่วไปแล้วลำดับจะแสดงได้ดังนี้

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

นอกจากนี้ ลำดับที่ด้านบนยังสามารถแสดงในรูป a_n ได้ด้วย

เมื่อพจน์ที่ n ในลำดับ a_n แสดงในนิพจน์เป็น n เราจึงกล่าวได้ว่าพจน์ดังกล่าวเป็นพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n

Ex. โดยกำหนดให้ลำดับ a_n ของ 2, 4, 6, 8 และ 10 มี 5 พจน์: $a_1=2$ (พจน์แรก), $a_2=4$, $a_3=6$, $a_4=8$, $a_5=10$ (พจน์สุดท้าย)

จาก $a_1=2 \cdot 1$, $a_2=2 \cdot 2$, $a_3=2 \cdot 3$, $a_4=2 \cdot 4$ และ $a_5=2 \cdot 5$ เราสามารถอนุมานได้ว่าพจน์ทั่วไปคือ $a_n=2n$

EXERCISE



- 1 หาพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของลำดับ a_n ซึ่งมีพจน์ทั่วไปแสดงด้วยนิพจน์ต่อไปนี้

(1) $a_n = 3n + 2$

เมื่อพจน์แรกคือ $n=1$ เราจะได้ $a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

เมื่อพจน์ที่ 2 คือ $n=2$ เราจะได้ $a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

เมื่อพจน์ที่ 3 คือ $n=3$ เราจะได้ $a_3 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

เมื่อพจน์ที่ 4 คือ $n=4$ เราจะได้ $a_4 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$

$$a_1 = 5, a_2 = 8, a_3 = 11, a_4 = 14$$

check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันตารางเพื่อยืนยันแต่ละพจน์ของลำดับ

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด $\odot$

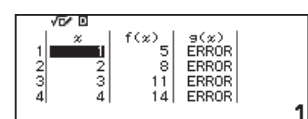
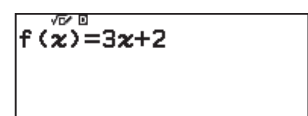
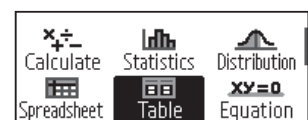
เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด $\odot$

หลังจากป้อน $f(x)=3x+2$ แล้ว ให้กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$



(2) $a_n = n^2 - 4n$

เมื่อพจน์แรกคือ $n=1$ เราจะได้ $a_1=1^2-4\cdot1=-3$

เมื่อพจน์ที่ 2 คือ $n=2$ เราจะได้ $a_2=2^2-4\cdot2=-4$

เมื่อพจน์ที่ 3 คือ $n=3$ เราจะได้ $a_3=3^2-4\cdot3=-3$

เมื่อพจน์ที่ 4 คือ $n=4$ เราจะได้ $a_4=4^2-4\cdot4=0$

$$a_1 = -3, a_2 = -4, a_3 = -3, a_4 = 0$$

check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK

เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x)=x^2-4x$ แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

$$f(x) = x^2 - 4x$$

Table Range
Start: 1
End: 4
Step: 1

x	f(x)	g(x)
1	-3	ERROR
2	-4	ERROR
3	-3	ERROR
4	0	ERROR

2 อนุมาณพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n ด้านล่าง

(1) $-5, -10, -15, -20, \dots$

$$a_1 = -5 \cdot 1, a_2 = -5 \cdot 2, a_3 = -5 \cdot 3, a_4 = -5 \cdot 4, \dots$$

ดังนั้น เราจึงสามารถอนุมานให้พจน์ทั่วไปเป็น $a_n = -5n$ ได้

$$a_n = -5n$$

check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันสถิติเพื่อยืนยันพจน์

ทั่วไปของลำดับ

กด $\odot$ เลือก [Statistics (สถิติ)] กด OK เลือก [2-Variable (ตัวแปร 2 ตัว)] กด OK

กด $\odot$ เลือก [Edit (แก้ไข)] กด OK เลือก [Delete All (ลบทั้งหมด)] กด OK

ป้อน 1, 2, 3 และ 4 ในคอลัมน์ x และ $-5, -10, -15$ และ -20 ใน

คอลัมน์ y ตามลำดับ

① EXE ② EXE ③ EXE ④ EXE $\checkmark$ $\odot$ $\ominus$ ⑤ EXE $\ominus$ ① ⑥ EXE $\ominus$ ① ⑦ EXE $\ominus$ ② ⑧ EXE EXE

x	y
1	-5
2	-10
3	-15
4	-20

เลือก [Reg Results (ผลลัพธ์การถดถอย)] กด OK

เลือก [$y=a+bx$] กด OK

เราสามารถยืนยันได้ว่า $y=-5x$

$$y=a+bx$$

$$y=a+bx+cx^2$$

$$y=a+b \cdot \ln(x)$$

$$y=a \cdot e^{(bx)}$$

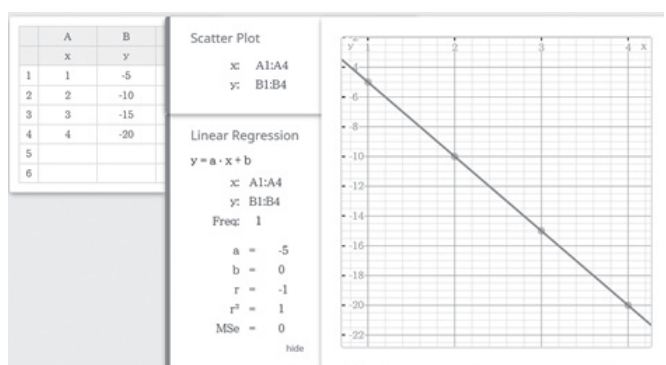
$$y=a+bx$$

$$a=0$$

$$b=-5$$

$$r=-1$$

กด $\odot$ $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



(2) 1, 4, 9, 16, ...

$$a_1=1^2, a_2=2^2, a_3=3^2, a_4=4^2, \dots$$

ดังนั้น เราจึงสามารถอนุมานให้พจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n^2$ ได้

$$\underline{a_n = n^2}$$

check

กด $\odot$ เลือก [Statistics (สถิติ)] กด OK เลือก [2-Variable (ตัวแปร 2 ตัว)] กด OK

กด $\odot$ เลือก [Edit (แก้ไข)] กด OK เลือก [Delete All (ลบทั้งหมด)] กด OK

ป้อน 1, 2, 3 และ 4 ในคอลัมน์ x และ 1, 4, 9 และ 16 ในคอลัมน์ y ตามลำดับ

① EXE ② EXE ③ EXE ④ EXE $\vee$ EXE ① EXE ④ EXE 9 EXE ① EXE 6 EXE EXE

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

เลือก [Reg Results (ผลลัพธ์การถดถอย)] กด OK

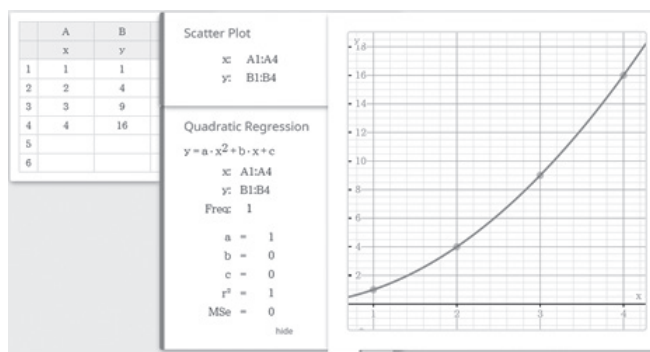
เลือก $y=a+bx+cx^2$ กด OK

เราสามารถยืนยันได้ว่า $y=x^2$

$y=a+bx$
 $y=a+bx+cx^2$
 $y=a+b \cdot \ln(x)$
 $y=a \cdot e^{(bx)}$

$y=a+bx+cx^2$
 $a=0$
 $b=0$
 $c=1$

กด $\odot$ $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

① หาพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของลำดับ a_n ซึ่งมีพจน์ทั่วไปแสดงด้วยนิพจน์ต่อไปนี้

(1) $a_n = 5n - 3$

(2) $a_n = (-1)^n n$

๒ อนุमानพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n ด้านล่าง

(1) 3, 5, 7, 9, ...

(2) 2, 4, 8, 16,

ลำดับเลขคณิต

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแสดงลำดับเลขคณิตและพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

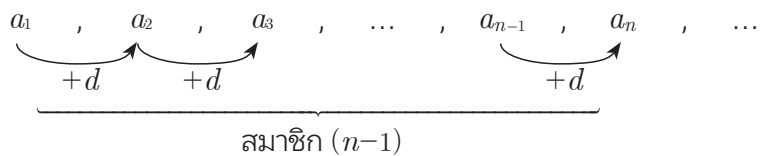
STUDY GUIDE

ลำดับเลขคณิต

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เรียกว่า **ลำดับเลขคณิต** และ เรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม** (d) เราสามารถแสดงพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต a_n ที่มีพจน์แรกเป็น a และผลต่างร่วมเป็น d ได้ในรูป **นิพจน์เชิงเส้นสำหรับ n** ดังต่อไปนี้

$$a_n = a + (n - 1)d$$



Ex. 2, 5, 8, 11, ..., a_n , ...

$$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3, a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3, a_4 - a_3 = 11 - 8 = 3, \dots$$

เนื่องจากผลต่างระหว่างพจน์ที่เรียงติดกันคือค่าคงตัว ลำดับ a_n จึงเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 2 และผลต่างร่วมเป็น 3

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

เมื่อ a , b และ c เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต สมบัติต่าง ๆ ต่อไปนี้จึงถูกต้อง และจะได้ว่า b คือ **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต**

$$2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

explanation

เนื่องจากผลต่างระหว่าง a และ b รวมถึง b และ c คือค่าคงตัว (ผลต่างร่วม) แล้วจาก $b - a = c - b$ เราจะได้

$$2b = a + c, b = \frac{a + c}{2}$$

EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับเลขคณิต 5, 9, 13, 17, ...

เนื่องจากแต่ละพจน์คือพจน์ก่อนหน้าบวกกับ 4 ผลต่างร่วมจึงเป็น 4

พจน์แรกคือ 5 ดังนั้นพจน์ทั่วไปก็คือ $a_n = 5 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 1$

$$\underline{a_n = 4n + 1}$$



check

กด $\odot$ เลือก [Statistics (สถิติ)] กด OK เลือก [2-Variable (ตัวแปร 2 ตัว)] กด OK

กด $\odot$ เลือก [Edit (แก้ไข)] กด OK เลือก [Delete All (ลบทั้งหมด)] กด OK

ป้อน 1, 2, 3 และ 4 ในคอลัมน์ x และ 5, 9, 13 และ 17 ในคอลัมน์ y ตามลำดับ

① EXE ② EXE ③ EXE ④ EXE $\checkmark$ $>$ ⑤ EXE ⑨ EXE ① ③ EXE ① ⑦ EXE EXE

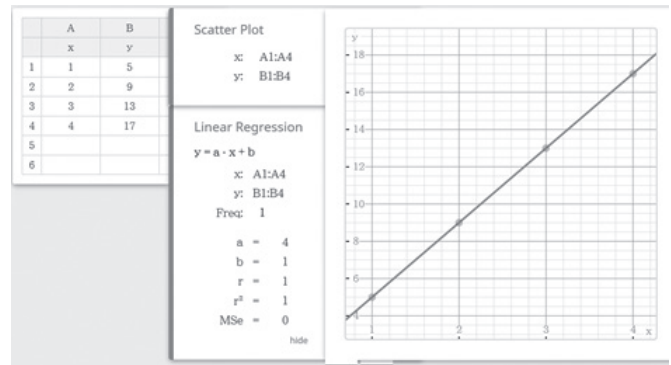
	x	y
1	1	5
2	2	9
3	3	13
4	4	17

เลือก [Reg Results (ผลลัพธ์การถดถอย)] กด OK เลือก [$y=a+bx$] กด OK

เราสามารถยืนยันได้ว่า $y=4x+1$

$y=a+bx$
$a=1$
$b=4$
$r=1$

กด $\odot$ $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

- (1) หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับเลขคณิต 23, 21, 19, 17, ... นอกจากนี้ จงหาว่าจำนวนลบที่ปรากฏจำนวนแรกคือพจน์ใด

(2) สำหรับลำดับเลขคณิต a_n จงหาพจน์แรกและผลต่างร่วมเมื่อ $a_4 = \frac{11}{5}$ และ $a_8 = \frac{21}{5}$ นอกจากนี้ จงหาพจน์ทั่วไป a_n ด้วย

(3) เมื่อ x , $2x+3$ และ 8 เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต จงหาค่าของ x

ผลรวมของลำดับเลขคณิต (1)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาผลรวมของลำดับเลขคณิต

STUDY GUIDE

ผลรวมของลำดับเลขคณิต

โดยกำหนดให้ผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต a_n ซึ่งมีพจน์แรกเป็น a ผลต่างร่วมเป็น d จำนวนพจน์ n และพจน์สุดท้ายเป็น l เราสามารถแสดง S_n ได้ ดังนี้

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}$$

explanation

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l \dots (i)$$

$$\text{โดยการเรียงพจน์ต่าง ๆ จากข้อ (i) แบบกลับด้าน เราจะได้ } S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \dots (ii)$$

จากการแก้สมการ (i)+(ii) เราจะได้

$$\begin{array}{rcll} S_n & = & a & + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l \\ +) & S_n & = & l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \\ \hline 2S_n & = & (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots + (a + l) + (a + l) + (a + l) \end{array}$$

$$\text{ดังนั้น จาก } 2S_n = n(a + l) \text{ เราสามารถหา } S_n = \frac{1}{2}n(a + l) \text{ ได้}$$

$$\text{โดยการแทนที่ } l = a + (n - 1)d \text{ ในสมการนี้ เราสามารถหา } S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\} \text{ ได้}$$

Ex. หาผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์สุดท้ายของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 3 ผลต่างร่วมเป็น 2 และมีพจน์ 15 พจน์คือ $S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \{2 \cdot 3 + (15 - 1) \cdot 2\} = 255$

EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต 7, 10, 13, 16, ...

ผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 7 และผลต่างร่วมเป็น 3 คือ

$$S_n = \frac{1}{2} n \{ 2 \cdot 7 + (n-1) \cdot 3 \} = \frac{1}{2} n (3n + 11) = \frac{3}{2} n^2 + \frac{11}{2} n$$

$$S_n = \frac{3}{2} n^2 + \frac{11}{2} n$$



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันสถิติเพื่อยืนยันผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต

กด $\odot$ เลือก [Statistics (สถิติ)] กด OK เลือก [2-Variable (ตัวแปร 2 ตัว)] กด OK

กด $\ominus$ เลือก [Edit (แก้ไข)] กด OK เลือก [Delete All (ลบทั้งหมด)] กด OK

ป้อน 1, 2 และ 3 ในคอลัมน์ x และป้อนผลรวมของลำดับเลขคณิต 7, 7+10 และ 17+13 ในคอลัมน์ y ตามลำดับ

① EXE ② EXE ③ EXE $\checkmark$ $>$

⑦ EXE ⑦ $+$ ① ① EXE ① ⑦ $+$ ① ③ EXE EXE

	x	y
1	1	7
2	2	17
3	3	30
4		0

	x	y
1	1	7
2	2	17
3	3	30
4		0

เลือก [Reg Results (ผลลัพธ์การถดถอย)] กด OK เลือก [$y=a+bx+cx^2$] กด OK

เราสามารถยืนยันได้ว่า $y = 1.5x^2 + 5.5x = \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$

$y=a+bx+cx^2$
$a=0$
$b=5.5$
$c=1.5$

(2) หาผลรวม S_{13} ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น -3 และพจน์สุดท้ายเป็น 69 และมีพจน์ 13 ตัว นอกจากนั้น จงหาผลต่างร่วมด้วย

ผลรวม S_{13} ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 13 ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น -3 และพจน์สุดท้ายเป็น 69 และมี

พจน์ 13 ตัวคือ $S_{13} = \frac{1}{2} \cdot 13(-3 + 69) = 429$

แทนที่ $a=-3$, $l=69$ และ $n=13$ ลงใน $l = a + (n-1)d$ เพื่อที่จะได้ $69 = -3 + (13-1)d$ สำหรับ $d=6$

$S_{13}=429$ ผลต่างร่วมเป็น 6

check

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

① EXE ② $>$ ③ $\times$ ① ③ $($ ③ $+$ ⑥ ⑨ $)$ EXE

$\frac{1}{2} \times 13 (-3 + 69)$
429

- (3) หาผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 6 ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 7 และผลต่างร่วมเป็น -3 นอกจากนี้จงหาผลรวมของพจน์ที่ 7 ถึงพจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิตด้วย
ผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 7 และผลต่างร่วมเป็น -3 คือ

$$S_n = \frac{1}{2} n \{2 \cdot 7 + (n-1) \cdot (-3)\} = \frac{1}{2} n(-3n+17)$$

ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 6 คือ $S_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (-3 \cdot 6 + 17) = -3$

ผลรวมของพจน์ที่ 7 ถึงพจน์ที่ 15 นั้นสามารถหาได้โดย

(ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 15) - (ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 6)

ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 15 คือ $S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (-3 \cdot 15 + 17) = -210$

ดังนั้น $S_{15} - S_6 = -210 + 3 = -207$

ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 6 คือ...-3
ผลรวมของพจน์ที่ 7 ถึงพจน์ที่ 15 คือ...-207

check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันฟังก์ชันในการบันทึกนิพจน์เพื่อหาผลคูณของลำดับเลขคณิตใน $f(x)$
กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

ป้อน $f(x) = \frac{1}{2} x(-3x+17)$

กด f(x) เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด OK

$\odot$ $\frac{1}{2}$ $\odot$ x $\odot$ $($ $\odot$ $-$ $\odot$ 3 $\odot$ x $\odot$ $+$ $\odot$ 1 $\odot$ 7 $\odot$ $)$ EXE

```
f(x)
g(x)
Define f(x)
Define g(x)
```

```
f(x)=1/2x(-3x+17)
```

คำนวณผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 6

กด f(x) เลือก $[f(x)]$ กด OK , $\odot$ 6 $\odot$ $)$ EXE

```
f(x)
g(x)
Define f(x)
Define g(x)
```

```
f(6)
-3
```

คำนวณผลรวมของพจน์ที่ 7 ถึงพจน์ที่ 15

f(x) OK $\odot$ 1 $\odot$ 5 $\odot$ $)$ $\odot$ $-$ f(x) OK $\odot$ 6 $\odot$ $)$ EXE

```
f(15)-f(6)
-207
```

PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต 4, 11, 18, 25, ...

(2) หาผลรวม S_{17} ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 35 และพจน์สุดท้ายเป็น 3 และมีพจน์ 17 พจน์ นอกจากนี้หาผลต่างร่วมด้วย

- (3) หาผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 7 ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 1 และผลต่างร่วมเป็น 4 นอกจากนี้ หาผลรวมของพจน์ที่ 8 ถึงพจน์ที่ 19 ของลำดับเลขคณิตด้วย

ผลรวมของลำดับเลขคณิต (2)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาผลรวมของลำดับของจำนวนธรรมชาติต่าง ๆ

STUDY GUIDE

ผลรวมของลำดับของจำนวนนับต่าง ๆ

ผลรวมของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n

เราสามารถหาผลรวมของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n ได้โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

explanation

เนื่องจากจำนวนนับ ซึ่งมี 1, 2, 3, ..., n เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 1 ผลต่างร่วมเป็น 1 และมีพจน์ n พจน์ที่มีพจน์สุดท้ายเป็น n เราสามารถหาผลรวมได้โดยใช้สูตรสำหรับผลรวมของลำดับเลขคณิตดังต่อไปนี้

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(1 + n) = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

ผลรวมของลำดับพหุคูณของ 2

เราสามารถหาผลรวมของลำดับพหุคูณของ 2 ได้โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

explanation

เนื่องจากลำดับพหุคูณของ 2 ซึ่งมี 2, 4, 6, ..., $2n$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 2 ผลต่างร่วมเป็น 2 และมีพจน์ n พจน์ที่มีพจน์สุดท้ายเป็น $2n$ เราสามารถหาผลรวมได้โดยใช้สูตรสำหรับผลรวมของลำดับเลขคณิตดังต่อไปนี้

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{1}{2} n(2 + 2n) = n(n + 1)$$

EXERCISE

◆ หาผลรวมของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 100

(1) ผลคูณของ 3

จากจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 100 พหุคูณของ 3 เรียงลำดับเป็น 3, 6, 9, 12, ..., 96, 99

โดยการเขียนส่วนนี้ใหม่เป็น $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, 3 \cdot 32, 3 \cdot 33$ ก็จะกลายเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 3 ผลต่างร่วมเป็น 3 พจน์สุดท้ายเป็น 99 และมีพจน์ 33 พจน์

ดังนั้น ผลรวมคือ $\frac{1}{2} \cdot 33 \cdot (3 + 99) = 1683$

1683

(2) จำนวนที่เหลือเศษ 1 เมื่อหารด้วย 3

จากจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 100 จำนวนที่เหลือเศษ 1 เมื่อหารด้วย 3 เรียงลำดับเป็น

$3 \cdot 0 + 1, 3 \cdot 1 + 1, 3 \cdot 2 + 1, \dots, 3 \cdot 33 + 1$

ลำดับนี้จะกลายเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 1 ผลต่างร่วมเป็น 3 และพจน์สุดท้ายเป็น 100 และมีจำนวนพจน์ n พจน์คือ $33 + 1 = 34$ แล้วจะได้ $n = 34$

ดังนั้น ผลรวมคือ $\frac{1}{2} \cdot 34 \cdot (1 + 100) = 1717$

1717

(3) จำนวนที่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

เนื่องจาก (ผลรวมของจำนวนที่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว)

$= (\text{ผลรวมของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 100}) - (\text{ผลรวมของพหุคูณของ 3 ตั้งแต่ 1 ถึง 100})$

$(\text{ผลรวมของจำนวนธรรมชาติตั้งแต่ 1 ถึง 100}) = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (1 + 100) = 5050$

จากข้อ (1) เราจึงทราบว่าผลรวมของพหุคูณของ 3 ตั้งแต่ 1 ถึง 100 คือ 1683

ดังนั้น เราจึงหาได้ว่าผลรวมคือ $5050 - 1683 = 3367$

3367



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ปุ่มเก็บค่าตัวแปร หลังจากบันทึกสูตรแล้ว ให้ป้อนค่าสำหรับ A (จำนวนพจน์), B (พจน์แรก) และ C (พจน์สุดท้าย) เพื่อหาค่า

กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

ป้อนสูตร $\frac{1}{2} A(B+C)$ สำหรับผลรวมของลำดับเลขคณิต

① $\frac{1}{2}$ ② $\odot$ ③ $\uparrow$ ④ $\odot$ ⑤ $\uparrow$ ⑥ $+$ ⑦ $\uparrow$ ⑧ $\odot$

$$\frac{1}{2} A(B+C)$$

(1) บนหน้าจอตัวแปร ให้ป้อน $[A=33, B=3, C=99]$ แล้วคำนวณ

$\odot$ ③ ③ EXE $\odot$ ③ EXE $\odot$ 9 9 EXE $\odot$ EXE

A=33	B=3
C=99	D=0
E=0	F=0
X=0	Y=0
Z=0	

$$\frac{1}{2} A(B+C)$$

1683

(2) ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $[A=34, B=1, C=100]$ แล้วคำนวณ

$\odot$ ③ ④ EXE $\odot$ 1 EXE $\odot$ 1 0 0 EXE $\odot$ EXE

A=34	B=1
C=100	D=0
E=0	F=0
X=0	Y=0
Z=0	

$$\frac{1}{2} A(B+C)$$

1717

(3) ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $[A=100, B=1, C=100]$ แล้วคำนวณ

$\odot$ ① ① 0 0 EXE $\odot$ 1 EXE $\odot$ 1 0 0 EXE $\odot$ EXE

A=100	B=1
C=100	D=0
E=0	F=0
X=0	Y=0
Z=0	

$$\frac{1}{2} A(B+C)$$

5050

PRACTICE

◆ หาผลรวมของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 200

(1) พหุคูณของ 4

(2) จำนวนที่เหลือเศษ 3 เมื่อหารด้วย 4

(3) จำนวนที่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว

ลำดับเรขาคณิต

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีแสดงลำดับเรขาคณิตและพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

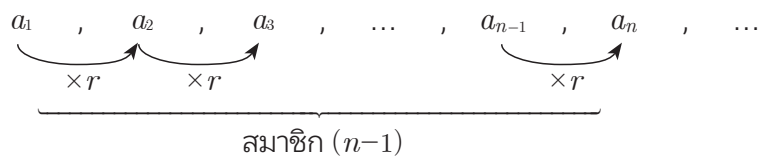
STUDY GUIDE

ลำดับเรขาคณิต

พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

พิจารณาลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะเรียกว่า **ลำดับเรขาคณิต** และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วน (r) นี้ว่า **อัตราส่วนร่วม** เราสามารถแสดงพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต a_n ที่มีพจน์ตัวแรกเป็น a และอัตราส่วนร่วมเป็น r ได้ดังต่อไปนี้

$$a_n = ar^{n-1}$$



Ex. 1, 3, 9, 27, ..., a_n , ...

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3, \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{3} = 3, \frac{a_4}{a_3} = \frac{27}{9} = 3, \dots$$

เนื่องจากอัตราส่วนระหว่างพจน์ที่เรียงติดกันคือค่าคงตัว ลำดับ a_n จึงเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 1 และอัตราส่วนร่วมเป็น 3

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

เมื่อ a , b และ c เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต สมบัติต่าง ๆ ต่อไปนี้จึงถูกต้อง และจะได้ว่า b คือ **ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต**

$$b^2 = ac \quad (\text{เมื่อ } a \neq 0, b \neq 0 \text{ และ } c \neq 0)$$

explanation

กำหนดให้อัตราส่วนร่วมเป็น r แล้วจาก $b = ar, c = ar^2$ เราจะได้ $b^2 = a^2r^2, ac = a^2r^2$ ดังนั้น $b^2 = ac$

EXERCISE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับเรขาคณิต 3, 6, 12, 24, ...

เนื่องจากแต่ละพจน์คือพจน์ก่อนหน้าคูณกับ 2 อัตราส่วนร่วมจึงเป็น 2

เนื่องจากพจน์แรกคือ 3 พจน์ทั่วไปจึงเป็น $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$$\underline{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}$$



check

กด $\odot$ เลือก [Statistics (สถิติ)] กด OK เลือก [2-Variable (ตัวแปร 2 ตัว)] กด OK

กด $\odot$ เลือก [Edit (แก้ไข)] กด OK เลือก [Delete All (ลบทั้งหมด)] กด OK

ป้อน 1, 2, 3 และ 4 ในคอลัมน์ x และ 3, 6, 12 และ 24 ในคอลัมน์ y ตามลำดับ

① EXE ② EXE ③ EXE ④ EXE $\vee$ > ③ EXE ⑥ EXE ① ② EXE ② ④ EXE EXE

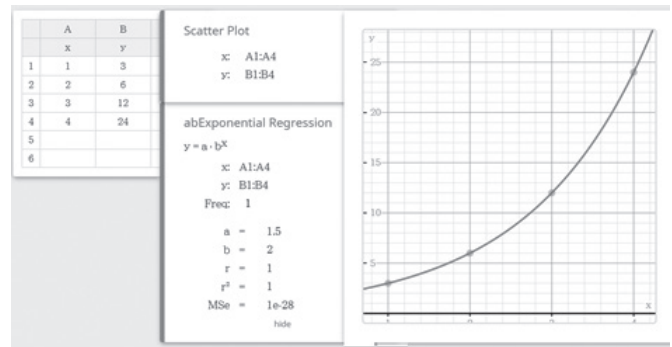
	x	y
1	1	3
2	2	6
3	3	12
4	4	24

เลือก [Reg Results (ผลลัพธ์การถดถอย)] กด OK เลือก [$y=a \cdot b^x$] กด OK

เราสามารถยืนยันได้ว่า $y = 1.5 \cdot 2^x = \frac{3}{2} \cdot 2^x = 3 \cdot 2^{x-1}$

$y=a \cdot b^x$
a=1.5
b=2
r=1

กด $\odot$ $\uparrow$ $\otimes$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงกราฟ



PRACTICE

◆ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับเรขาคณิต 16, 8, 4, 2, ...

(2) สำหรับลำดับเรขาคณิต a_n จงหาพจน์แรกและอัตราส่วนร่วมเมื่อ $a_3=20$ และ $a_6=160$ และหาพจน์ทั่วไป a_n

(3) เมื่อ 25, x และ 1 เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ x

ผลรวมของลำดับเรขาคณิต (1)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาผลรวมของลำดับเรขาคณิต

STUDY GUIDE

ผลรวมของลำดับเรขาคณิต

โดยกำหนดให้ S_n คือผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต a_n ที่มีพจน์แรกเป็น a และอัตราส่วนร่วมเป็น r แล้วเราจึงสามารถแสดง S_n ได้ดังต่อไปนี้

$$(i) \text{ เมื่อ } r \neq 1, S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$(ii) \text{ เมื่อ } r=1, S_n = na$$

explanation

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \dots (i)$$

$$\text{คูณทั้งสองด้านของข้อ (i) ด้วย } r \text{ เพื่อที่จะได้ } rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \dots (ii)$$

จากข้อ (i)-(ii) เราจะได้

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ -) \quad rS_n & = & ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n & = & a - ar^n \end{array}$$

$$\text{ดังนั้น จาก } (1-r)S_n = a(1-r^n) \text{ เมื่อ } r \neq 1 \text{ จะได้ } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{โดยการคูณตัวเศษและตัวส่วนที่ด้านขวามือของสูตรนี้ด้วย } -1 \text{ จะได้ } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$\text{ซึ่งเราสามารถใช้วิธีการนี้ได้ง่าย ๆ อย่างเหมาะสม ดังนั้นเมื่อ } r > 1 \text{ แล้ว } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ และเมื่อ } r < 1 \text{ แล้ว}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

นอกจากนี้ เมื่อ $r=1$ เรายังสามารถหา $S_n = a + a + a + \dots + a = na$ ได้

Ex. ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์สุดท้ายของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 3 อัตราส่วนร่วมเป็น 2 และมีพจน์ 6

$$\text{พจน์ คือ } S_6 = \frac{3(2^6-1)}{2-1} = 189$$

EXERCISE

① หาผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 5 และผลต่างร่วมเป็น -4

$$S_4 = \frac{5\{1-(-4)^4\}}{1-(-4)} = -255$$



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ปุ่มเก็บค่าตัวแปร หลังจากบันทึกสูตรแล้ว ให้ป้อนค่าสำหรับ A (พจน์แรก), B (อัตราส่วนร่วม) และ C (จำนวนพจน์) เพื่อหาค่า
กด $\odot$ เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด OK

ป้อนสูตร $\frac{A(1-B^C)}{1-B}$ สำหรับผลรวมของลำดับเรขาคณิต

$\uparrow$ 4 $\odot$ 1 $\ominus$ $\uparrow$ 5 MC $\uparrow$ 6 $>$ 1 MC 1 $\ominus$ $\uparrow$ 5

$$\frac{A(1-B^C)}{1-B}$$

บนหน้าจอตัวแปร ให้ป้อน [A=5, B=-4, C=4] แล้วคำนวณ

2ND 5 EXE $>$ $\ominus$ 4 EXE $>$ 4 EXE RCL EXE

A=5	B=-4
C=4	D=0
E=0	F=0
X=0	Y=0
Z=0	

$$\frac{A(1-B^C)}{1-B} = -255$$

② แก่โจทย์ต่อไปนี้จะเกี่ยวกับลำดับเรขาคณิต 4, 12, 36, 108, ...

(1) หาผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n

ผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 4 และอัตราส่วนร่วมเป็น 3 คือ

$$S_n = \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1} = 2(3^n - 1)$$

$$S_n = 2(3^n - 1)$$

(2) หาผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 8

ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 8 คือ $S_8 = 2(3^8 - 1) = 13120$

$$13120$$

(3) หาผลรวมของพจน์ที่ 6 ถึงพจน์ที่ 10

(ผลรวมของพจน์ที่ 6 ถึงพจน์ที่ 10) = (ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 10) - (ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 5) = $S_{10} - S_5$

ดังนั้น เราจึงสามารถหาผลรวมของ

$$S_{10} - S_5 = 2(3^{10} - 1) - 2(3^5 - 1) = 2 \cdot 3^{10} - 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 3^5 \cdot (3^5 - 1) = 2 \cdot 243 \cdot 242 = 117612$$

$$117612$$

check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ปุ่มเก็บค่าฟังก์ชัน ในการบันทึกนิพจน์เพื่อหาผลคูณของลำดับเรขาคณิตใน $f(x)$

$$\text{ป้อน } f(x) = \frac{4(3^x - 1)}{3 - 1}$$

f(x) V V OK 4 $\odot$ 3 MC X $>$ $\ominus$ 1 MC 3 $\ominus$ 1 EXE

$$f(x) = \frac{4(3^x - 1)}{3 - 1}$$

(2) คำนวณผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 8

f(x) OK 8 RCL EXE

$$f(8) = 13120$$

(3) คำนวณผลรวมของพจน์ที่ 6 ถึงพจน์ที่ 10

f(x) OK 1 0 RCL f(x) OK 5 RCL EXE

$$f(10) - f(5) = 117612$$

- ๓ หาค่าอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 2 และผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 3 เป็น 62

โดยให้ r เป็นอัตราส่วนร่วม

เมื่อ $r=1$ ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 3 คือ $3 \cdot 2 = 6$ ซึ่งไม่เหมาะสม

เมื่อ $r \neq 1$ ผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 3 คือ 62 ดังนั้น $\frac{2(1-r^3)}{1-r} = 62$

จะได้ว่า $\frac{2(1-r)(1+r+r^2)}{1-r} = 62, 2(1+r+r^2) = 62, r^2 + r - 30 = 0, (r-5)(r+6) = 0, r = 5, -6$

5, —6

check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันสมการเพื่อหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a=2$ และ $S_3=62$

กด เลือก [Equation (สมการ)] กด เลือก [Solver (การแก้สมการ)] กด

ป้อนสมการ $\frac{2(1-x^3)}{1-x} = 62$

② (① - x $\frac{\square}{\blacksquare}$ ③ >) $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ ① - x > $\uparrow$ (⑥ ② EXE

$$\frac{2(1-x^3)}{1-x} = 62$$

เพื่อหาคำตอบที่เป็นบวก ให้ป้อนค่าเริ่มต้นเป็น (*) $x=2$

② ③ ④

Enter Initial Value
 $x = 2$
Execute

$$\frac{2(1-x^3)}{1-x} = 62$$

เพื่อหาคำตอบที่เป็นลบ ให้ป้อนค่าเริ่มต้นเป็น $x=-2$

⏮ ⏪ 2 ⏩ ⏭

Enter Initial Value
 $x = -2$
Execute

$$\frac{2(1-x^3)}{1-x} = 62$$

*Initial value (ค่าเริ่มต้น): ค่าที่ป้อนเมื่อคุณเริ่มต้นคำนวณ ป้อนค่าที่ใกล้เคียงกับคำตอบของโจทย์

PRACTICE

① หาผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 6 ของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 3 และผลต่างร่วมเป็น 5

② แก้อายุต่อไปนี้เกี่ยวกับลำดับเรขาคณิต 7, 14, 28, 56, ...

(1) หาผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n

(2) หาผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 11

(3) หาผลรวมของพจน์ที่ 9 ถึงพจน์ที่ 16

3 หาค่าอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 4 และผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ 3 เป็น 28

ผลรวมของลำดับเรขาคณิต (2)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีการคำนวณดอกเบี้ยทบต้น

STUDY GUIDE

วิธีการคำนวณดอกเบี้ยทบต้น

ระบบการฝากเงินในธนาคารเพื่อรับดอกเบี้ยเพิ่มตามระยะเวลาที่กำหนด แล้วนำดอกเบี้ยดังกล่าวมาบวกกับเงินต้น เพื่อใช้ยอดรวมในการคำนวณดอกเบี้ยงวดต่อไป เรียกว่า **ดอกเบี้ยทบต้น**

Ex. เราฝากเงิน 10 ดอลลาร์ เมื่อต้นปีเพื่อรับดอกเบี้ยทบต้นทุกปีที่อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยกำหนดให้เราไม่สามารถถอนเงินได้ จงหายอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยหลังจาก 10 ปี

หลังจาก 1 ปี: (เงินต้น) $\times (1 + \text{เปอร์เซ็นต์ของดอกเบี้ย}) = 10(1 + 0.05)$ ดอลลาร์ ... เงินต้นหลังจาก 1 ปี

หลังจาก 2 ปี: $10(1 + 0.05) \times (1 + 0.05) = 10(1 + 0.05)^2$ ดอลลาร์

หลังจาก 3 ปี: $10(1 + 0.05)^2 \times (1 + 0.05) = 10(1 + 0.05)^3$ ดอลลาร์, ...

หลังจาก 10 ปี: $10(1 + 0.05)^{10}$ ดอลลาร์

ดังนั้น $10(1 + 0.05)^{10} \approx 16.29$ ดอลลาร์

$$10 \times 1.05^{10}$$

$$16.28894627$$

จากส่วนนี้ เราสามารถแสดงยอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยจากเงินต้น A (หน่วยสกุลเงิน) ที่ฝากไว้เป็นเวลา n ปีในอัตราดอกเบี้ยทบต้น $r(\%)$ ต่อปีได้ดังต่อไปนี้

$$A \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

EXERCISE



1 จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

- (1) หากคุณฝากเงิน 100 ดอลลาร์ในอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี ยอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยจะคิดเป็นจำนวนเงินกี่ดอลลาร์ หลังจากระยะเวลา 8 ปี (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

$A=100$, $r=10$ และ $n=8$ ดังนั้น $100 \left(1 + \frac{10}{100} \right)^8 = 100 \cdot 1.1^8 \approx 214.36$ ดอลลาร์

$$100 \times 1.1^8$$

$$214.358881$$

214.36 ดอลลาร์

- (2) หากคุณฝากเงิน 50 ดอลลาร์ที่อัตราดอกเบี้ยทบต้น 8% ต่อปี ยอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยจะมากกว่า 100 ดอลลาร์หลังจากฝากเงินไว้เป็นระยะเวลากี่ปี

ยอดรวมหลังจากระยะเวลา x ปีสำหรับเงินต้น 50 ดอลลาร์ในอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปีจะเป็น

$$50 \left(1 + \frac{8}{100} \right)^x \text{ ดอลลาร์}$$

หาจำนวนนับ x ที่มีค่าน้อยที่สุด ในสมการ $50 \left(1 + \frac{8}{100} \right)^x \geq 100$ ซึ่งจะมากกว่า 100 ดอลลาร์

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ให้ใช้ฟังก์ชัน ตารางเพื่อคำนวณยอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยหลังจากระยะเวลา x ปี
กด 2nd เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C

กด 2nd เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK

หลังจากป้อน $f(x) = 50 \times 1.08^x$ แล้ว ให้กด EXE

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = 100$

กด 2nd เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน

[Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):16, Step (ขั้น):1]

แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

จากตาราง เราสามารถยืนยันได้ว่าครั้งแรกที่ยอดรวมนั้น

จะมากกว่า 100 คือเมื่อ $x=10$

ดังนั้น คำตอบคือหลังจาก

ระยะเวลา 10 ปี

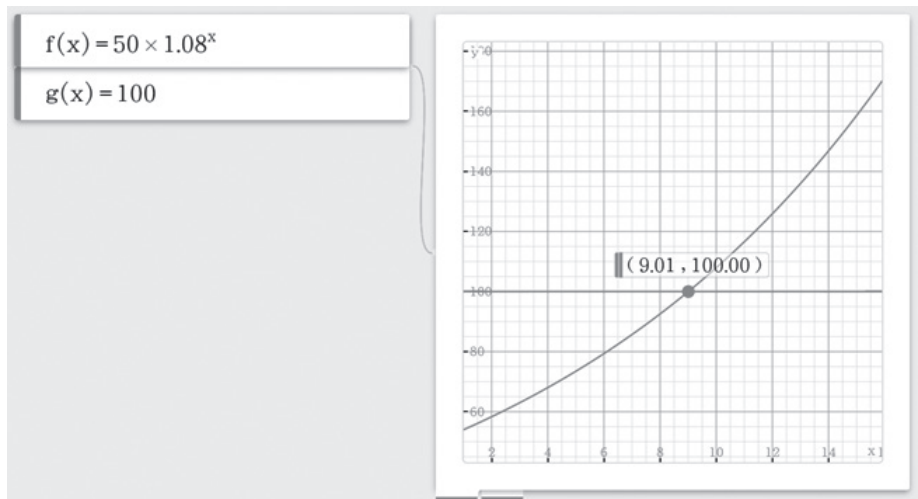
$$f(x) = 50 \times 1.08^x$$

$$g(x) = 100$$

Table Range
Start:1
End :16
Step :1

x	f(x)	g(x)
7	85.691	100
8	92.546	100
9	99.95	100
10	107.94	100

10



หลังจาก 10 ปี

PRACTICE

๑ จงแก้ไขทฤษฎีต่อไปนี้

- (1) หากคุณฝากเงิน 80 ดอลลาร์ในอัตราดอกเบี้ยทบต้น 7% ต่อปี ยอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยจะคิดเป็นจำนวนเงินกี่ดอลลาร์ หลังจากระยะเวลา 12 ปี (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

- (3) อัตราดอกเบี้ยต่ำสุดต่อปีคือเท่าใด โดยที่ผลรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยนั้นจะมากกว่า 160 ดอลลาร์หากฝากเงิน 70 ดอลลาร์เป็นระยะเวลา 9 ปีในอัตราดอกเบี้ยทบต้น (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

STUDY GUIDE

ยอดรวมเงินต้นและดอกเบี้ยของเงินฝากประจำ

ยอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยที่ได้รับเมื่อสิ้นสุดระยะเวลา n ปีจากการออมเงินจำนวน A ดอลลาร์ในช่วงต้นปีของแต่ละปีเข้าบัญชีดอกเบี้ยทบต้นที่ได้รับดอกเบี้ย $r\%$ ต่อปีนั้นสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$A \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right) \left\{ \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right\}}{\frac{r}{100}}$$

explanation

ยอดรวมหลังจาก 1 ปีจะเป็น $A \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ ดอลลาร์

ยอดรวมหลังจาก 2 ปีคือ $A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + A \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ ดอลลาร์

เนื่องจากยอดรวมเพิ่มขึ้นหลังจากระยะเวลา 1 ปีอีก $r\%$ จากการออมเงิน A ดอลลาร์

ยอดรวมหลังจาก 3 ปีคือ $A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 + A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + A \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ ดอลลาร์

เนื่องจากยอดรวมเพิ่มขึ้นหลังจากระยะเวลา 2 ปีอีก $r\%$ จากการออมเงิน A ดอลลาร์

⋮

ยอดรวมหลังจาก n ปีคือ $A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n + A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1} + \dots + A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + A \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ ดอลลาร์

เนื่องจากยอดรวมเพิ่มขึ้นหลังจากระยะเวลา $(n-1)$ อีก $r\%$ จากการออมเงิน A ดอลลาร์

ดังนั้น ยอดรวมเมื่อสิ้นสุดปีในระยะเวลา n ปีคือผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก

เป็น $A \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ และอัตราส่วนร่วมเป็น $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$

ดังนั้น จากสูตรสำหรับผลรวมของลำดับเรขาคณิต จะได้

$$\frac{A \left(1 + \frac{r}{100}\right) \left\{ \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right\}}{\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 1} = A \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right) \left\{ \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right\}}{\frac{r}{100}}.$$

EXERCISE

- ② ยอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยที่ได้รับ เมื่อสิ้นสุดระยะเวลา 10 ปีจากการออมเงิน 30 ดอลลาร์ ในช่วงต้นปีของแต่ละปีเข้าบัญชีดอกเบี้ยทบต้นที่ได้รับดอกเบี้ย 5% ต่อปีนั้นเป็นจำนวนเงินกี่ดอลลาร์ (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

โดยแทนค่า $A=30$, $r=5$ และ $n=10$ ในสูตร แล้ว

$$30 \cdot \frac{\left(1 + \frac{5}{100}\right) \left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} - 1 \right]}{\frac{5}{100}} \approx 396.20 \text{ ดอลลาร์}$$

$$30 \times \frac{1.05 \times (1.05^{10} - 1)}{0.05} = 396.2036149$$

396.20 ดอลลาร์

- ③ หากคุณต้องการฝากเงินในจำนวนที่เท่ากับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี ถ้าคุณต้องการให้มีเงินในบัญชีมากกว่า 5000 ดอลลาร์ เมื่อสิ้นสุดปีที่ 12 คุณต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยปีละเท่าใด

$$A \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{100}\right) \left[\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{12} - 1 \right]}{\frac{3}{100}}$$

$$\frac{1.03 \times (1.03^{12} - 1)}{0.03} = 14.61779045$$

$$\frac{5000}{\text{Ans}} = 342.0489586$$

เราจะมีเงินเพียงพอหากมีจำนวนมากกว่า 5000 ดอลลาร์ ดังนั้นคำตอบก็คือ $A \geq 342.04 \dots$

ดังนั้น เราควรออมเงินมากกว่า 343 ดอลลาร์ในแต่ละปี

343 ดอลลาร์ขึ้นไป

PRACTICE

- ② ยอดรวมของเงินต้นและดอกเบี้ยที่ได้รับเมื่อสิ้นสุดระยะเวลา 9 ปีจากการออมเงิน 50 ดอลลาร์ ในช่วงต้นปีของแต่ละปีเข้าบัญชีดอกเบี้ยทบต้นที่ได้รับดอกเบี้ย 6% ต่อปีนั้นเป็นจำนวนเงินกี่ดอลลาร์ (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

- ③ หากคุณต้องการฝากเงินในจำนวนที่เท่ากับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี ถ้าคุณต้องการให้มีเงินในบัญชีมากกว่า 8000 ดอลลาร์ เมื่อสิ้นสุดปีที่ 10 คุณต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยปีละเท่าใด (ตอบเป็นจำนวนเต็ม)

สัญลักษณ์แสดงการบวก Σ

TARGET

การทำความเข้าใจความหมายของสัญลักษณ์แสดงการบวก Σ สำหรับผลรวมของลำดับ

STUDY GUIDE

สัญลักษณ์แสดงการบวก Σ สำหรับผลรวมของลำดับ

สัญลักษณ์แสดงผลบวก Σ

เราใช้สัญลักษณ์ Σ (ซิกม่า) เพื่อแสดงผลรวมของลำดับ สำหรับลำดับ a_n เราสามารถแสดงผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ได้ตามที่แสดงด้านล่าง

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

สัญลักษณ์ $\sum_{k=1}^n a_k$ แสดงผลรวมของการบวกค่า a_n ทั้งหมด โดยที่ k นั้นจะแปลงเป็น 1, 2, 3, ..., n

Ex. (1) $\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

(2) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + (2n - 1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}$

ผลรวมของลำดับต่าง ๆ

ผลรวมของลำดับต่าง ๆ นั้นแสดงได้ทั้งหมดโดยใช้สัญลักษณ์ Σ ดังต่อไปนี้

(i) $\sum_{k=1}^n c = nc$ (c คือค่าคงตัว)

(ii) $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$

(iii) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

(iv) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(v) $\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1)$

explanation

(i) ผลรวมของลำดับ $a_n = c \sum_{k=1}^n c = c + c + c + \cdots + c = nc$

(ii) ผลรวมของลำดับ $a_n = n$ (ผลรวมของจำนวนนับ) $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

(iii) ผลรวมของลำดับ $a_n = n^2$ (ผลรวมของกำลังสองของจำนวนนับ)

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(iv) ผลรวมของลำดับ $a_n = n^3$ (ผลรวมของกำลังสามของจำนวนนับ)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

(v) ผลรวมของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น a และอัตราส่วนร่วมเป็น r ($r \neq 1$)

$$\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

Ex. (1) $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10+1) = 55$

(2) $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}n(n-1)$



proof

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชัน **สเปรดชีต** เพื่อหาสูตร (iii) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

จากข้อมูล (โดยละเว้นการหาอนุพันธ์เชิงทฤษฎี)

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3 และ A4:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด EXE เลื่อนไปที่ [B1]

หลังจากป้อน [B1:1²] แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด OK

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)=B1+A2²] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B2:B4] แล้ว ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด OK

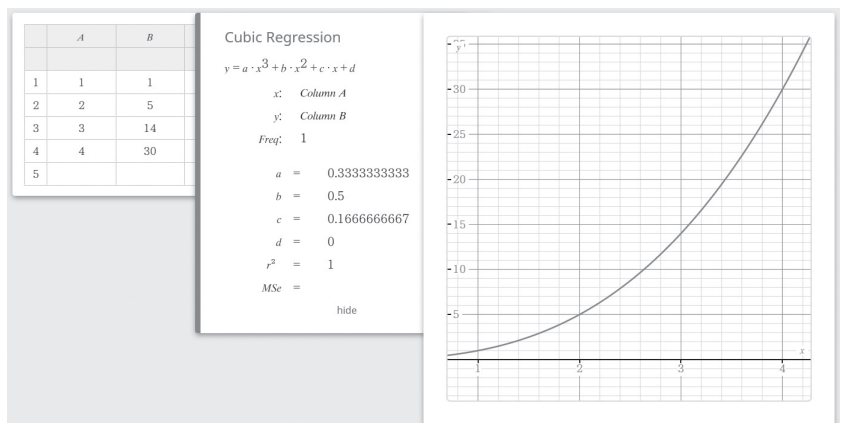
กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงข้อมูล

นอกจากนี้ คุณสามารถใช้ขั้นตอนต่อไปนี้เพื่อเปลี่ยนการตั้งค่าได้ที่ ClassPad.net

แตะแผ่นงานพิกัด แล้วแตะคอลัมน์ A และคอลัมน์ B แตะ [Statistics (สถิติ)] แตะ [Regression (การถดถอย)] แล้วแตะ [Cubic Regression (การถดถอยแบบกำลังสาม)]

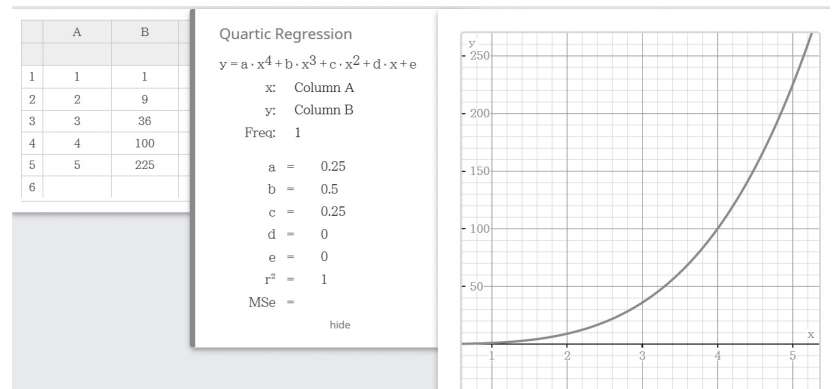
Fill Formula
Form =B1+A2²
Range :B2:B4
Confirm

	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	5		
3	3	14		
4	4	30		



สูตรที่แสดง $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$ นั้นได้มาจากความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (ความสัมพันธ์ซึ่งจำนวนหนึ่งเป็นฟังก์ชันของอีกจำนวนหนึ่ง) ของคอลัมน์ A และ B จากข้อมูล

ด้วยวิธีการเดียวกัน บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันสเปรดชีตเพื่อหาสูตร (iv) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$
 (เฉพาะผลลัพธ์จากการป้อนข้อมูลจนถึงแถวที่ 5 ในคอลัมน์ A และ B แล้วเลือก Quartic Regression (การถดถอยแบบกำลังสี่) มีคำอธิบายอยู่ที่ส่วนนี้)



$$\text{ดังนั้น } y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2 + 2x + 1) = \left\{ \frac{1}{2}x(x+1) \right\}^2$$

สมบัติของ Σ

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (c \text{ คือค่าคงตัว}) \end{aligned}$$

explanation

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ & = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \\ \text{(ii)} \quad & \text{ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยวิธีการเดียวกับข้อ (i)} \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{k=1}^n c a_k = (c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_n) = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

EXERCISE

◆ ใช้ Σ เพื่อแสดงผลรวมของลำดับต่อไปนี้และคำนวณผลรวมของลำดับดังกล่าว

(1) $3+8+13+18+ \dots +73$

นี่คือผลรวมของ $k=1$ ถึง $k=15$ โดยที่ $a_k = 5k - 2$

$$3 + 8 + 13 + 18 + \cdots + 73 = \sum_{k=1}^{15} (5k - 2) = 5 \sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{15} 2 = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (15 + 1) - 15 \cdot 2 = 570$$

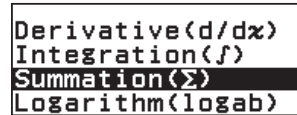
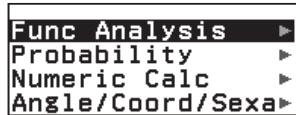
$$\sum_{k=1}^{15} (5k - 2), 570$$

check

ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์เพื่อคำนวณผลรวมของลำดับที่แสดงโดยเครื่องหมาย Σ

กด เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด

กด **⊕** เลือก [Func Analysis (การวิเคราะห์ฟังก์ชัน)] กด **OK** เลือก [Summation (ซัมเมชัน)(Σ)] กด **OK**



ในหน้าจอที่แสดง คุณสามารถหาผลรวมของลำดับได้โดยการป้อนพจน์ทั่วไป $5x-2$ และ $x=1$ และจำนวนพจน์ 15

$$\sum_{x=1}^{15} (5x-2)$$
 570

(2) $4+7+10+13+ \dots +(3n+1)$

นี่คือผลรวมของ $k=1$ ถึง $k=n$ โดยที่ $a_k = 3k + 1$

$$4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + (3n + 1) = \sum_{k=1}^n (3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) + n \cdot 1 = \frac{3n^2 + 5n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n (3k+1), \frac{3n^2+5n}{2}$$

check

ยืนยันว่าผลรวมจนถึงพจน์ที่ 4 นั้นสอดคล้องกัน

 3 $\times$ + 1 1 $\wedge$ 4 < < <
 - 3 $\times$ 4 + 5 $\times$ 4 2

$$\sum_{x=1}^4 (3x+1) - \frac{3 \times 4^2 + 5 \times 4}{2}$$

OTHER METHODS

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ปุ่มเก็บค่าตัวแปรเพื่อยืนยันว่าผลรวมจนถึงพจน์ A นั้นสอดคล้องกัน

$$\text{ป้อน } \sum_{x=1}^A (3x+1) - \frac{3A^2+5A}{2}$$

☐ OK √ √ OK ③ (X) + ① √ ① ^ ↑ ④ < < <
- ☐ ③ ↑ ④ ☐ + ⑤ ↑ ④ √ ②

$$\sum_{x=1}^A (3x+1) - \frac{3A^2+5A}{2}$$

ในหน้าจอตัวแปร ให้ป้อน [A=20] แล้วคำนวณ

☐ 20 EXE ☐ EXE

A=20 B=0
C=0 D=0
E=0 F=0
X=0 Y=0
Z=0

$$\sum_{x=1}^A (3x+1) - \frac{3A^2+5A}{2}$$

โดยกำหนดให้ A=20 คุณสามารถยืนยันได้ว่าผลรวมจนถึงพจน์ที่ 20 นั้นสอดคล้องกัน

นอกจากนี้ โดยการเปลี่ยนค่า A ที่ป้อนไว้ คุณสามารถยืนยันได้ว่าค่า A นั้นได้มาแบบไม่เจาะจง

(3) $1+3+9+27+\dots+729$

นี่คือผลรวมของ $k=1$ ถึง $k=7$ โดยที่ $a_k = 1 \cdot 3^{k-1}$

$$1+3+9+27+\dots+729 = \sum_{k=1}^7 1 \cdot 3^{k-1} = \frac{3^7-1}{3-1} = 1093$$

$$\sum_{k=1}^7 3^{k-1}, 1093$$

☐ OK √ √ OK ① (X) ③ ☐ (X) - ① √ ① ^ ⑦ EXE

$$\sum_{x=1}^7 (1 \times 3^{x-1})$$

(4) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)$

นี่คือผลรวมของ $k=1$ ถึง $k=n$ โดยที่ $a_k = k(k+1)$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1), \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

check

ยืนยันว่าผลรวมจนถึงพจน์ที่ 4 นั้นสอดคล้องกัน

☐ OK √ √ OK (X) ((X) + ①) √ ① ^ ④ < < <
- ☐ ④ (X) ⑤ (X) ⑥ √ ③ EXE

$$\sum_{x=1}^4 (x(x+1)) - \frac{4 \times 5 \times 6}{3}$$

PRACTICE

◆ ใช้ Σ เพื่อแสดงผลรวมของลำดับต่อไปนี้และคำนวณผลรวมของลำดับดังกล่าว

(1) $5+9+13+17+ \dots +81$

(2) $2+9+16+23+ \dots +(\text{พจน์ที่ } n)$

(3) $3+6+12+24+ \dots +768$

(4) $2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+ \dots +(\text{พจน์ที่ } n)$

ผลต่างของลำดับ

TARGET

การทำความเข้าใจผลต่างของลำดับ

STUDY GUIDE

ผลต่างของลำดับ

ผลต่างของลำดับ

เราสามารถหาพจน์เชิงสัมพัทธ์ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ได้จากลำดับระหว่าง a_n และ b_n ในกรณีนี้ เราจะเรียกว่า

ผลต่างของลำดับ ของลำดับ b_n และลำดับ a_n

Ex. $a_n : 1, 2, 4, 7, 11, \dots$

$b_n : 1, 2, 3, 4, \dots$

$a_5 = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 1 + (1 + 2 + 3 + 4) = 11$

ผลรวมและพจน์ทั่วไปของผลต่างของลำดับ

หากการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n นั้นเป็นเรื่องยาก เราสามารถตรวจสอบผลต่างของลำดับ a_n ได้โดยพิจารณาเป็นลำดับ b_n และ b_n อาจเป็นลำดับที่สามารถหาผลรวมได้ เช่น ลำดับเลขคณิตหรือลำดับเรขาคณิต ในกรณีนี้ โดยการหาผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ $(n-1)$ ของผลต่างของลำดับ b_n เราสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n ได้เมื่อ $n \geq 2$ และลำดับผลต่างของลำดับ a_n คือ b_n ความสัมพันธ์ต่อไปนี้จึงถูกต้อง

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$a_n : a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$

$b_n : b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$

สมาชิก $(n-1)$

explanation

วิธีการหาพจน์ทั่วไป a_n ของผลต่างของลำดับ

$$\begin{array}{rcl}
 a_2 - a_1 & = & b_1 \\
 a_3 - a_2 & = & b_2 \\
 a_4 - a_3 & = & b_3 \\
 \vdots & & \\
 +) \quad a_n - a_{n-1} & = & b_{n-1} \\
 \hline
 a_n - a_1 & = & b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1}
 \end{array}$$

จากส่วนนี้ จะได้ $a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$

EXERCISE

◆ หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับ a_n ด้านล่าง

(1) 1, 3, 6, 10, 15, ...

กำหนดให้ b_n แทนผลต่างของลำดับ จะได้ว่า b_n คือ 2, 3, 4, 5, ... ดังนั้น $b_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1$

กำหนดให้ $n \geq 2$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 1 + \frac{1}{2}(n-1)n + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

เมื่อ $n=1$ จะกลายเป็น $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ซึ่งสอดคล้องกับ $a_1=1$ นั่นคือจะถูกตัดเมื่อ $n=1$

$$\text{ดังนั้น } a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

OTHER METHODS

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 1 + (2+3+4+\dots+n) = 1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

นอกจากนี้ยังสามารถใช้วิธีการนี้ได้เช่นกัน

check

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3 และ A4:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [B1]

หลังจากป้อน [B1:1, B2:3, B3:6 และ B4:10] ตามลำดับแล้ว ให้กด $\odot$

	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	3		
3	3	6		
4	4	10		

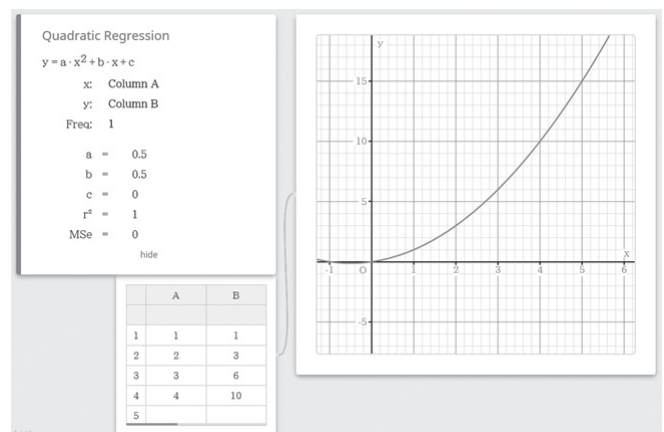
กด $\uparrow$ $\odot$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงข้อมูล

นอกจากนี้ คุณสามารถใช้ขั้นตอนต่อไปเพื่อเปลี่ยนการตั้งค่าได้ที่ ClassPad.net

แตะแผ่นงานฟังก์ชัน และแตะที่คอลัมน์ A และคอลัมน์ B แตะ [Statistics (สถิติ)] แตะ [Regression (การถดถอย)]

แล้วแตะ [Quadratic Regression (การถดถอยแบบกำลังสอง)]

เราสามารถยืนยันความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน $y = 0.5x^2 + 0.5x = \frac{1}{2}x(x+1)$ ของคอลัมน์ A และ B จากข้อมูลได้



(2) 2, 3, 5, 9, 17, ...

โดยกำหนดให้ผลต่างของลำดับ b_n แล้ว b_n คือ 1, 2, 4, 8, ... ดังนั้น $b_n = 1 \cdot 2^{n-1}$

โดยกำหนดให้ $n \geq 2$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \cdot 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1$$

เมื่อ $n=1$ จะกลายเป็น $2^0 + 1 = 2$ ซึ่งสอดคล้องกับ $a_1=2$ นั่นคือจะถูกต้องเมื่อ $n=1$

ดังนั้น $a_n = 2^{n-1} + 1$

$$\underline{a_n = 2^{n-1} + 1}$$

check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ฟังก์ชันตารางเพื่อยืนยันแต่ละพจน์ของลำดับ

กด 2nd เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด 2nd

กด MODE เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด OK

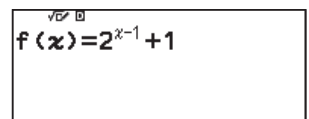
เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด OK

หลังจากป้อน $f(x)=2^{x-1} + 1$ แล้ว ให้กด EXE

กด MODE เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1] แล้ว

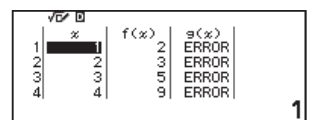
ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE



$f(x) = 2^{x-1} + 1$



Table Range
Start:1
End :4
Step :1



x	f(x)	g(x)
1	2	ERROR
2	3	ERROR
3	5	ERROR
4	9	ERROR

PRACTICE

◆ หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับ a_n ด้านล่าง

(1) 1, 5, 11, 19, 29, ...

(2) 1, 2, 5, 14, 41, ...

ผลรวมและพจน์ทั่วไปของลำดับ

TARGET

การทำความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ทั่วไปและผลรวมของลำดับ

STUDY GUIDE

ผลรวมและพจน์ทั่วไปของลำดับ

สำหรับลำดับบางลำดับ เราไม่ทราบพจน์ทั่วไป แต่เราสามารถหาผลรวมจนถึงพจน์ที่ n ได้ ในกรณีนี้ เราสามารถหาพจน์ทั่วไปจากผลต่างระหว่างผลรวมจนถึงพจน์ที่ n กับผลรวมจนถึงพจน์ที่ $(n-1)$ ได้

วิธีการหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่ทราบผลรวม

กำหนดให้ S_n คือผลรวมของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ของลำดับ a_n แล้วเมื่อ $n \geq 2$ เราสามารถหาผลต่างระหว่าง S_n และ S_{n-1} จาก $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ได้ ตามที่แสดงด้านล่าง

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ -) \quad S_{n-1} & = & a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \\ \hline S_n - S_{n-1} & = & a_n \end{array}$$

ซึ่งแสดงว่าพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n นั้นหาได้จากผลต่าง $S_n - S_{n-1}$ ระหว่างผลรวม S_{n-1} จนถึงพจน์ที่ n และผลรวม S_n จนถึงพจน์ที่ $(n-1)$

ในกรณีนี้ เมื่อ $n=1$ ด้านซ้ายของนิพจน์ด้านบนจะกลายเป็น $S_1 - S_0$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

จึงกล่าวได้ว่า $n \geq 2$ คือเงื่อนไขสำหรับการหานิพจน์ด้านบน เมื่อ $n=1$ แล้วเราจะได้ $S_1 = a_1$

จากด้านบน เราได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้อย่างแน่นอนระหว่างพจน์ทั่วไปและผลรวมของลำดับ

(i) เมื่อ $n=1$ แล้ว $a_1 = S_1$

(ii) เมื่อ $n \geq 2$ แล้ว $a_n = S_n - S_{n-1}$

EXERCISE

◆ หาพจน์ทั่วไป ของลำดับ a_n ที่มีผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ได้มาจากนิพจน์ต่อไปนี้

(1) $S_n = 3n^2 + 4n$

เมื่อ $n \geq 2$, $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 4n - \{3(n-1)^2 + 4(n-1)\} = 6n + 1 \dots(i)$

เมื่อ $n=1$ แล้ว $a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 7$ และโดยการแทนที่สมการนี้ในข้อ (i) สำหรับ $n=1$ ก็จะได้เท่ากับ $6 \cdot 1 + 1 = 7$

ดังนั้น (i) จึงถูกต้องเมื่อ $n=1$

ดังนั้น $a_n = 6n + 1$

$a_n = 6n + 1$



check

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3 และ A4:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [B1]

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) = $3A1^2 + 4A1$]

แล้ว ให้กด $\odot$

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B1:B4] แล้ว ให้กด $\odot$

เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [C1]

หลังจากป้อน [C1:7] แล้ว ให้กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) = $B2 - B1$] แล้ว ให้กด $\odot$

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C2:C4] แล้ว ให้กด $\odot$ เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

กด $\uparrow$ $\otimes$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงข้อมูล

นอกจากนี้ คุณสามารถใช้ขั้นตอนต่อไปเพื่อเปลี่ยนการตั้งค่าได้ที่ ClassPad.net

แตะแผ่นงานพิกัด และแตะคอลัมน์ A และคอลัมน์ C และ [Statistics (สถิติ)] และ [Regression (การถดถอย)]

แล้วแตะ [Linear Regression (การถดถอยเชิงเส้น)]

เราสามารถยืนยันความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน $y=6x+1$ ของคอลัมน์ A และ C จากข้อมูลได้

Fill Formula
Form = $3A1^2 + 4A1$
Range : B1:B4
 $\odot$ Confirm

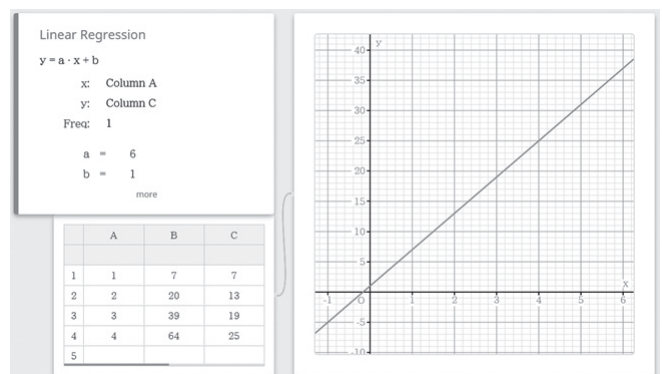
	A	B	C	D
1	1	7		
2	2	20		
3	3	39		
4	4	64		

= $3A1^2 + 4A1$

Fill Formula
Form = $B2 - B1$
Range : C2:C4
 $\odot$ Confirm

	A	B	C	D
1	1	7		
2	2	20	13	
3	3	39	19	
4	4	64	25	

= $B2 - B1$



(2) $S_n = 3^n - 1$

เมื่อ $n \geq 2$, $a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) = (3 - 1)3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \dots (i)$

เมื่อ $n=1$ แล้ว $a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$ และโดยการแทนที่สมการนี้ในข้อ (i) สำหรับ $n=1$ ก็จะเท่ากับ $2 \cdot 3^{1-1} = 2$

ดังนั้น (i) จึงถูกต้องเมื่อ $n=1$

ดังนั้น $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

check

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3 และ A4:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [B1]

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) $=3^{(A1)} - 1$] แล้ว ให้กด $\odot$

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B1:B4] แล้ว ให้กด $\odot$

เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [C1]

หลังจากป้อน [C1:2] แล้ว ให้กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) $=B2 - B1$] แล้ว ให้กด $\odot$

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C2:C4] แล้ว ให้กด $\odot$ เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

กด $\uparrow$ $\otimes$ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงข้อมูล

นอกจากนี้ คุณสามารถใช้ขั้นตอนต่อไปเพื่อเปลี่ยนการตั้งค่าได้ที่ ClassPad.net

แตะแผ่นงานฟังก์ชัน และแตะคอลัมน์ A และคอลัมน์ C และ [Statistics (สถิติ)] และ [Regression (การถดถอย)]

แล้วแตะ [abExponential Regression (การถดถอยแบบเลขชี้กำลัง ab)]

เราสามารถยืนยันความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน $y = \frac{2}{3} \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x-1}$ ของคอลัมน์ A และ C จากข้อมูลได้

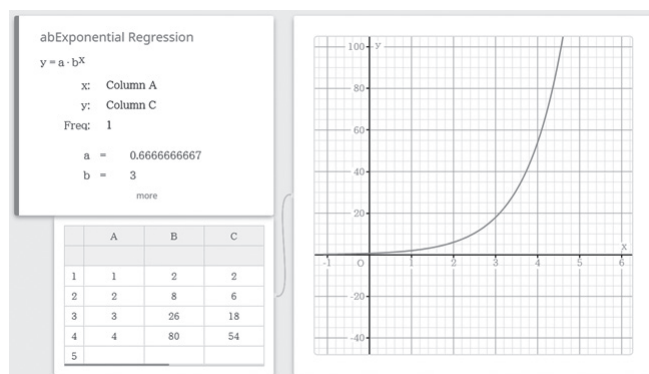
Fill Formula
Form $=3^{(A1)} - 1$
Range :B1:B4
 $\odot$ Confirm

	A	B	C	D
1	1	2		
2	2	8		
3	3	26		
4	4	80		

$=3^{(A1)} - 1$

	A	B	C	D
1	1	2		
2	2	8	6	
3	3	26	18	
4	4	80	54	

$=B2 - B1$



PRACTICE

◆ หาพจน์ทั่วไป ของลำดับ $\{a_n\}$ ที่มีผลรวม S_n ของพจน์แรกถึงพจน์ที่ n ได้มาจากนิพจน์ต่อไปนี้

(1) $S_n = 4n^2 - 5n$

(2) $S_n = n^3$

ผลรวมของลำดับต่าง ๆ (1)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาผลรวมของลำดับที่แสดงในรูปเศษส่วน

STUDY GUIDE

ผลรวมของลำดับที่แสดงในรูปเศษส่วน

เศษส่วนย่อย

ผลรวมของลำดับที่แต่ละพจน์แสดงในรูปเศษส่วนนั้น อาจหาได้โดยการแปลงแต่ละพจน์เป็นผลต่างของเศษส่วน โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$\frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right) \quad (\text{โดยที่ } a \neq b)$$

โปรดทราบว่า การแยกเศษส่วนย่อยคือการคำนวณผกผันในการลดให้เป็นตัวส่วนร่วม

Ex.
$$\frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{1}{4-3} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) = \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}$$

การทำให้ตัวส่วนเป็นจำนวนตรรกยะ

ผลรวมของลำดับที่มีเครื่องหมายรากในตัวส่วนของแต่ละพจน์ อาจทำให้ตัวส่วนเป็นจำนวนตรรกยะตามที่แสดงด้านล่าง

$$\frac{1}{\sqrt{k+c} + \sqrt{k+d}} = \frac{\sqrt{k+c} - \sqrt{k+d}}{c-d} \quad (\text{โดยที่ } c \neq d)$$

Ex.
$$\frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} = \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{2-1} = \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}$$

EXERCISE

◆ หาผลรวมของลำดับด้านล่าง

$$(1) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

พจน์ที่ k ในลำดับนี้สามารถแสดงเป็น $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

ดังนั้น เราจึงสามารถหาผลรวมของ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\frac{n}{n+1}$$



check

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ให้ใช้ปุ่มกำหนดค่าตัวแปรเพื่อยืนยันว่าผลรวมจนถึงพจน์ A นั้นสอดคล้องกัน

กด เลือก [Calculate (คำนวณ)] กด

ข้อ ๑๑. $\sum_{x=1}^A \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{A+1}$

 OK   OK ①  x (x + 1)  ① $\wedge$  4 < < <
 -  4   4 + ①

$$\sum_{x=1}^A \left(\frac{1}{x(x+1)} \right) - \frac{A}{A+1}$$

ในหน้าจอตัวแปร ให้ป้อน [A=50] แล้วคำนวณ

⌂ 5 0 EXE ⏪ EXE

A=50	B=0
C=0	D=0
E=0	F=0
x=0	y=0
z=0	

$$\sum_{x=1}^A \left(\frac{1}{x(x+1)} \right) - \frac{A}{A+1}$$

เราสามารถยืนยันได้ว่าค่านี้ถูกต้องเมื่อ $A=50$ (เราสามารถยืนยันค่าใด ๆ ได้โดยการเปลี่ยนค่า A ที่ป้อนไว้)

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

พจน์ที่ k ในลำดับนี้สามารถ

แสดงเป็น $\frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} = \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{2-1} = \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}$

ดังนั้น เราจึงสามารถหาผลรวมของ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{2}) + (\cancel{\sqrt{4}} - \cancel{\sqrt{3}}) + (\cancel{\sqrt{5}} - \cancel{\sqrt{4}}) + \dots + (\sqrt{n+2} - \cancel{\sqrt{n+1}}) \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{2}$$

OK OK 1 $x + 2$ $x + 1$ 1 4
 (4 2 - 2)

$$\sum_{x=1}^A \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \right) - (\sqrt{A+2} - \sqrt{A+1})$$

Ⓜ 8 0 EXE Ⓜ EXE

A=80	B=0
C=0	D=0
E=0	F=0
x=0	y=0
z=0	

$$\sum_{x=1}^A \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \right) - (\sqrt{A+2} - \sqrt{A+1})$$

เราสามารถยืนยันได้ว่าค่านี้ถูกต้องเมื่อ $A=80$ (เราสามารถยืนยันค่าใด ๆ ได้โดยการเปลี่ยนค่า A ที่ป้อนไว้)

PRACTICE

◆ หาผลรวมของลำดับด้านล่าง

$$(1) \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

ลำดับ: ผลรวมของลำดับต่าง ๆ

ผลรวมของลำดับต่าง ๆ (2)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาผลรวมของลำดับที่อยู่ในรูป (ลำดับเลขคณิต) × (ลำดับเรขาคณิต)

STUDY GUIDE

ผลรวมของลำดับที่อยู่ในรูป (ลำดับเลขคณิต) × (ลำดับเรขาคณิต)

พิจารณาวิธีการหา $S_n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1}$

ลำดับนี้จะคูณลำดับ 2 ลำดับต่อไปนี้เป็นรูปแบบของ (ลำดับเลขคณิต) × (ลำดับเรขาคณิต)

ลำดับเลขคณิต : 1 , 2 , 3 , 4 , ... , $n-1$, n ลำดับเรขาคณิต : 1 , 2 , 2^2 , 2^3 , ... , 2^{n-2} , 2^{n-1} ผลรวมของลำดับเหล่านี้สามารถหาได้โดยการคำนวณ $S_n - rS_n$ โดยที่ r คืออัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต

$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} \\
 -) \quad 2S_n &= \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (n-2) \cdot 2^{n-2} + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \\
 \hline
 -S_n &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} - n \cdot 2^n
 \end{aligned}$$

โดยใช้สูตรสำหรับผลรวมของลำดับเรขาคณิตกับสมการนี้ เราจะได้

$$-S_n = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}) - n \cdot 2^n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^n = (1 - n) \cdot 2^n - 1$$

ดังนั้น เราจึงสามารถหา $S_n = (n-1) \cdot 2^n + 1$ ได้

proof

บนเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ ให้ใช้ปุ่มกำหนดค่าตัวแปรเพื่อยืนยันว่าผลรวมจนถึงพจน์ A นั้นสอดคล้องกัน

MODE OK V V OK X X 2 MODE X $-$ 1 V 1 ^ ↑ 4 $<$ $<$ $<$ $<$

$-$ $($ $($ ↑ 4 $-$ 1 $)$ X 2 MODE ↑ 4 $>$ $+$ 1 $)$

$$\sum_{x=1}^A (x \times 2^{x-1}) - ((A-1) \times 2^A)$$

MODE 1 0 0 EXE

MODE

$A=100$ $B=0$
 $C=0$ $D=0$
 $E=0$ $F=0$
 $X=0$ $Y=0$
 $Z=0$

$$\sum_{x=1}^A (x \times 2^{x-1}) - ((A-1) \times 2^A)$$

เราสามารถยืนยันได้ว่าค่านี้ถูกต้องเมื่อ $A=100$ (เราสามารถยืนยันค่าใด ๆ ได้โดยการเปลี่ยนค่า A ที่ป้อนไว้)

OTHER METHODS

กด MODE เลือก [Table (ตาราง)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด C กด MODE เลือก [Define $f(x)/g(x)$ (กำหนดค่า $f(x)/g(x)$)] กด OK เลือก [Define $f(x)$ (กำหนดค่า $f(x)$)] กด OK หลังจากป้อน $f(x) = \sum_{x=1}^x (x \times 2^{x-1})$ แล้ว ให้กด EXE

$$f(x) = \sum_{x=1}^x (x \times 2^{x-1})$$

$$g(x) = (x-1) \times 2^x + 1$$

ด้วยวิธีการเดียวกัน ให้ป้อน $g(x) = (x-1) \times 2^x + 1$ กด MODE เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด OK หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):12, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด EXE

Table Range
 Start:1
 End:12
 Step:1

x	f(x)	g(x)
1	1	1
2	5	5
3	17	17
4	49	49

x	f(x)	g(x)
5	129	129
6	321	321
7	769	769
8	1793	1793

x	f(x)	g(x)
9	4097	4097
10	9217	9217
11	20481	20481
12	45057	45057

EXERCISE

◆ หา $S_n = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \dots + (2n-3) \cdot 3^{n-2} + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$

$$S_n = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \dots + (2n-3) \cdot 3^{n-2} + (2n-1) \cdot 3^{n-1} \dots (i)$$

$$3S_n = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \dots + (2n-5) \cdot 3^{n-2} + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n \dots (ii)$$

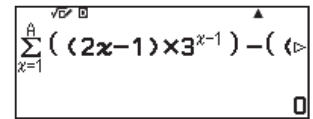
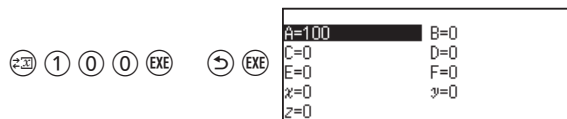
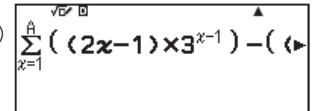
จากการแก้สมการ (i)-(ii) เราจะได้ $-2S_n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n-1) \cdot 3^n$

$$= 1 + 2(3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-2} + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - (2n-1) \cdot 3^n = -2\{(n-1) \cdot 3^n + 1\}$$

ดังนั้น $S_n = (n-1) \cdot 3^n + 1$

$$S_n = (n-1) \cdot 3^n + 1$$



เราสามารถยืนยันได้ว่าค่านี้ถูกต้องเมื่อ $A=100$ (เราสามารถยืนยันค่าใด ๆ ได้โดยการเปลี่ยนค่า A ที่ป้อนไว้)

PRACTICE

◆ หา $S_n = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 + \dots + (n-1) \cdot 5^{n-1} + n \cdot 5^n$

กลุ่มของลำดับ

TARGET

การทำความเข้าใจกลุ่มของลำดับ

STUDY GUIDE

กลุ่มของลำดับ

ลำดับที่แบ่งออกเป็นกลุ่มตามกฎบางประการนั้นจะเรียกว่า **กลุ่มของลำดับ**

Ex. $\underbrace{1}_{\text{กลุ่มที่ 1}} \mid \underbrace{2, 3}_{\text{กลุ่มที่ 2}} \mid \underbrace{4, 5, 6}_{\text{กลุ่มที่ 3}} \mid \dots$

กลุ่มของลำดับด้านบนสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

กลุ่ม	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2	กลุ่มที่ 3	...	กลุ่มที่ $(n-1)$	กลุ่มที่ n
ลำดับ	1	2, 3	4, 5, 6	...		(ii)
พจน์แรก	1	2	4	...		(i)
จำนวนสมาชิก	สมาชิก 1 ตัว	สมาชิก 2 ตัว	สมาชิก 3 ตัว	...	สมาชิก $(n-1)$	สมาชิก n ตัว

(i) จนถึงจำนวนสุดท้ายในกลุ่มที่ $(n-1)$ มีพจน์ $1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$ (พจน์)

จำนวนแรกในกลุ่มที่ n คือพจน์ที่ $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$

พจน์ที่ k ในลำดับนี้คือ $a_k=k$ ดังนั้น $a_{\frac{1}{2}n(n-1)+1}=\frac{1}{2}n(n-1)+1$

(ii) กลุ่มที่ n คือลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ ผลต่างร่วมเป็น 1 และมีพจน์ n พจน์ ดังนั้นจำนวนที่เรียงในกลุ่มที่ n คือ

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1, \frac{1}{2}n(n-1)+2, \frac{1}{2}n(n-1)+3, \dots, \frac{1}{2}n(n-1)+n$$

EXERCISE

- ◆ โดยกำหนดให้จำนวนนับเรียงตามลำดับจากน้อยไปมากและแบ่งให้กลุ่มที่ n มีสมาชิก n ตัว ในกรณีนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

1 | 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10 | ...

- (1) หาจำนวนแรกและจำนวนสุดท้ายในกลุ่มที่ 12

จากจำนวนแรกจนถึงจำนวนสุดท้ายในกลุ่มที่ 11 มีพจน์ $1 + 2 + 3 + \dots + 11 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (11 + 1) = 66$ พจน์

จำนวนแรกในกลุ่มที่ 12 คือ 67 เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ a_k ดังนั้นจึงเป็น $a_k = k$

เราจะได้ $a_{67}=67$

เนื่องจากจำนวนสุดท้ายของกลุ่มที่ 12 คือ $1 + 2 + 3 + \dots + 12 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (12 + 1) = 78$ พจน์

เราจะได้ $a_{78}=78$

จำนวนแรก...67 จำนวนสุดท้าย...78

- (2) หาจำนวนแรกในกลุ่มที่ n และผลรวมของจำนวนต่าง ๆ ในกลุ่มที่ n

จำนวนสุดท้ายในกลุ่มที่ $(n-1)$ คือ $1+2+3+ \dots +(n-1)=\frac{1}{2} n(n-1)$

ดังนั้น จำนวนแรกในกลุ่มที่ n คือ $\left\{ \frac{1}{2} n(n-1) + 1 \right\}$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ a_k ดังนั้นจึงเป็น $a_k = k$ เราจะได้ $a_{\frac{1}{2}n(n-1)+1} = \frac{1}{2} n(n-1) + 1$

จำนวนต่าง ๆ ที่เรียงในกลุ่มที่ n คือลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $\left\{ \frac{1}{2} n(n-1) + 1 \right\}$

ผลต่างร่วมเป็น 1 และมีพจน์ n พจน์ ดังนั้นผลรวมของจำนวนเหล่านั้นคือ

$$\frac{1}{2} \times (\text{จำนวนพจน์}) \times \{2 \times (\text{พจน์แรก}) + (n-1) \times (\text{ผลต่างร่วม})\} = \frac{1}{2} n \left[2 \left\{ \frac{1}{2} n(n-1) + 1 \right\} + (n-1) \cdot 1 \right] = \frac{1}{2} n(n^2 + 1)$$

$$\text{จำนวนแรก} \dots \frac{1}{2} n(n-1) + 1 \quad \text{ผลรวม} \dots \frac{1}{2} n(n^2 + 1)$$

PRACTICE

- ◆ โดยกำหนดให้จำนวนที่เป็นจำนวนคี่เรียงตามลำดับจากน้อยไปมากและแบ่งให้กลุ่มที่ n มีจำนวน $(2n-1)$ พจน์ ในกรณีนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

1 | 3, 5, 7 | 9, 11, 13, 15, 17 | 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 | ...

(1) หาจำนวนแรกและจำนวนสุดท้ายในกลุ่มที่ 15

(2) หาจำนวนแรกในกลุ่มที่ n และผลรวมของจำนวนต่าง ๆ ในกลุ่มที่ n

ความสัมพันธ์เวียนเกิด (1)

TARGET

การทำความเข้าใจความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต และผลต่างของลำดับ

STUDY GUIDE

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

กำหนดให้ $a_{n+1} = 2a_n + 1$ อยู่ระหว่างพจน์ a_n และ a_{n+1} ซึ่งเรียงติดกับ a_n กำหนดให้ $a_1=1$ จะได้ว่า

$$a_2=2a_1+1=2\cdot1+1=3, a_3=2a_2+1=2\cdot3+1=7,$$

$$a_4=2a_3+1=2\cdot7+1=15, \dots \text{สำหรับสมาชิกแต่ละตัวในลำดับ}$$

สมการที่แสดงการหาพจน์ต่อไปจากพจน์ก่อนหน้า ในลักษณะนี้จะเรียกว่า

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

โดยกำหนดให้พจน์แรกเป็น a_1 ผลต่างร่วมเป็น d หรืออัตราส่วนร่วมเป็น r เราสามารถแสดงพจน์ทั่วไปและความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตได้ดังต่อไปนี้

	ความสัมพันธ์เวียนเกิด	พจน์ทั่วไป
ลำดับเลขคณิต	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
ลำดับเรขาคณิต	$a_{n+1} = ra_n$	$a_n = a_1r^{n-1}$

วิธีการหาพจน์ทั่วไปของผลต่างของลำดับ

เมื่อระบุความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็น $a_{n+1} = a_n + f(n)$ (สูตรที่แสดง n) แล้วเราสามารถใชผลต่างของลำดับในขั้นตอนต่อไปเพื่อหาพจน์ทั่วไปได้

- (1) แปลงเป็น $a_{n+1} - a_n = f(n)$ และพิจารณา $f(n)$ เป็นผลต่างของลำดับ b_n ของลำดับ a_n
- (2) หา a_n จากสมการ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ($n \geq 2$) สำหรับการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n จากผลต่างของลำดับ b_n
- (3) ยืนยันว่าสูตรที่ได้จากข้อ (2) นั้นถูกต้องหรือไม่เมื่อ $n=1$ แล้วหาพจน์ทั่วไป

EXERCISE

① หาพจน์ที่ 2 ถึงพจน์ที่ 5 โดยกำหนดให้พจน์แรกและความสัมพันธ์เวียนเกิดมีรูปแบบดังต่อไปนี้

(1) $a_1=2, a_{n+1}=4a_n+5$

$$a_2=4a_1+5=4\cdot 2+5=13, a_3=4a_2+5=4\cdot 13+5=57, a_4=4a_3+5=4\cdot 57+5=233, a_5=4a_4+5=4\cdot 233+5=937$$

$$\underline{a_2=13, a_3=57, a_4=233, a_5=937}$$

(2) $a_1=5, a_{n+1}=2a_n-3$

$$a_2=2a_1-3=2\cdot 5-3=7, a_3=2a_2-3=2\cdot 7-3=11, a_4=2a_3-3=2\cdot 11-3=19, a_5=2a_4-3=2\cdot 19-3=35$$

$$\underline{a_2=7, a_3=11, a_4=19, a_5=35}$$

(3) $a_1=1, a_{n+1}=a_n^2+1$

$$a_2=a_1^2+1=1^2+1=2, a_3=a_2^2+1=2^2+1=5, a_4=a_3^2+1=5^2+1=26, a_5=a_4^2+1=26^2+1=677$$

$$\underline{a_2=2, a_3=5, a_4=26, a_5=677}$$



check

กด เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด

(1) หลังจากป้อน [A1:2] แล้ว ให้กด

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)]=4A1+5 แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):A2:A5] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด

	A	B	C	D
1				
2	2			
3				
4				

Fill Formula Form =4A1+5 Range :A2:A5 Confirm
--

	A	B	C	D
1	2			
2	13			
3	57			
4	233			

=4A1+5

(2) เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [B1]

หลังจากป้อน [B1:5] แล้ว ให้กด

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)]=2B1-3 แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B2:B5] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด

	A	B	C	D
1	2			
2	13			
3	57			
4	233			

Fill Formula Form =2B1-3 Range :B2:B5 Confirm
--

	A	B	C	D
1	2	5		
2	13	7		
3	57	11		
4	233	19		

=2B1-3

(3) เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [C1]

หลังจากป้อน [C1:1] แล้ว ให้กด

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)]=C1²+1 แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C2:C5] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด

	A	B	C	D
1	2	5		
2	13	7		
3	57	11		
4	233	19		

Fill Formula Form =C1 ² +1 Range :C2:C5 Confirm

	A	B	C	D
1	2	5	1	
2	13	7	2	
3	57	11	5	
4	233	19	26	

=C1²+1

๒ หาพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n โดยกำหนดให้พจน์แรกและความสัมพันธ์เวียนเกิดมีรูปแบบดังต่อไปนี้

(1) $a_1=7, a_{n+1}=a_n-3$

ลำดับ a_n คือลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 7 และผลต่างร่วมเป็น -3

ดังนั้น $a_n = 7 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 10$

$$a_n = -3n + 10$$

(2) $a_1=5, a_{n+1}=2a_n$

ลำดับ a_n คือลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 5 และอัตราส่วนร่วมเป็น 2

ดังนั้น $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

(3) $a_1=3, a_{n+1}=a_n+2n$

จาก $a_{n+1} - a_n = 2n$ แล้วสำหรับผลต่างของลำดับ b_n ของลำดับ a_n เราจะได้ $b_n = 2n$

โดยกำหนดให้ $n \geq 2$ แล้ว $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = n^2 - n + 3$

ซึ่งยังถูกต้องเมื่อ $n=1$ และ $1^2 - 1 + 3 = 3$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปคือ $a_n = n^2 - n + 3$

$$a_n = n^2 - n + 3$$

check

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\uparrow$

หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3 และ A4:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด EXE เลื่อนไปที่ [B1]

(1) หลังจากป้อน [B1:7] แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)=B1-3] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B2:B4] แล้ว ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

	A	B	C	D
1	1	7		
2	2			
3	3			
4	4			

Fill Formula
Form =B1-3
Range :B2:B4
Confirm

	A	B	C	D
1	1	7		
2	2	4		
3	3	1		
4	4	-2		

=B1-3

(2) เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [C1]

หลังจากป้อน [C1:5] แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)=2C1] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C2:C4] แล้ว ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

	A	B	C	D
1	1	7	5	
2	2	4		
3	3	1		
4	4	-2		

Fill Formula
Form =2C1
Range :C2:C4
Confirm

	A	B	C	D
1	1	7	5	
2	2	4	10	
3	3	1	20	
4	4	-2	40	

=2C1

(3) เมื่อแผ่นงานปรากฏขึ้น ให้เลื่อนไปที่ [D1]

หลังจากป้อน [D1:3] แล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)=D1+2A1] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):D2:D4] แล้ว ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

	A	B	C	D
1	1	7	5	3
2	2	4	10	
3	3	1	20	
4	4	-2	40	

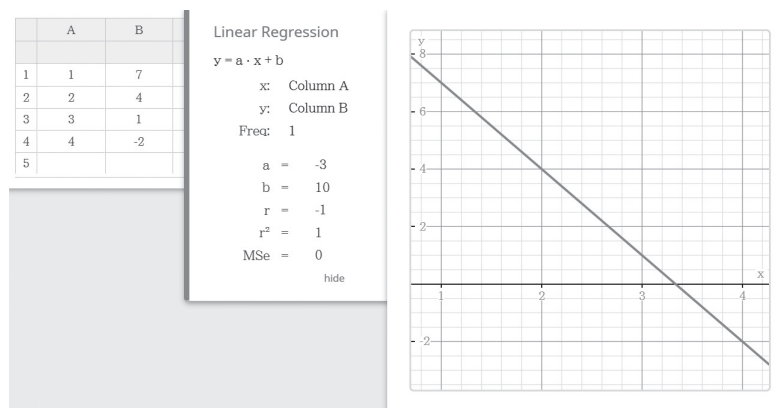
Fill Formula
Form =D1+2A1
Range :D2:D4
Confirm

	A	B	C	D
1	1	7	5	3
2	2	4	10	5
3	3	1	20	9
4	4	-2	40	15

=D1+2A1

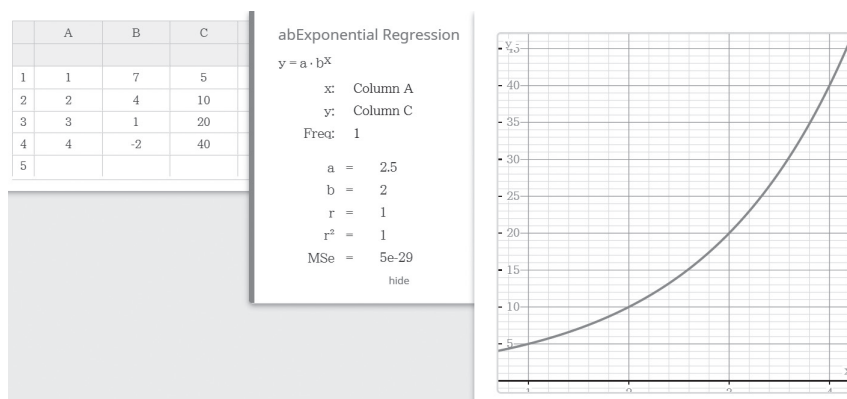
กด $\uparrow$ X สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงข้อมูล (มีต่อในหน้าถัดไป)

- (1) แตะคอลัมน์ A และคอลัมน์ B แตะ [Statistics (สถิติ)], [Regression (การถดถอย)] และ [Linear Regression (การถดถอยเชิงเส้น)] ตามลำดับนี้ เราสามารถยืนยันความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน $y = -3x + 10$ ของคอลัมน์ A และ B ได้

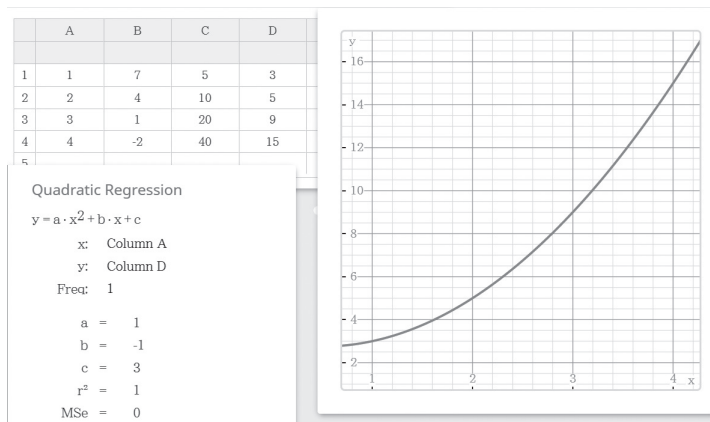


- (2) แตะคอลัมน์ A และคอลัมน์ C แตะ [Statistics (สถิติ)], [Regression (การถดถอย)] และ [abExponential Regression (การถดถอยแบบเลขชี้กำลัง ab)] ตามลำดับนี้

เราสามารถยืนยันความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน $y = \frac{5}{2} \cdot 2^x = 5 \cdot 2^{x-1}$ ของคอลัมน์ A และ C ได้



- (3) แตะคอลัมน์ A และคอลัมน์ D แตะ [Statistics (สถิติ)], [Regression (การถดถอย)] และ [Quadratic Regression (การถดถอยแบบกำลังสอง)] ตามลำดับนี้ เราสามารถยืนยันความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน $y = x^2 - x + 3$ ของคอลัมน์ A และ D ได้



PRACTICE

① หาพจน์ที่ 2 ถึงพจน์ที่ 5 โดยกำหนดให้พจน์แรกและความสัมพันธ์เวียนเกิดมีรูปแบบดังต่อไปนี้

(1) $a_1 = -4, a_{n+1} = -2a_n + 1$

(2) $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 1$

๒ หาพจน์ทั่วไปของลำดับ a_n โดยกำหนดให้พจน์แรกและความสัมพันธ์เวียนเกิดมีรูปแบบดังต่อไปนี้

(1) $a_1=4, a_{n+1}=a_n+7$

(2) $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

(3) $a_1=-5, a_{n+1}=a_n+4n$

ความสัมพันธ์เวียนเกิด (2)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีหาพจน์ทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิดในรูปแบบ $a_{n+1} = pa_n + q$

STUDY GUIDE

ความสัมพันธ์เวียนเกิดในรูปแบบ $a_{n+1} = pa_n + q$

พิจารณารูปการหาพจน์ทั่วไปโดยกำหนดให้ความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับ a_n แสดงเป็น

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \text{ และ } q \text{ คือค่าคงตัว และ } p \neq 1 \text{ และ } q \neq 0) \dots(i)$$

หาก (i) สามารถแปลงเป็น $a_{n+1} - c = p(a_n - c) \dots(ii)$ แล้วเราสามารถพิจารณาลำดับ $\{a_n - c\}$ เป็นลำดับ

เรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $a_1 - c$ และอัตราส่วนร่วมเป็น p จากส่วนนี้เราจึงสามารถหาพจน์ทั่วไป a_n ได้

สมมติว่าเราสามารถแปลงความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_{n+1} = pa_n + q \dots(i)$ เป็น $a_{n+1} - c = p(a_n - c) \dots(ii)$

โดยการแปลงเป็น (ii) เราจะได้ $a_{n+1} = pa_n - pc + c \dots(iii)$

โดยการเปรียบเทียบ (iii) และ (i) เราจะได้ $q = -pc + c$ จึงกล่าวได้ว่าเราได้ $c = pc + q \dots(iv)$

สูตรนี้ (iv) เหมือนกับสูตร (i) แต่แทนที่ a_{n+1} และ a_n ด้วย c และเราเรียกสูตรนี้ (iv) ว่า **สมการลักษณะเฉพาะ**

เราสามารถใช้สูตรนี้เพื่อแก้สมการเวียนเกิดในรูปแบบ $a_{n+1} = pa_n + q$ ได้ ตามที่แสดงด้านล่าง

(1) **หาคำตอบ c จาก $c = pc + q$ สำหรับสมการลักษณะ**

เฉพาะของ $a_{n+1} = pa_n + q$

(2) **หาพจน์ทั่วไปของ $\{a_n - c\}$ และหาพจน์ทั่วไปของ a_n**

EXERCISE

◆ หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับ a_n ด้านล่าง

(1) $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+2$

แก้ $c=3c+2$ เพื่อจะได้ $c=-1$

ดังนั้น เราสามารถแปลง $a_{n+1}=3a_n+2$ เป็น $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

ซึ่งแสดงว่าลำดับ a_n+1 คือลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $a_1+1=2$ และอัตราส่วนร่วมเป็น 3

ดังนั้น จาก $a_n+1 = 2 \cdot 3^{n-1}$ นั่นคือ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

$$\underline{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1}$$

(2) $a_1=3, a_{n+1}=-4a_n+1$

แก้ $c=-4c+1$ เพื่อจะได้ $c=\frac{1}{5}$

ดังนั้น เราสามารถแปลง $a_{n+1}=-4a_n+1$ เป็น $a_{n+1}-\frac{1}{5}=-4\left(a_n-\frac{1}{5}\right)$

ซึ่งแสดงว่าลำดับ $a_n-\frac{1}{5}$ คือลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $a_1-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}$ และอัตราส่วนร่วมเป็น -4

ดังนั้น จาก $a_n-\frac{1}{5} = \frac{14}{5} \cdot (-4)^{n-1}$ นั่นคือ $a_n = \frac{14}{5} \cdot (-4)^{n-1} + \frac{1}{5}$

$$\underline{a_n = \frac{14}{5} \cdot (-4)^{n-1} + \frac{1}{5}}$$



check

กด เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3 และ A4:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด เลื่อนไปที่ [B1]

(1) หลังจากป้อน [B1:1] แล้ว ให้กด

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)]=3B1+2] แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B2:B4] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด เลื่อนไปที่ [C1]

	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	5		
3	3	17		
4	4	53		

	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	5		
3	3	17		
4	4	53		

	A	B	C	D
1	1	1		
2	2	5		
3	3	17		
4	4	53		

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)]=2×3^(A1-1) - 1] แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C1:C4] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด เลื่อนไปที่ [D1]

	A	B	C	D
1	1	1	1	
2	2	5	5	
3	3	17	17	
4	4	53	53	

	A	B	C	D
1	1	1	1	
2	2	5	5	
3	3	17	17	
4	4	53	53	

เราสามารถยืนยันได้ว่าพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของความสัมพันธ์เวียนเกิดใน B1 ถึง B4 และพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของพจน์ทั่วไปใน C1 ถึง C4 นั้นเหมือนกัน

(2) หลังจากป้อน [D1:3] แล้ว ให้กด

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)]=-4D1+1] แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):D2:D4] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด เลื่อนไปที่ [E1]

	A	B	C	D
1	1	1	1	3
2	2	5	5	-11
3	3	17	17	45
4	4	53	53	-179

	A	B	C	D
1	1	1	1	3
2	2	5	5	-11
3	3	17	17	45
4	4	53	53	-179

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	3	3
2	2	5	5	-11	-11
3	3	17	17	45	45
4	4	53	53	-179	-179

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)]= $\frac{14}{5} \times (-4)^{(A1-1)} + \frac{1}{5}$] แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):E1:E4] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	3	3
2	2	5	5	-11	-11
3	3	17	17	45	45
4	4	53	53	-179	-179

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	3	3
2	2	5	5	-11	-11
3	3	17	17	45	45
4	4	53	53	-179	-179

เราสามารถยืนยันได้ว่าพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของความสัมพันธ์เวียนเกิดใน D1 ถึง D4 และพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของพจน์ทั่วไปใน E1 ถึง E4 นั้นเหมือนกัน

PRACTICE

◆ หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับ a_n ด้านล่าง

(1) $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$

(2) $a_1=\frac{3}{2}, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่าง ๆ (1)

TARGET

การทำความเข้าใจเกี่ยวกับรูปทรงและความสัมพันธ์เวียนเกิด

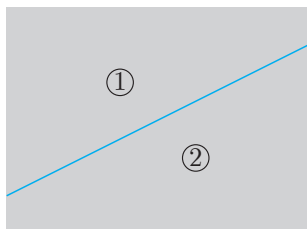
STUDY GUIDE

รูปทรงและความสัมพันธ์เวียนเกิด

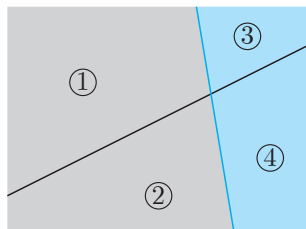
เราสามารถใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่อแก้โจทย์เกี่ยวกับรูปทรง เช่น การหาจำนวนของโดเมนที่สร้างขึ้นโดยการวาดเส้นตรงจำนวน n เส้นบนระนาบ หรือการหาความยาวด้านของรูปทรงสี่เหลี่ยมโดยการเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านต่าง ๆ ของรูปทรงสี่เหลี่ยม

Ex. สมมติว่ามีเส้นตรงจำนวน n เส้นที่วาดบนระนาบ โดยที่ 2 เส้นนั้นไม่ขนานกัน และ 3 เส้นไม่ตัดกันที่จุด 1 จุด พิจารณารววิธีที่เส้นตรง n เส้นเหล่านี้แบ่งระนาบออกเป็น a_n โดเมน

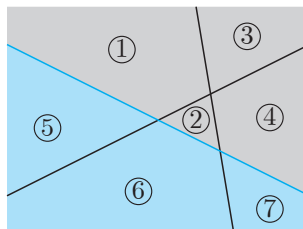
- | | | | |
|--|--|--|--|
| (i) การวาดเส้น 1 เส้นบน
ระนาบจะแบ่งระนาบ
ออกเป็น 2 โดเมน | (ii) การเพิ่มเส้น 1 เส้น
ในข้อ (i) จะเพิ่มโดเมน
ใหม่ 2 โดเมน | (iii) การเพิ่มเส้น 1 เส้นใน
ข้อ (ii) จะเพิ่มโดเมน
ใหม่ 3 โดเมน | (iv) การเพิ่มเส้น 1 เส้นใน
ข้อ (iii) จะเพิ่มโดเมน
ใหม่ 4 โดเมน |
|--|--|--|--|



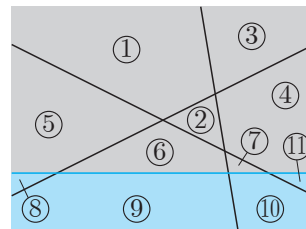
$$a_1 = 2$$



$$a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4$$



$$a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$$



$$a_4 = a_3 + 4 = 7 + 4 = 11$$

เมื่อเพิ่มเส้นที่ $(n+1)$ เป็น l แล้ว เส้น l จะตัดกับแต่ละเส้น n ที่มีอยู่ที่จุด 1 จุด ทำให้เกิดจุดตัดใหม่จำนวน n จุด ดังนั้น โดยการวาดเส้น l โดเมนจะเพิ่มขึ้นเป็น $(n+1)$ กล่าวคือเราจะเห็นได้ว่าจำนวนของโดเมน a_{n+1} ที่ถูกแบ่งด้วยเส้นจำนวน $(n+1)$ เส้นคือ $(n+1)$ มากกว่าจำนวนโดเมน a_n ที่ถูกแบ่งด้วยเส้นจำนวน n เส้น

ดังนั้น จะได้ $a_{n+1} = a_n + n + 1$

EXERCISE

- ◆ สมมติว่ามีเส้นตรงจำนวน n เส้นที่วาดบนระนาบ โดยที่ 2 เส้นนั้นไม่ขนานกัน และ 3 เส้นไม่ตัดกันที่จุด 1 จุด ตอบ โจทย์ต่อไปนี้โดยพิจารณาวิธีที่เส้นตรง n เส้นแบ่งระนาบออกเป็น a_n โดเมน

(1) หา a_1, a_2, a_3 และ a_4

การวาดเส้น 1 เส้นบนระนาบแบ่งระนาบออกเป็น 2 โดเมน $a_1=2$

การเพิ่มเส้นอีก 1 เส้นจะสร้างโดเมนใหม่เพิ่ม 2 โดเมน ดังนั้น $a_2=a_1+2=2+2=4$

การเพิ่มเส้น 1 เส้นที่ระนาบนี้จะสร้างโดเมนใหม่เพิ่ม 3 โดเมน ดังนั้น $a_3=a_2+3=4+3=7$

การเพิ่มเส้นอีก 1 เส้นจะสร้างโดเมนใหม่เพิ่ม 4 โดเมน ดังนั้น $a_4=a_3+4=7+4=11$

$$\underline{a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 11}$$

(2) หาความสัมพันธ์ที่ได้มาจาก a_{n+1} และ a_n

จากผลลัพธ์ของ $a_2=a_1+2, a_3=a_2+3$ และ $a_4=a_3+4$ เราจะได้ $a_{n+1} = a_n + n + 1$

$$\underline{a_{n+1} = a_n + n + 1}$$

(3) หา a_n

จากข้อ (2) ผลต่างของลำดับ b_n ของลำดับ a_n เราจะได้ $b_n = n + 1$

โดยกำหนดให้ $n \geq 2$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 2 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

เมื่อ $n=1$ จะกลายเป็น $\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 2$ ซึ่งสอดคล้องกับ $a_1=2$ ดังนั้นจึงถูกต้องเมื่อ $n=1$

$$\text{ดังนั้น } a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

$$\underline{a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1}$$



check

กด $\odot$ เลือก [Statistics (สถิติ)] กด OK เลือก [2-Variable (ตัวแปร 2 ตัว)] กด OK

กด $\odot$ เลือก [Edit (แก้ไข)] กด OK เลือก [Delete All (ลบทั้งหมด)] กด OK

ป้อน 1, 2, 3 และ 4 ในคอลัมน์ x และ 2, 4, 7 และ 11 ในคอลัมน์ y ตามลำดับ

① EXE ② EXE ③ EXE ④ EXE $\vee$ EXE ② EXE ④ EXE ⑦ EXE ① ① EXE EXE

x		y	
1	2	1	2
2	4	2	4
3	7	3	7
4	11	4	11

เลือก [Reg Results (ผลลัพธ์การถดถอย)] กด OK เลือก [$y=a+bx+cx^2$] กด OK

เราสามารถยืนยันได้ว่า $y = 0.5x^2 + 0.5x + 1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

$y=a+bx+cx^2$	
a=	1
b=	0.5
c=	0.5

PRACTICE

- ◆ สมมติว่ามีเส้นตรงจำนวน n เส้นที่วาดบนระนาบ โดยที่ 2 เส้นนั้นไม่ขนานกัน และ 3 เส้นไม่ตัดกันที่จุด 1 จุด ตอบ
โจทย์ต่อไปนี้โดยพิจารณาว่า a_n คือจำนวนจุดตัดที่น่าจะเป็นจากเส้นตรงจำนวน n เส้นเหล่านี้

(1) หา a_1, a_2, a_3 และ a_4

(2) หา a_n

ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่าง ๆ (2)

TARGET

การทำความเข้าใจเกี่ยวกับความน่าจะเป็นและความสัมพันธ์เวียนเกิด

STUDY GUIDE

ความน่าจะเป็นและความสัมพันธ์เวียนเกิด

ในบางกรณี เราสามารถใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่อพิจารณาโจทย์เกี่ยวกับความน่าจะเป็นได้

EXERCISE

- ◆ ทอดลูกเต๋า 1 ลูก n ครั้ง แล้วความน่าจะเป็นที่เลข 5 จะปรากฏขึ้นในการทอดครั้งที่ n เป็นเลขคี่คือ p_n ในกรณีนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หา p_1

เนื่องจาก p_1 คือความน่าจะเป็นที่เลข 5 จะปรากฏขึ้น 1 ครั้งหลังจากการทอด 1 ครั้ง เราจะได้ $p_1 = \frac{1}{6}$

$$p_1 = \frac{1}{6}$$

(2) ใช้ p_n เพื่อแสดง p_{n+1}

เมื่อทอดลูกเต๋า $(n+1)$ ครั้ง เลข 5 จะปรากฏขึ้นในการทอดครั้งที่ n เป็นเลขคี่ใน 2 กรณีต่อไปนี้

(i) หลังจากทอดลูกเต๋า n ครั้ง เลข 5 ที่ปรากฏขึ้นในการทอดครั้งที่ n เป็นเลขคี่คือ (ความน่าจะเป็น p_n)

และในการทอดครั้งที่ $(n+1)$ เลขอื่น ๆ ที่ไม่ใช่เลข 5 จะปรากฏขึ้น

(ii) หลังจากการทอดลูกเต๋า n ครั้ง เลข 5 ที่ปรากฏขึ้นในการทอดครั้งที่ n เป็นเลขคู่คือ (ความน่าจะเป็น $(1-p_n)$)

และในการทอดครั้งที่ $(n+1)$ เลข 5 จะปรากฏขึ้น

$$\text{ดังนั้น } p_{n+1} = p_n \cdot \frac{5}{6} + (1-p_n) \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6}$$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6}$$

(3) หา p_n

แก้สมการลักษณะเฉพาะของ $c = \frac{2}{3}c + \frac{1}{6}$ สำหรับ $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}$ เพื่อจะได้ $c = \frac{1}{2}$

$$\text{ดังนั้น } p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6} \text{ จึงสามารถแปลงเป็น } p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \text{ ได้}$$

ซึ่งแสดงว่าลำดับ $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ คือลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ และอัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{2}{3}$

$$\text{ดังนั้น } p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ และ } p_n = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$p_n = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$



check

กด เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3 และ A4:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด เลื่อนไปที่ [B1]

หลังจากป้อน $[B1: \frac{1}{6}]$ แล้ว ให้กด

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) $= \frac{2}{3} B1 + \frac{1}{6}$] แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B2:B4] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด เลื่อนไปที่ [C1]

	A	B	C	D
1	1	0.1666		
2	2			
3	3			
4	4			

Fill Formula
Form $=2/3B1+1/6$
Range :B2:B4
Confirm

	A	B	C	D
1	1	0.1666		
2	2	0.2777		
3	3	0.3518		
4	4	0.4012		

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) $= -\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{(A1-1)} + \frac{1}{2}$] แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C1:C4] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด

Fill Formula
Form $=-1/3 \times (2/3)^{(A1-1)}$
Range :C1:C4
Confirm

	A	B	C	D
1	1	0.1666	0.1666	
2	2	0.2777	0.2777	
3	3	0.3518	0.3518	
4	4	0.4012	0.4012	

เราสามารถยืนยันได้ว่าพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของความสัมพันธ์เวียนเกิดใน B1 ถึง B4 และพจน์แรกถึงพจน์ที่ 4 ของพจน์ทั่วไปใน C1 ถึง C4 นั้นเหมือนกัน

PRACTICE

- ◆ ทอดลูกเต๋า 1 ลูก n ครั้ง แล้วความน่าจะเป็นที่พหุคูณของ 3 จะปรากฏขึ้นในการทอดครั้งที่ n เป็นเลขคี่คือ p_n ในกรณีนี้ จงแก้โจทย์ต่อไปนี้

(1) หา p_1

(2) ใช้ p_n เพื่อแสดง p_{n+1}

(3) ॥ p_n

ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่าง ๆ (3)

TARGET

การทำความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง 3 พจน์ที่เรียงติดกัน

STUDY GUIDE

ความสัมพันธ์เวียนเกิดระหว่างพจน์ที่เรียงติดกัน 3 ตัว

ความสัมพันธ์เวียนเกิดระหว่างพจน์ที่เรียงติดกัน 3 ตัว

ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ของพจน์ที่เรียงติดกัน 3 ตัว a_n , a_{n+1} และ a_{n+2} เรียกว่า

ความสัมพันธ์ระหว่าง 3 พจน์ที่เรียงติดกัน

Ex. เราสามารถหาพจน์ที่ 3 และพจน์ตัวต่อ ๆ ไปของลำดับ a_n ซึ่งกำหนดโดย $a_1=1$, $a_2=1$ และ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ได้ดังต่อไปนี้

โดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด เมื่อ $n=1$ แล้ว $a_3=a_2+a_1=1+1=2$ เมื่อ $n=2$ แล้ว $a_4=a_3+a_2=2+1=3$ เมื่อ $n=3$ แล้ว $a_5=a_4+a_3=3+2=5$ เมื่อ $n=4$ แล้ว $a_6=a_5+a_4=5+3=8$ เมื่อ $n=5$ แล้ว $a_7=a_6+a_5=8+5=13$, ...



check

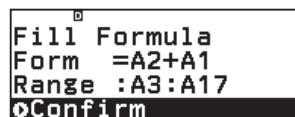
กด เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด

หลังจากป้อน [A1:1 และ A2:1] ตามลำดับแล้ว ให้กด

กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)=A2+A1] แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):A3:A17] แล้ว ให้กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด



	A	B	C	D
1	1			
2	1			
3	2			
4	3			

=A1+A2

	A	B	C	D
14	377			
15	610			
16	987			
17	1597			

=A16+A15

ลำดับที่แสดงในคอลัมน์ A คือ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

กฎคือให้บวกพจน์ 2 ตัวก่อนหน้าเพื่อหาพจน์ตัวต่อไป

ลำดับนี้เรียกว่าลำดับฟีโบนัชชี และมักจะเกิดขึ้นในโลกธรรมชาติและในสาขา STEAM ด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และศิลปะ

นอกจากนี้ ลักษณะเฉพาะที่ปรากฏในลำดับนี้คือเมื่อ n เพิ่มขึ้น $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\text{พจน์ต่อไป}}{\text{พจน์ก่อนหน้า}}$ จะเข้าใกล้ค่าคงที่ 1.618 ...

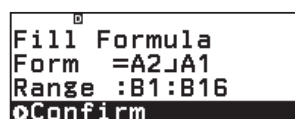
ซึ่งจะเรียกว่าอัตราส่วนของค่า

เลื่อนไปที่ [B1] กด เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)= $\frac{A2}{A1}$] แล้ว ให้กด

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B1:B16] แล้ว ให้

กด เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด



	A	B	C	D
1	1	1		
2	1	2		
3	2	1.5		
4	3	1.6666		

=A2/A1

	A	B	C	D
13	233	1.618		
14	377	1.618		
15	610	1.618		
16	987	1.618		

=A17/A16

วิธีการหาพจน์ทั่วไปของความสัมพัทธ์เวียนเกิดระหว่างพจน์ที่เรียงติดกัน 3 ตัว

พจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดโดย $a_1, a_2, a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$ นั้น สามารถหาได้ดังต่อไปนี้

พิจารณาสมการลักษณะเฉพาะ $x^2 + p x + q = 0$ พร้อมด้วย a_{n+2}, a_{n+1} และ a_n จาก $a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$ สำหรับ x^2, x และ 1 ตามลำดับ

โดยกำหนดให้ 2 คำตอบของสมการกำลังสองนี้คือ α และ $\beta (\alpha \neq \beta)$ และเนื่องจาก $\alpha + \beta = -p$ และ $\alpha \beta = q$ แล้ว

$a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$ เราจะได้ $a_{n+2} - (\alpha + \beta) a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0$ ซึ่งสามารถแปลงได้ด้วย 2 วิธีต่อไปนี้

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} - \beta a_{n+1} + \beta \alpha a_n = 0 \rightarrow a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \dots (i)$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} - \alpha a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0 \rightarrow a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) \dots (ii)$$

จาก (i) ลำดับ $a_{n+1} - \alpha a_n$ คือลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $a_2 - \alpha a_1$ และอัตราส่วนร่วมเป็น β

$$\text{ดังนั้น } a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1} \dots (iii)$$

จาก (ii) ลำดับ $a_{n+1} - \beta a_n$ คือลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $a_2 - \beta a_1$ และอัตราส่วนร่วมเป็น α

$$\text{ดังนั้น } a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1} \dots (iv)$$

จากการแก้สมการ (iii)-(iv) เราจะได้ $(\beta - \alpha) a_n = (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1}$

$$\text{จาก } \alpha \neq \beta \text{ เราสามารถหา } a_n = \frac{1}{\beta - \alpha} \{ (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1} \}$$

EXERCISE

1. หา a_3, a_4, a_5 และ a_6 สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ที่กำหนดโดยความสัมพัทธ์เวียนเกิดดังต่อไปนี้

(1) $a_1=1, a_2=2, a_{n+2} - 4 a_{n+1} + 3 a_n = 0$

ความสัมพัทธ์เวียนเกิดที่กำหนดไว้ถูกแปลงเป็น $a_{n+2} = 4 a_{n+1} - 3 a_n$

$$a_3 = 4 a_2 - 3 a_1 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5, a_4 = 4 a_3 - 3 a_2 = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14, a_5 = 4 a_4 - 3 a_3 = 4 \cdot 14 - 3 \cdot 5 = 41, a_6 = 4 a_5 - 3 a_4 = 4 \cdot 41 - 3 \cdot 14 = 122$$

$$\underline{a_3=5, a_4=14, a_5=41, a_6=122}$$

(2) $a_1=1, a_2=4, a_{n+2} + 3 a_{n+1} + 2 a_n = 0$

ความสัมพัทธ์เวียนเกิดที่กำหนดไว้ถูกแปลงเป็น $a_{n+2} = -3 a_{n+1} - 2 a_n$

$$a_3 = -3 a_2 - 2 a_1 = -3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = -14, a_4 = -3 a_3 - 2 a_2 = -3 \cdot (-14) - 2 \cdot 4 = 34, a_5 = -3 a_4 - 2 a_3 = -3 \cdot 34 - 2 \cdot (-14) = -74,$$

$$a_6 = -3 a_5 - 2 a_4 = -3 \cdot (-74) - 2 \cdot 34 = 154$$

$$\underline{a_3=-14, a_4=34, a_5=-74, a_6=154}$$

check

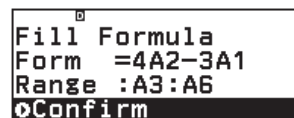
กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

(1) หลังจากป้อน [A1:1 และ A2:2] ตามลำดับแล้ว ให้กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) = 4A2 - 3A1] แล้ว ให้กด $\odot$

หลังจากป้อน [Range (ช่วง): A3:A6] แล้ว ให้กด $\odot$ เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [B1]



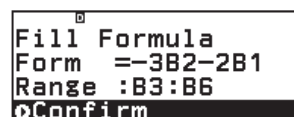
	A	B	C	D
1	1			
2	2			
3	5			
4	14			

(2) หลังจากป้อน [B1:1 และ B2:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ) = -3B2 - 2B1] แล้ว ให้กด $\odot$

หลังจากป้อน [Range (ช่วง): B3:B6] แล้ว ให้กด $\odot$ เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$



	A	B	C	D
3	5	-14		
4	14	-34		
5	41	-74		
6	122	-154		

เราสามารถยืนยันพจน์ที่ 3 ถึงพจน์ที่ 6 ของ (1) ใน A3 ถึง A6 และพจน์ที่ 3 ถึงพจน์ที่ 6 ของ (2) ใน B3 ถึง B6 ได้

๒ หาคำทั่วไป a_n ของลำดับที่กำหนดโดย $a_1=2, a_2=3$ และ $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

โดยการแก้สมการลักษณะเฉพาะของ $x^2-5x+6=0$ เราจะได้ $(x-2)(x-3)=0, x=2, 3$

ดังนั้น $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ จึงสามารถแปลงได้ด้วย 2 วิธีต่อไปนี้

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) \dots(i)$$

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) \dots(ii)$$

จาก (i) ลำดับ $a_{n+1}-2a_n$ คือลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $a_2-2a_1=3-2\cdot 2=-1$ และอัตราส่วนร่วมเป็น 3

$$\text{ดังนั้น } a_{n+1}-2a_n = -1 \cdot 3^{n-1} \dots(iii)$$

จาก (ii) ลำดับ $a_{n+1}-3a_n$ คือลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $a_2-3a_1=3-3\cdot 2=-3$ และอัตราส่วนร่วมเป็น 2

$$\text{ดังนั้น } a_{n+1}-3a_n = -3 \cdot 2^{n-1} \dots(iv)$$

จากการแก้สมการ (iii)-(iv) เราจะได้ $a_n = -1 \cdot 3^{n-1} - (-3 \cdot 2^{n-1})$

$$\text{ดังนั้น } a_n = -3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\underline{a_n = -3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}}$$

check

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด !

หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3, A4:4, A5:5, A6:6, A7:7 และ A8:8] ตามลำดับแล้ว ให้กด EXE เลื่อนไปที่ [B1]

หลังจากป้อน [B1:2 และ B2:3] ตามลำดับแล้ว ให้กด EXE

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)=5B2-6B1] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B3:B8] แล้ว ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$ เลื่อนไปที่ [C1]

Fill Formula
Form =5B2-6B1
Range :B3:B8
Confirm

	A	B	C	D
1	1	2		
2	2	3		
3	3	3		
4	4	-3		
			=5B2-6B1	

กด $\odot$ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)=-3^(A1-1) + 3×2^(A1-1)] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):C1:C8] แล้ว ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด $\odot$

Fill Formula
Form =-3^(A1-1)+
Range :C1:C8
Confirm

	A	B	C	D
1	1	2	2	
2	2	3	3	
3	3	3	3	
4	4	-3	-3	
			=-3^(A1-1)+3×2^(A	

	A	B	C	D
5	5	-33	-33	
6	6	-147	-147	
7	7	-537	-537	
8	8	-1803	-1803	
			=-3^(A5-1)+3×2^(A	

เราสามารถยืนยันได้ว่าพจน์แรกถึงพจน์ที่ 8 ของความสัมพันธ์เวียนเกิดใน B1 ถึง B8 และพจน์แรกถึงพจน์ที่ 8 ของพจน์ทั่วไปใน C1 ถึง C8 นั้นเหมือนกัน

PRACTICE

① หา a_3 , a_4 , a_5 และ a_6 สำหรับลำดับ a_n ที่กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังต่อไปนี้

(1) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0$

(2) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = 0$

2 หาพจน์ทั่วไป a_n ของลำดับที่กำหนดโดย $a_1=1, a_2=6, a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (1)

TARGET

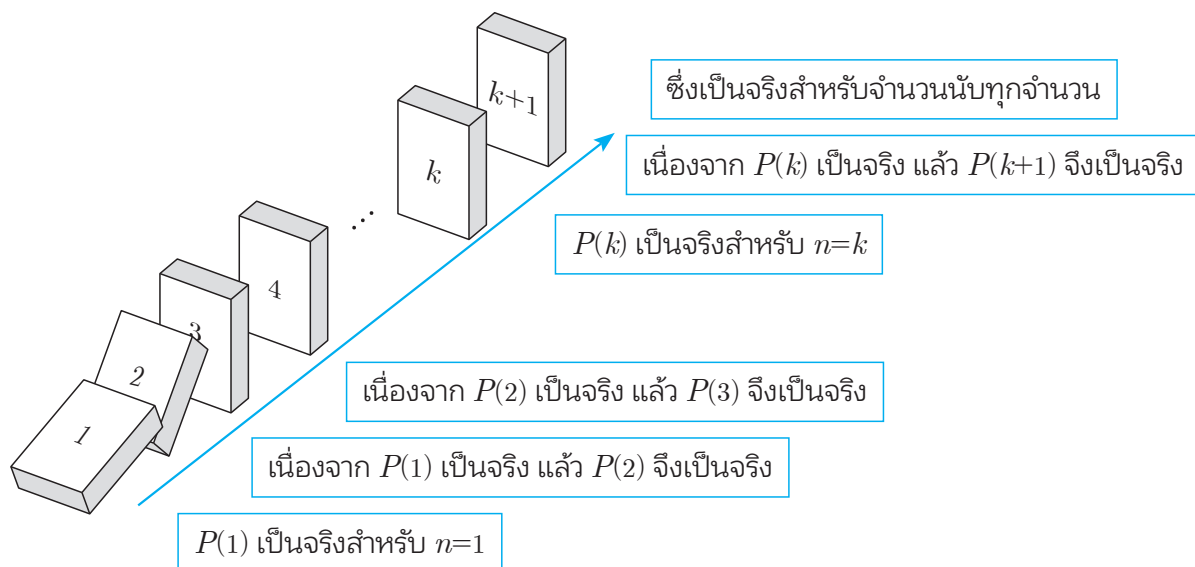
การทำความเข้าใจการพิสูจน์โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

STUDY GUIDE

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์คือวิธีการพิสูจน์ว่าประพจน์ $P(n)$ ซึ่งรวมถึงจำนวนนับ n นั้นเป็นจริงสำหรับจำนวนนับ n ทุกจำนวน ด้วยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสามารถพิสูจน์ได้ใน 2 ขั้นตอน

- (i) แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริงสำหรับ $n=1$
- (ii) สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงสำหรับ $n=k$
 $\Rightarrow$ แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริงสำหรับ $n=k+1$
 จากข้อ (i) และ (ii) จึงเป็นจริงสำหรับจำนวนนับทุกจำนวน



รูป “โดมิโนล้ม” ที่ด้านบนถือเป็นวิธีการที่ดีในการแสดงให้เห็นภาพของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

EXERCISE

- ① โดยให้ n เป็นจำนวนนับ ใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

[การพิสูจน์]

โดยกำหนดให้ $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \cdots (A)$

(i) เมื่อ $n=1$

(ด้านซ้าย) ของ $(A)=1$ และ (ด้านขวา) ของ $(A)=1^2=1$ ดังนั้น (A) จึงเป็นจริง

(ii) เมื่อ $n=k$

สมมติว่า (A) เป็นจริง

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ เป็นจริง

เมื่อ $n=k+1$

(ด้านซ้าย) $= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\} = k^2 + \{2(k + 1) - 1\} = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

ดังนั้น (A) จึงเป็นจริงเช่นกันเมื่อ $n=k+1$

จากข้อ (i) และ (ii) ด้านบน (A) เป็นจริงสำหรับจำนวนนับทุกจำนวน

- ② โดยให้ n เป็นจำนวนนับ ใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ว่าสมการ $2^n > n$ เป็นจริง

[การพิสูจน์]

โดยกำหนดให้ $2^n > n \cdots (A)$

(i) เมื่อ $n=1$

(ด้านซ้าย) ของ $(A)=2^1=2$ และ (ด้านขวา) ของ $(A)=1$ ดังนั้น (A) จึงเป็นจริง

(ii) เมื่อ $n=k$

สมมติว่า (A) เป็นจริง

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $2^k > k$ เป็นจริง

เมื่อ $n=k+1$ เราจึงแสดงได้อย่างง่ายดายว่า $2^{k+1} > k + 1$ เป็นจริง

(ด้านซ้าย) $-($ ด้านขวา) $= 2^{k+1} - (k + 1) = 2 \cdot 2^k - (k + 1) > 2 \cdot k - (k + 1) = k - 1 \geq 0$

ดังนั้น (ด้านซ้าย) $-($ ด้านขวา) > 0 ดังนั้น (A) จึงเป็นจริงเช่นกันเมื่อ $n=k+1$

จากข้อ (i) และ (ii) ด้านบน (A) เป็นจริงสำหรับจำนวนนับทุกจำนวน

PRACTICE

① โดยให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

② โดยให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ว่าอสมการ $3^n > n + 1$ เป็นจริง

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (2)

TARGET

การทำความเข้าใจวิธีการหาพจน์ทั่วไปจากความสัมพันธ์เวียนเกิดและการพิสูจน์สมบัติของจำนวนเต็มโดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

STUDY GUIDE

การพิสูจน์สมบัติของจำนวนเต็ม

โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสามารถพิสูจน์สมบัติของจำนวนเต็มได้

การพิสูจน์ว่าจำนวนนับ N คือผลคูณของ a นั้นสามารถแสดงได้ในรูปแบบต่อไปนี้

$$N = a \times (\text{จำนวนเต็ม})$$

วิธีการหาพจน์ทั่วไปจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าพจน์ทั่วไปที่อนุমানจากความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้นถูกต้อง

แทนที่ $n=1, 2, 3, \dots$ ในความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่ออนุমানพจน์ทั่วไป แล้วพิสูจน์ว่าพจน์ทั่วไปดังกล่าวนั้นถูกต้องโดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

EXERCISE

- ① โดยกำหนดให้ n คือจำนวนนับ จงแก้โจทย์เกี่ยวกับลำดับ $a_n = 2^n + 5^{n-1}$ ต่อไปนี้

- (1) หา a_1, a_2, a_3 และ a_4

$$a_1 = 2^1 + 5^{1-1} = 2 + 1 = 3, a_2 = 2^2 + 5^{2-1} = 4 + 5 = 9, a_3 = 2^3 + 5^{3-1} = 8 + 25 = 33,$$

$$a_4 = 2^4 + 5^{4-1} = 16 + 125 = 141$$

$$\underline{a_1=3, a_2=9, a_3=33, a_4=141}$$



check

กด $\odot$ เลือก [Table (ตาราง)] กด $\odot$ แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Define f(x)/g(x) (กำหนดค่า f(x)/g(x))] กด $\odot$ เลือก [Define f(x) (กำหนดค่า f(x))] กด $\odot$

หลังจากป้อน $f(x) = 2^x + 5^{x-1}$ แล้ว ให้กด $\odot$

กด $\odot$ เลือก [Table Range (ช่วงตาราง)] กด $\odot$

หลังจากป้อน [Start (เริ่มต้น):1, End (สิ้นสุด):4, Step (ขั้น):1] แล้ว ให้เลือก [Execute (ดำเนินการ)] กด $\odot$

$$f(x) = 2^x + 5^{x-1}$$

Table Range
Start:1
End:4
Step:1

x	f(x)	g(x)
1	3	ERROR
2	9	ERROR
3	33	ERROR
4	141	ERROR

(2) จากผลลัพธ์ของ (1) จงอนุมานว่า a_n คือผลคูณของจำนวนหนึ่ง และพิสูจน์จำนวนดังกล่าวโดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

[การพิสูจน์]

จาก $a_1=3=3 \cdot 1$, $a_2=9=3 \cdot 3$, $a_3=33=3 \cdot 11$ และ $a_4=141=3 \cdot 47$ เราสามารถอนุมานได้ว่า a_n คือผลคูณของ 3

(i) เมื่อ $n=1$

จาก $a_1 = 2^1 + 5^{1-1} = 2 + 1 = 3$ เราได้ทราบว่า a_1 คือผลคูณของ 3

(ii) เมื่อ $n=k$

โดยสมมติว่า a_k คือผลคูณของ 3 แสดงว่า $a_k = 2^k + 5^{k-1} = 3m$ (m คือจำนวนเต็ม)

เมื่อ $n=k+1$

$$a_{k+1} = 2^{k+1} + 5^{(k+1)-1} = 2 \cdot 2^k + 5 \cdot 5^{k-1} = 2(3m - 5^{k-1}) + 5 \cdot 5^{k-1} = 2 \cdot 3m + 3 \cdot 5^{k-1} = 3(2m + 5^{k-1})$$

เนื่องจาก $2m + 5^{k-1}$ คือจำนวนเต็ม a_{k+1} คือผลคูณของ 3

ดังนั้น เมื่อ $n=k+1$ จึงเป็นผลคูณของ 3 เช่นกัน

จากข้อ (i) และ (ii) ด้านบน a_n คือผลคูณของ 3

② แก้อิทธิเกี่ยวกับลำดับ $\{a_n\}$ ที่ตรงกับ $a_1=2$ และ $a_{n+1} = na_n - n^2 + 2$ ต่อไปนี้

(1) อนุมานพจน์ทั่วไปของ $\{a_n\}$

แทนที่ $n=1, 2$ และ 3 ในความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_2 = 1 \cdot a_1 - 1^2 + 2 = 1 \cdot 2 - 1^2 + 2 = 3, a_3 = 2 \cdot a_2 - 2^2 + 2 = 2 \cdot 3 - 2^2 + 2 = 4,$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 - 3^2 + 2 = 3 \cdot 4 - 3^2 + 2 = 5$$

ดังนั้น เราจึงสามารถอนุมานให้พจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n + 1$ ได้

$$\underline{a_n = n + 1}$$

(2) ใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ว่าพจน์ทั่วไปในข้อ (1) นั้นถูกต้อง

[การพิสูจน์]

พิสูจน์ว่าพจน์ทั่วไปคือ $a_n = n + 1$

(i) เมื่อ $n=1$

จาก $a_1=1+1=2$ ซึ่งเป็นจริงเมื่อ $n=1$

(ii) เมื่อ $n=k$

สมมติว่า $a_k = k + 1$

เมื่อ $n=k+1$ จากความสัมพันธ์เวียนเกิด เราจะได้

$$a_{k+1} = ka_k - k^2 + 2 = k(k+1) - k^2 + 2 = k + 2 = (k+1) + 1$$

ดังนั้นจึงเป็นจริงเช่นกันเมื่อ $n=k+1$

จากข้อ (i) และ (ii) ด้านบน พจน์ทั่วไปคือ $a_n = n + 1$ ที่สัมพันธ์กับจำนวนเต็ม n ทุกจำนวน

check

กด $\odot$ เลือก [Spreadsheet (สเปรดชีต)] กด OK แล้วล้างข้อมูลก่อนหน้าโดยการกด ⌫

หลังจากป้อน [A1:1, A2:2, A3:3 และ A4:4] ตามลำดับแล้ว ให้กด EXE เลื่อนไปที่ [B1]

หลังจากป้อน [B1:2] แล้ว ให้กด EXE

กด ⓪ เลือก [Fill Formula (ป้อนสูตร)] กด OK

หลังจากป้อน [Form (รูปแบบ)=A1×B1−A1²+2] แล้ว ให้กด EXE

หลังจากป้อน [Range (ช่วง):B2:B4] แล้ว ให้กด EXE เลือก [Confirm (ยืนยัน)] กด OK

Fill Formula
Form =A1×B1−A1²+
Range :B2:B4
Confirm

	A	B	C	D
1	1	2		
2	2	3		
3	3	4		
4	4	5		

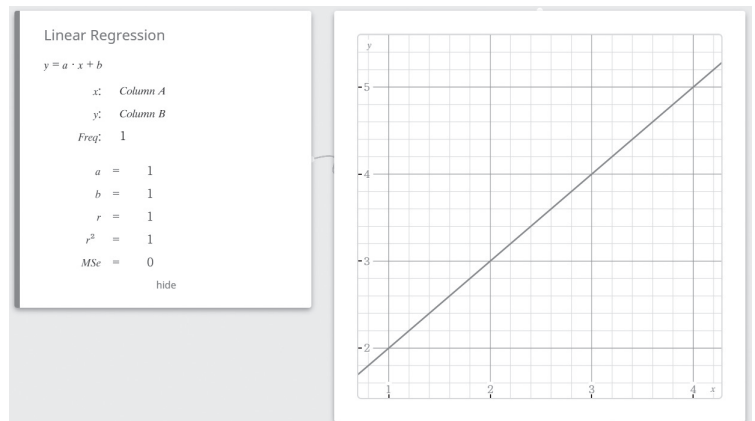
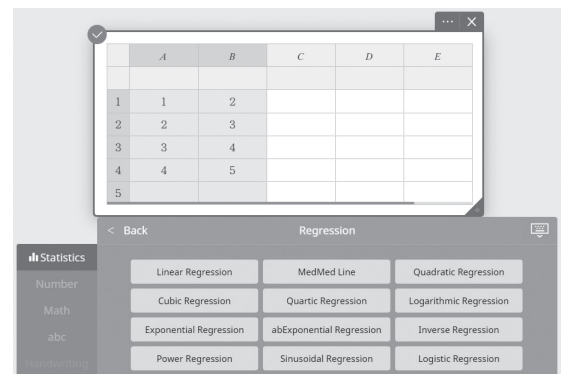
=A1×B1−A1²+2

กด ⬆ ⓧ สแกนคิวอาร์โค้ดเพื่อแสดงข้อมูล

แตะคอลัมน์ A และคอลัมน์ B แตะ [Statistics (สถิติ)] แตะ [Regression (การถดถอย)]

แล้วแตะ [Linear Regression (การถดถอยเชิงเส้น)]

การให้เหตุผลแบบนิรนัยจะปรากฏขึ้น



PRACTICE

① โดยให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ว่า $2n^3 + n$ คือผลคูณของ 3

② อนุกรมพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{a_n\}$ ที่ตรงกับ $a_1=1$ และ $(a_{n+1} - 1)a_n = 2n(2n - 1)$ แล้วใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อพิสูจน์ว่าพจน์ทั่วไปดังกล่าวนี้ถูกต้อง