静岡県内国立大学理系学部での実践報告

今井　壱彦

１．静岡県内国立大学理系学部でのワークショップの概要

ここでは，静岡県内国立大学理系学部でのワークショップに向けた指導案立案，静岡県内国立大学理系学部でのワークショップの流れについて述べる。

1.1. 指導案立案

ワークショップは，今井作成「紙の折る回数と紙の厚さに関する数学科指導案（略案）」をもとに実践している。ワークショップにおいて，学生らは，関数電卓を使用して，紙を半分に折り，重ねていくことを繰り返していくとき，何回折ったときに，S 大学の高低差 100m に届くかを調べていく。授業の目的は，関数電卓を使用して，現実と数学を行き来する活動を通して，式から仮定を見出すこと，および仮定を見直したり結果を解釈したりすることができることである。解決のための式として想定しているのは，（紙の厚さ）$\times 2^{(\text{折った回数})}$であり，この式の形であれば，紙の厚さをどのように仮定したかをみることが可能となる。ここでの紙の厚さの仮定によって，折った回数が自然数にならない場合がある。その自然数にならない折った回数という結果をどのように解釈するかに焦点をあて指導案を立案した。その際，想定した関数電卓の使用方法は次の 3 つである。①基本計算モードにて計算する方法，②基本計算モードのカルク機能を用いる方法，③基本計算モードのソルブ機能を用いる方法である。

1.2. 静岡県内国立大学理系学部でのワークショップの流れ

第 1 に，紙を半分に折り，重ねることを繰り返していくことを具体例で確認する。その具体例として次の 2 つを確認する。1 つは地上から月までは 42 回で到達すること，もう 1 つは東京スカイツリーの高さまでは 23 回で到達することである。ここで，無限回折ることができるという前提を共有する。

第 2 に，問題を提示する。

問題
S 大学の高低差は，100 m あると言われています。紙を半分に折り，重ねることを繰り返していくとき，はたして何回折ったときに，S 大学の高低差に届くでしょうか。

第 3 に，自力解決を行う。その際に想定される関数電卓の使用方法は，上述の 3 つである（図 1，図 2，図 3）。なお，紙の厚さを 0.08mm と仮定している。

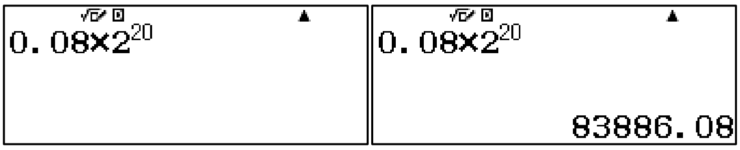

図 1　基本計算モードにて計算する方法

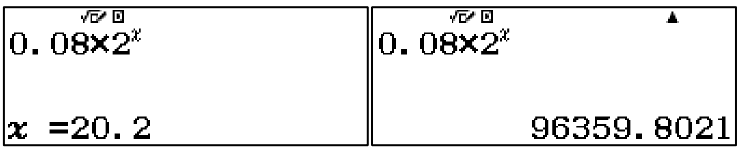

図 2　基本計算モードのカルク機能を用いる方法

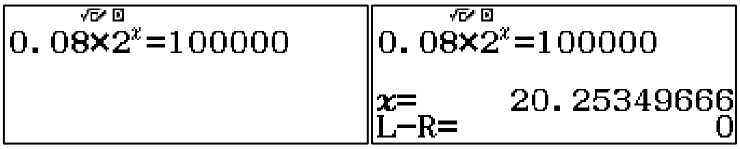

図 3　基本計算モードのソルブ機能を用いる方法

第 4 に，グループで，各自の自力解決の比較・検討を行う。その際の議論の視点として，次の 3 つを設定する。1 つ目は，どのような仮定を設定したかである。2 つ目は，どのような計算方法で解決したかであり，3 つ目は，何回折ると S 大学の高低差に届くかである。

第 5 に，全体で各グループの解決を共有する。共有する視点として，次の 3 つを設定する。1 つ目は，解決するための式である。2 つ目は，どのように関数電卓を用いたかである。3 つ目は，何回折ったかという解答である。そこでの式や解答の相違点を整理し，仮定の相違があることを確認する。

第 6 に，各グループの発表を受けて，グループで課題に取り組む。

課題 20.25 回という結果をどのように解釈しますか。何をどのように変更し，解釈したかを明記しましょう。

第 7 に，全体でグループごとに，課題に対する取組を発表する。

２．静岡県内国立大学理系学部でのワークショップの実際

ここでは，静岡県内国立大学理系学部でのワークショップの報告を行う。実施日は，2022（令和 4）年 8 月 24 日であり，対象は，静岡県内国立大学理系学部の教員を志望している学生 14 名である。インストラクターは筆者である。

学生らは，提示された問題に対して，関数電卓を使用して解決を試みている。ここでは，学生らが，解決の際に用いた関数電卓のモードや機能に着目して，学生の問題解決の実際を報告する。

2.1. 各グループの問題解決および関数電卓の使用方法

学生 OZ のグループは，$a_n = a_0 \cdot 2^n$ という数列（図 4）を立式し，スカイツリーの高さをもとに，紙の厚さとして考えられる厚さの範囲を求めている。その際に，23 回折ったときにぴったりスカイツリーに届くのか，23 回折ったときに余裕でスカイツリーに届くのかを議論し，その結果によって，100 m の高低差を越えるために折る紙の回数は変わるとしている。

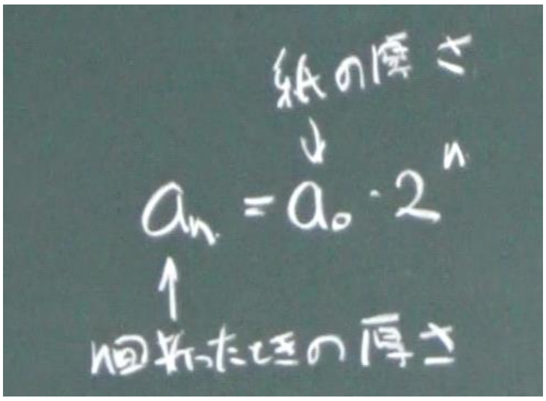

図 4　学生 OZ のグループが立式した数列

スカイツリーに届くためには，紙を 23 回折ると届くということから，数列を変形し，紙の厚さを求めている。

$$a_n = a_0 \cdot 2^n$$
$$a_0 = \frac{a_n}{2^n}$$

a_nは，紙を 23 回折るとスカイツリー届くということから，$a_{23}=634$(m)となる。
つまり，紙の厚さ a_0 は，

$$a_0 = \frac{a_{23}}{2^{23}} = \frac{634}{2^{23}} \cong 7.56 \times 10^{-5}\text{(m)}$$

としている。同様に紙が 22 回折るとスカイツリーに届くと仮定し，紙の厚さとして考えられる値の範囲を求めている。その結果，$7.56 \times 10^{-5} \leq a_0 \leq 1.51 \times 10^{-4}$となるとしている。そして，S 大学の高低差 100m になるときの紙の折る回数を考え，スカイツリーの高さから求めた紙の厚さとして考えられる値の範囲に入っているかを求めている。その結果，$\frac{100}{2^{20}} \cong 9.54 \times 10^{-5}$ m となることから，紙の厚さが9.54×10^{-5} mより小さいときには，21 回折る必要があり，紙の厚さが9.54×10^{-5} m 以上のときには，20 回折るという解決をしている（図 5）。

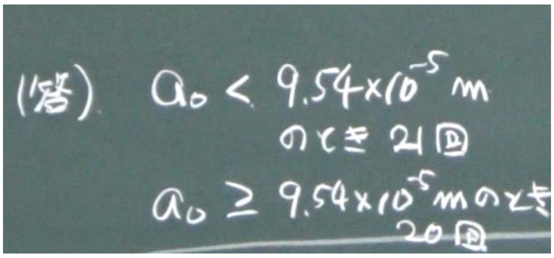

図 5　学生 OZ のグループの解決

ここでの解決の際の関数電卓の使用方法は，基本計算モードにて，計算する方法である。具体的には，$\frac{100}{2^x}$の x に 20 や 21 を入力し，解決している（図 6）。

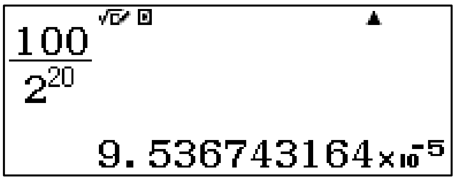

図 6　学生 OZ のグループの関数電卓の基本計算モードにて計算する方法

学生 TR のグループは，紙を n 回折るときに高さ 100m を越えることとし，紙の厚さを 1.0 ×10^{-4} m と仮定し，$1.0 \times 10^{-4} \times 2^{n} \geq 100$という不等式を立式している。その結果，$n \geq 19.9315$となり，$n$ は自然数なので，20 回としている（図 7)。

月　42回

スカイツリー　23回

1回折れば高さは2倍になる.

0.0001

紙の厚さを 0.1 mm = 1.0×10^{-4}m とする。

回数	高さ
0	1.0×10^{-4}
1	2.0×10^{-4}
2	4.0×10^{-4}
3	8.0×10^{-4}
⋮	⋮
n	$2^{n}\times10^{-4}$

$2^{n}\times10^{-4} \geq 100$

$2^{n} \geq 10^{6}$　) 関数電卓で 両辺、常用対数をとり、$\log_{10}2^{n} \geq 6$ を計算

$\therefore n \geq 19.9315\cdots$

nは自然数なので $n=\underline{20}$

図 7　学生 TR の解決

ここでの解決の際の関数電卓の使用方法は，ソルブ機能を用いる方法である。
$1.0 \times 10^{-4} \times 2^n \geq 100$という不等式を変形している。そして，$2^n = 10^6$の方程式とみなし，解決を試みている。しかし，学生 AY は「(関数電卓で方程式の結果が）でないよね」（括弧内筆者補足）と発言し，ソルブ機能を用いても関数電卓において解が表示されないことをグループ全体で確認している（図 8)。

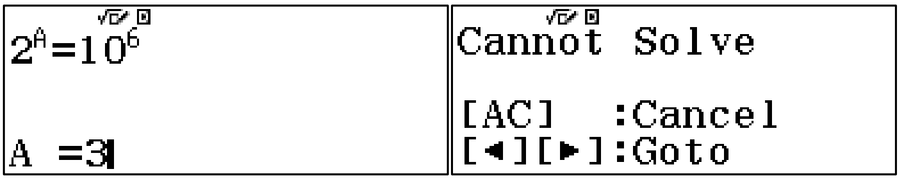

図 8　学生 TR のグループの関数電卓のソルブ機能を用いる方法

そこで，学生 TR は「log とってみるのありだね」と発言し，$2^n = 10^6$の方程式の両辺に常用対数をとり，次のような式変形を行い，基本計算モードにて，解決しようとしている。ただし，学生 HK は，求める値は同じだから求めることができないのではないかと発言している。

$$2^n = 10^6$$
$$\log_{10} 2^n = \log_{10} 10^6$$
$$n = \frac{6}{\log_{10} 2}$$

関数電卓に，$\frac{6}{\log_{10} 2}$を入力し，その結果，19.93 という値を求めている（図 9)。

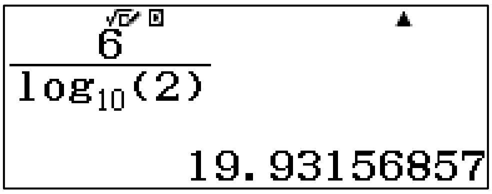

図 9　学生 TR のグループの関数電卓の基本計算モードにて計算する方法

学生 FK のグループは，学生 TR のグループと同様な解決をし，仮定した紙の厚さが正しいかを，紙を 23 回折るとスカイツリーに届くということをもとに，確認している。

学生 IM らのグループは，紙の厚さを a m とし，紙を 23 回折るとスカイツリーに届くということをもとに，次の連立方程式を立式している。

$$\begin{cases} 634 = a \times 2^{23} \\ 100 = a \times 2^x \end{cases}$$

そして，a を消去し，$2^x = \frac{100 \times 10^{23}}{634}$とし，両辺に底が 2 の対数をとり，$x$≒20.3 となることから，21 回折ればよいとしている（図 10)。

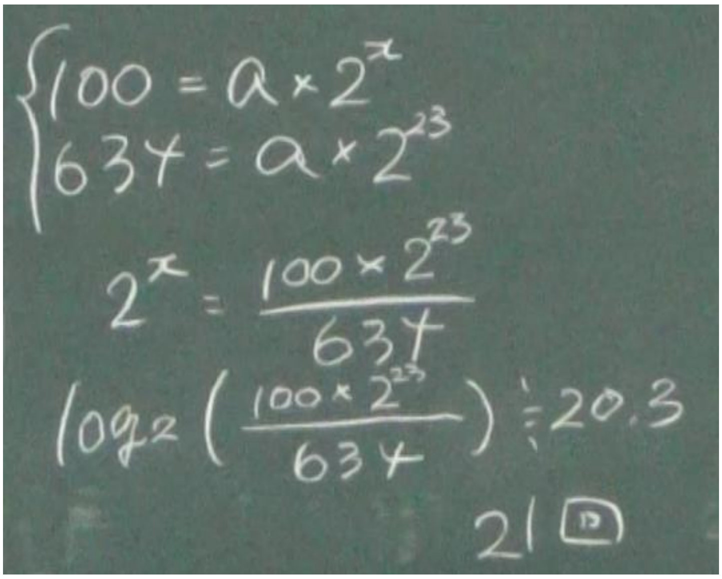

図 10　学生 IM のグループの解決

ここでの解決の際の関数電卓の使用方法は，基本計算モードにて計算する方法である。$2^x=\frac{100\times10^{23}}{634}$とし，両辺に底が 2 の対数をとり，$x$＝$\log_2(\frac{100\times2^{23}}{634})$とし，$\log_2(\frac{100\times2^{23}}{634})$を基本計算モードにて計算している（図 11）。

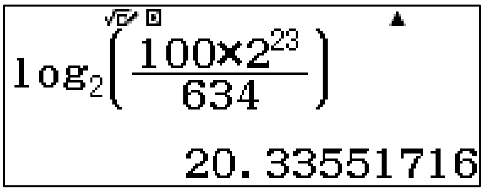

図 11　学生 IM のグループの関数電卓の基本計算モードにて方法

2.2. 各グループの課題への取組

学生 OZ のグループは，紙を 19.93 回折るという解釈を「19 回折ったものから，0.93 回分だけ折る」という考えから，19 回折ったものから，一部の紙を取り除き，残り部分を折ることで，ちょうど 100m になるときに折る必要が紙の枚数を計算しようとしている。その結果，紙を取り除く部分の長さを d m とし，（$10^{-4}\times2^{19}$－d）×2＝100－d という方程式を立て，d＝4.8576 (m)としている（図 12）。つまり，紙の厚さを 1.0×10^{-4} と仮定したまま，19 回折った後に，紙を折る枚数を調整することで，ちょうど 100 m になるようにしている。

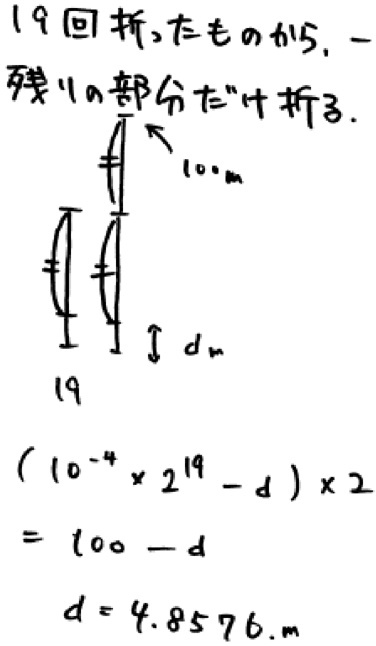

図 12　学生 OZ の課題への取組

学生 TR のグループは，紙を 19.93 回折るということの解釈を 20 回折って，いらない分を削るという考えから，100 m に届くために必要な紙の枚数を計算している。そして，紙の厚さを 1.0×10^{-4} m と仮定しているので，100000 枚必要であることを確認している。さらに，$2^{19}=524288$，$2^{20}=1048576$ であることから，20 回折った紙の枚数から 48756 枚取り除けばよいとしている（図 13）。ただ，「0.93 回の解釈を 93%と考え解決しようとしたができなかった」と述べ，割合で解決しようとした姿がうかがえる。つまり，紙の厚さを 1.0×10^{-4} m と仮定したまま，19 回折った後に，紙を折る枚数を調整することで，ちょうど 100 m になるようにしている。

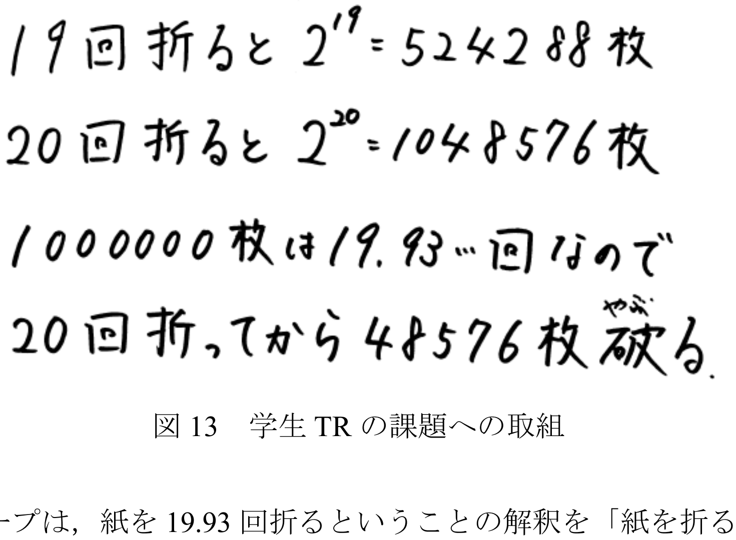

図 13　学生 TR の課題への取組

学生 FK のグループは，紙を 19.93 回折るということの解釈を「紙を折る回数が自然数にした方がよい」という考えから，紙の厚さを変更し，紙を 20 回折れば，ちょうど 100m になるような紙の厚さを計算している。その結果，紙の厚さを x m とし，$2^{20}\times x=100$ という方程式を立て，紙の厚さを 9.5367×10^{-5} m にすればよいとしている（図 14）。つまり，紙の

厚さという仮定を見直し，解決しようとしている。

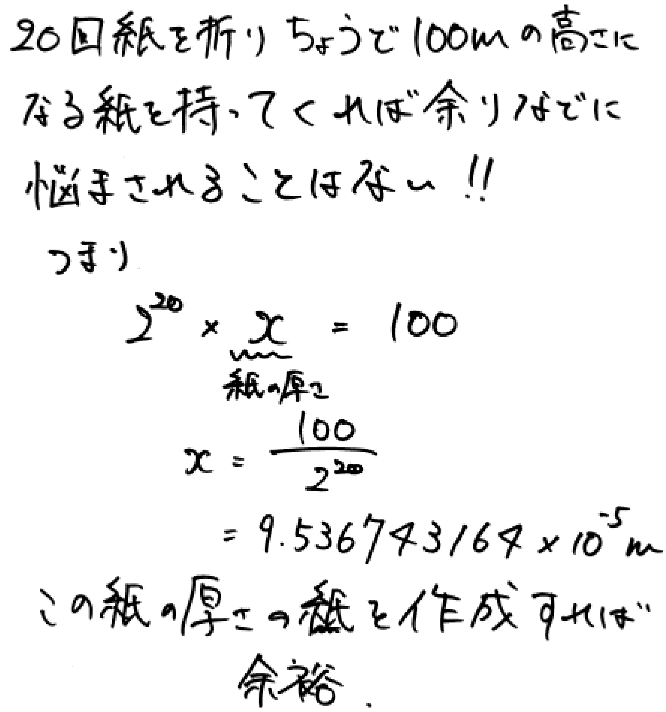

図 14　学生 FK の課題への取組

学生 IM のグループは，紙を 19.93 回折るということの解釈を，19.93 回を 19 回と 0.93 回と解釈し，「19 回折って，19 回折った紙の枚数を（$2^{0.93}-1$）倍した枚数を加えればよい」ということを $100=10^{-4}\times2^{19.93}$ という式の式変形から導いている（図 15）。なお，式変形が誤っていることに留意したい。つまり，紙の厚さを 1.0×10^{-4} m と仮定したまま，ちょうど 100 m になるために 19 回折ったあとに，さらに折らないといけない枚数を計算し，解決しようとしている。

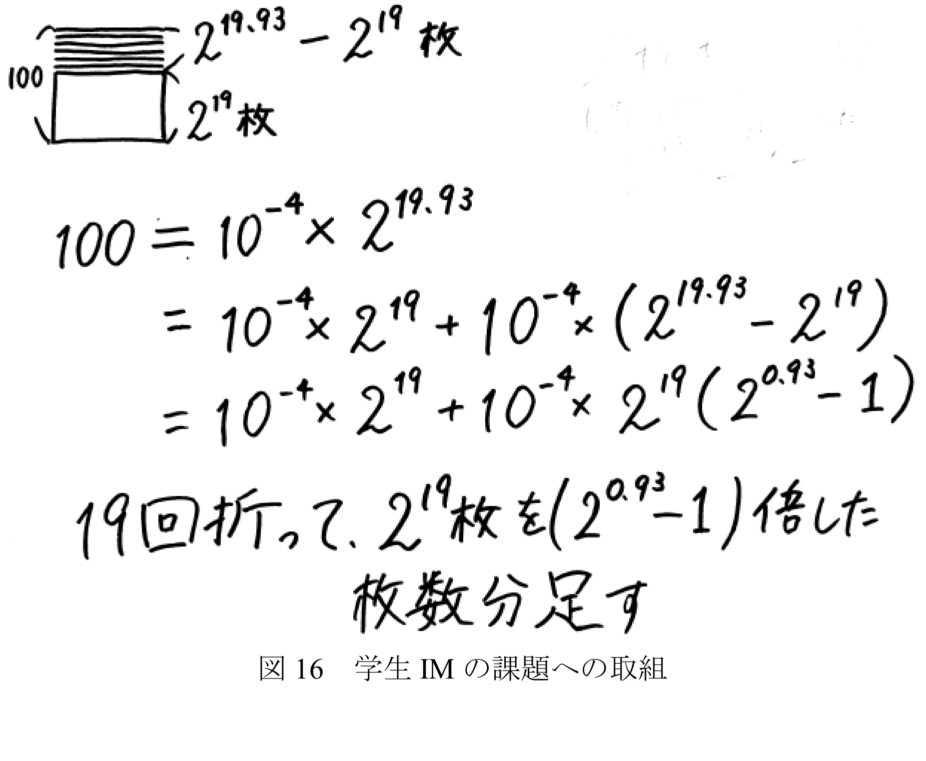

図 16　学生 IM の課題への取組

３．静岡県内国立大学理系学部でのワークショップの実践をしてみて

今回の実践を受けて，関数電卓使用に関して次の 2 点が示唆された。

1 点目は，基本計算モードで，各種機能を用いずとも計算できるように，式変形を行ってから関数電卓に入力することも考えていることである。学生らは，そのまま関数電卓に入力できる計算を，自分で式変形し，入力しやすい式や，基本計算モードで計算ができるように式変形を行っている様子がみられた。具体的には，図 11 のような解決である。$2^x = \frac{100\times10^{23}}{634}$ を入力し，カルク機能を用いて解を求めることもできるが，底が 2 の対数をとって，x＝ $\log_2(\frac{100\times2^{23}}{634})$の式に変形してから関数電卓に入力している。

2 点目は，基本計算モードのソルブ機能がカルク機能に集約されてしまうのではないかということである。具体的には，図 8 のような解決である。ここでの計算は，A の初期値を変更することで，計算可能になる場合もある。これには，関数電卓のソルブ機能に関して「x（求解対象の変数）に代入した初期値によっては，求解できない場合があります。この場合，初期値をより解に近いと思われる値に変更し，再度計算してください」（取扱説明書，p.28）と記載されていることが影響している。今回の A に 20 を初期値として入力すると，求解することができる。ソルブ機能で，解を求めていくにも関わらず，解が求められない場合には，カルク機能のように，様々な値を入力し，計算していかなければならない。