

## 関数電卓使用を前提とした数学問題解決時の解法に基づく問題分類

## —米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題を例として—

埼玉大学教育学研究科 佐藤 陽平

y.sato.689@ms.saitama-u.ac.jp

**概要：**受託研究「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」（研究代表者：松寄昭雄）では、関数電卓使用を前提とする数学授業の構想に向けた取組をおこなっている。本稿では、関数電卓を使用して、米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題を解決する。そして、問題解決時の解法に基づき問題を分類する。関数電卓を使用した解決が困難な問題は、文字式の計算を要する問題と、正しい選択肢や正しい曲線を選ぶ問題である。

**検索語：**関数電卓, SAT Subject Test

## 1. はじめに

受託研究「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」（研究代表者：松寄昭雄）では、関数電卓使用を前提とする数学授業の構想に向けた取組をおこなっている。今井（2021）は、関数電卓（カシオ計算機株式会社の fx-JP900-N）を使用して、令和元年度（第 69 回）埼玉県高等学校数学科標準テスト（数学 I+A）及び（数学 II+B）の問題を解決し、問題解決時の解法に基づき問題を分類している。

本稿では、関数電卓を使用して、米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題を解決する。SAT について松寄（2021）は、「非営利団体 College Board が主催する米国の標準テストであり、SAT Reasoning と SAT subject Test の 2 種類から構成されている。」（p.97）と紹介している。また、SAT の問題を解決する際の電卓使用に関しては、使用可能なグラフ関数電卓の機種を指定している他、すべての関数電卓の使用が認められている（松寄, 2021, p.97）。

The SAT Math Test には Level 1 と Level 2 の 2 種類があり、Level 1 の Subject Test Math 1（以下、Math 1）では 32 問、Level 2 の Subject Test Math 2（以下、Math 2）では 28 問の、計 60 問のサンプル問題が HP 上に掲載されている（<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat>）。そこで、今井（2021）による関数電卓使用を前提とした問題分類の項目に基づき問題を分類する。分類項目は次の 3 つである：1 つ目は、関数電

卓を用いて即時に解決できる問題である。2 つ目は、工夫すれば解決できる問題である。3 つ目は、関数電卓を使用した解決が困難な問題である。このうち、工夫すれば解決できる問題は、さらに次の 3 つに細分化される：1 つ目は、関数・条件式の工夫や公式を利用すれば解決できる問題である。2 つ目は、関数電卓の使用方法を工夫すれば解決できる問題である。3 つ目は、関数電卓での出力結果を検討・解釈すれば解決できる問題である（今井, 2021, p.99）。次項の表は、解法に基づいた問題を分類し、まとめたものである（表 1）。なお、問題番号は四角囲みで示す。例えば、Subject Math Test 1 の Question 1 of 32 は、 $\boxed{1}$  となる。また、1 つの問題が複数の分類に当てはまる場合もある。

## 2. 解法に基づき分類した問題の一例

### 2.1. 関数電卓を用いて即時に解決できる問題

本節では、「Math 2」の $\boxed{5}$ を取り上げる。問題は「In the figure above, when  $\vec{OB}$  is subtracted from  $\vec{OA}$ , what is the length of the resultant vector? ( $\vec{OA}$  から  $\vec{OB}$  を引いたとき、ベクトルの長さはどれくらいになるか?)」である（図 1）。ここでは、「ベクトル計算」モードを使用する。このモードでは、2 次元または 3 次元のベクトルを使った計算を実行でき、「ベクトル計算」モード専用のベクトルメモリーを使用する。関数電卓を使用した解法は次の通りである：①「ベクトル計算」モードを選択する。② $\text{VectA} = (4, 3)$ ,  $\text{VectB}$

表 1 関数電卓使用を前提とした際の The SAT Math Test のサンプル問題の問題分類

	即時に解決できる問題	工夫すれば解決できる問題			解決が困難な問題
		関数・条件式の工夫や公式を利用すれば解決できる問題	関数電卓の使用方法を工夫すれば解決できる問題	出力結果を検討・解釈すれば解決できる問題	
「Math 1」	該当無	1 4 5 7 9 10 11 15 16 19 20 22 23 24 25 28 30 31 32	8 13 18 21 29	13 14 18 21 27 32	2 3 6 12 17 26
「Math 2」	5	1 3 4 6 8 12 13 14 18 20 22 23 24 25 26 28	2 11 15	2 7 15 21 22 26 27 28	9 10 16 17 19

= (8, 4) のように、専用のベクトルメモリーにベクトルの成分の登録をおこなう。③②で登録したベクトルを用いてベクトルの長さを求めると「4.123105626」が表示される。この問題の正答は「4.1」である。なお、図中の「Abs」は絶対値の記号を表す（図 2）。

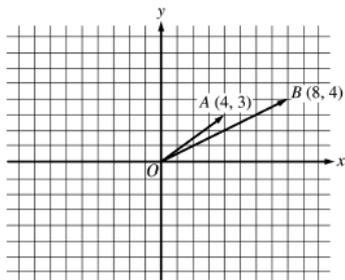


図 1 「Math 2」の 5 で示されているベクトル  
(<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat-subject-tests/subjects/mathematics/mathematics-2/sample-questions/5>)

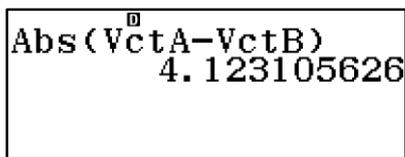


図 2 ベクトルの計算結果の表示

本項目では、問題文に記してある式や数値をそのまま関数電卓に入力することで解決できる問題を「即時に解決できる問題」としている。そのため、「Math 1」では本項目に分類できる問題が存在しなかった。

## 2.2. 工夫すれば解決できる問題

### ①関数・条件式の工夫や公式を利用すれば解決できる問題

本項では、「Math 1」の 4 を取り上げる。問題は「A number  $n$  is increased by 8. If the cube root of that result equals  $-0.5$ , what is the value of  $n$ ? (ある数  $n$  に 8 を足した数の 3 乗根が、 $-0.5$  となるときの  $n$  の値はいくつになるか?)」(<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat-subject-tests/subjects/mathematics/mathematics-1/sample-questions/4>) である。この問題は、問題文から方程式を立てる必要があるため、本項目に分類した。ここでは、「基本計算」モードのソルブ機能を使用する。この機能では、ニュートン法を用いて方程式を解くことができる。ソルブ機能では、変数に様々な値を代入し、両辺の式の値を求めることで、両辺の式の値の差がより 0 に近くなるような変数の値を求める。ソルブ機能を用いた計算結果の差は「L-R」で表示される。ソルブ機能は、方程式の入力後、「SHIFT」「CALC」を押下することで使用することができる。関数電卓を使用した解法は次の通りである：①「基本計算」モードを選択する。② $\sqrt[3]{x+8} = -0.5$  を入力する。③「SHIFT」「CALC」と押下後、「=」を押下すると、「 $x = -8.125$ 」が表示される（図 3）。この問題の正答は「 $-8.125$ 」である。

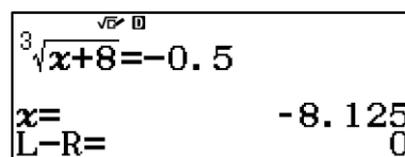


図 3 ソルブ機能を使用した結果の表示

## ②関数電卓の使用方法を工夫すれば解決できる問題

本項では、「Math 2」の[11]を取り上げる。問題は「A sequence is recursively defined by  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ , for  $n > 2$ . If  $a_1 = 0$  and  $a_2 = 1$ , what is the value of  $a_6$ ? ( $n > 2$  のとき,  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$  によって順番は再帰的に定義づけられている。 $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  のとき,  $a_6$  の値はいくつになるか?)」 (<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat-subject-tests/subjects/mathematics/mathematics-2/sample-questions/11>) である。関数電卓には、与えられた漸化式をもとに指定された項の値を求める機能が備わっていないため、ここでは「表計算」モードを使用する。このモードは、45行×5列の表を使って計算することができ、各種「表計算」モード専用コマンドを有する。「表計算」モードの表に与えられた条件を入力することで、 $a_6$  の値を計算する。関数電卓を使用した解法は次の通りである：①「表計算」モードを選択する。②A1のセルに初項0, A2のセルに第2項の1を入力する。③A3のセルに「=A2+2×A1」を入力する。④コピー&貼り付け機能を用いて、第6項まで入力すると、A6のセルに「11」が表示される(図4)。この問題の正答は「11」である。

	A	B	C	D
3	0			
4	1			
5	3			
6	11			

=A5+2×A4

図4 「=A5+2×A4」の表示

## ③関数電卓での出力結果を検査・解釈すれば解決できる問題

本項では、「Math 1」の[13]を取り上げる。なお、この問題は、2.2. ②の分類と本項の分類にあてはまる。問題は「The function  $f$ , where  $f(x) = (1+x)^2$ , is defined for  $-2 \leq x \leq 2$ . What is the range of  $f$ ? (関数を  $f$  とすると,  $f(x) = (1+x)^2$  の定義域は  $-2 \leq x \leq 2$  である。このときの  $f$  の範囲はどのくらいか?)」 (<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat-subject-tests/subjects/mathematics/mathematics-1/sample-questions/13>) である。ここでは、「数表作成」モードを使用する。このモードは、1つまたは2つの関数式に

基づく数表を作成できる。関数  $f(x) = (1+x)^2$  と、定義域である  $-2 \leq x \leq 2$  を入力することで、 $x$  の値に対応する  $f(x)$  の値を求める。関数電卓を使用した解法は次の通りである：①「数表作成」モードを選択する。②  $f(x) = (1+x)^2$  を入力する。③数表の範囲として、開始値に  $-2$ , 終了値に  $2$ , ステップ値に  $1$  を入力する。④「=」を押下することで数表が作成される(図5)。 $f(-2) = 1$ ,  $f(-1) = 0$ ,  $f(0) = 1$  より,  $x = -1$  で対称である。よって,  $x = -1$  のとき, 最小値は  $0$  である。また,  $f(2) = 9$  より,  $x = 2$  のとき, 最大値は  $9$  である。この問題の正答は「 $0 \leq f(x) \leq 9$ 」である。

二次関数の最大値や最小値を求める場合、グラフの対称性をもとに考察する必要がある。この問題では、整数値で解決することができたが、問題によっては  $x$  の値が整数値でないときに最大値や最小値をとる場合がある。そのような場合は、 $x$  の値についてステップ値を小さくし、再び数表作成を繰り返す必要がある。

	x	f(x)
1	-2	1
2	-1	0
3	0	1
4	1	4

-2

	x	f(x)
3	0	1
4	1	4
5	2	9
6		

図5  $-2 \leq x \leq 2$  に対応する  $f$  の値の表示

## 2.3. 関数電卓を使用した解決が困難な問題

今井(2021)は、関数電卓を使用した解決が困難な問題の特徴として次の2つを挙げている：1つ目は、文字式の計算を要する問題である。2つ目は、正しい選択肢や正しい曲線を選ぶ問題である。以下に問題例を示す。

### ①文字式の計算を要する問題

本項では、「Math 1」の[3]を取り上げる。問題は「In the figure above  $\overline{AB}$  and  $\overline{CD}$  are parallel. What is  $x$  in terms of  $y$  and  $z$ ? (上の図で  $AB$  と  $CD$  が平行のとき,  $x$  は  $y$  と  $z$  を用いるとどのようになるか?)」である(図6)。

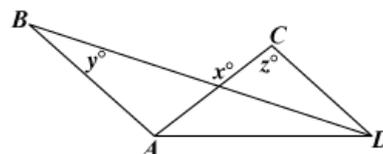


図6 「Math 1」の[3]で示されている図形  
(<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat-subject-tests/subjects/mathematics/mathematics-1/sample-questions/3>)

この問題は、平行線の錯角を用いて解決をおこなう。解法は次の通りである：①ACとBDとの交点を点Eとする。②点Eを通りABと平行な直線*l*を引く。③平行線の錯角より、「 $x=y+z$ 」である。しかし、関数電卓には文字式の計算をおこなう機能が備わっていないため、関数電卓を使用した解決が困難である。

### ②正しい選択肢や正しい曲線を選ぶ問題

本項では、「Math 1」の[12]を取り上げる。問題は「Ralph was on his way from home to work when he remembered that he left his briefcase at home. He drove home and then drove back to work. Which of the following graphs could represent his distance from home as a function of time? (ラルフは、家から会社に向かう途中、ブリーフケースを家に忘れたことを思い出した。彼は車で家に帰り、その後、車で会社に戻った。彼の家からの距離を時間の関数として表すグラフは次のうちどれか?)」である。この問題は、問題文の内容と合致するグラフを選択する問題である。家を出発したラルフが、一度帰宅している点を考慮すると、「E」の選択肢が正解となる(図7, 8)。しかし、関数電卓ではグラフを表示する機能が備わっていないため、関数電卓を使用した解決が困難である。

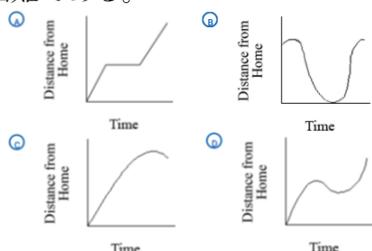


図7 「Math 1」の[12]の誤答例  
(<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat-subject-tests/subjects/mathematics/mathematics-1/sample-questions/12>)

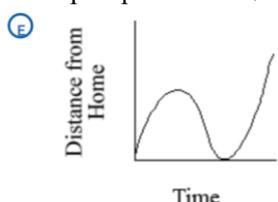


図8 「Math 1」の[12]の正解の選択肢  
(<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat-subject-tests/subjects/mathematics/mathematics-1/sample-questions/12>)

### 3. おわりに

本稿では、関数電卓を使用して、「Math 1」「Math 2」の問題を解決した。そして、今井(2021)による関数電卓使用を前提とした問題分類の項目に基づき問題を分類した。その結果、令和元年度(第69回)埼玉県高等学校数学科標準テスト(数学I+A)及び(数学II+B)の問題と同様に問題を分類することができた。また、今井(2021)の、関数電卓を使用した解決が困難な問題の特徴をもとに、具体的な問題例を示すことができた。

今後は、令和元年度(第69回)埼玉県高等学校数学科標準テスト(数学I+A)及び(数学II+B)の問題や今回使用したサンプル問題を例とした関数電卓の操作マニュアルの作成に着手する。

註. 本研究は、埼玉大学がカシオ計算機株式会社と締結した受託研究「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」(研究代表者：松寄昭雄)の助成を受けている。

### 引用・参考文献

College Board

<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat>  
(2021年7月7日最終確認)

今井彦彦(2021)「関数電卓使用を前提とした数学問題解決時の解法に基づく問題分類—令和元年度(第69回)埼玉県高等学校数学科標準テストを例として—」『2021年数学教育学会春季年会予稿集』pp.99-101

松寄昭雄(2021)「関数電卓使用を前提とする数学授業の構想—2020(令和2)年度の取組—」『2021年度数学教育学会春季年会予稿集』pp.96-98