

「ピタゴラス音律」の算定法に着目した数学ワークショップ指導案（略案）

棚澤 日菜子

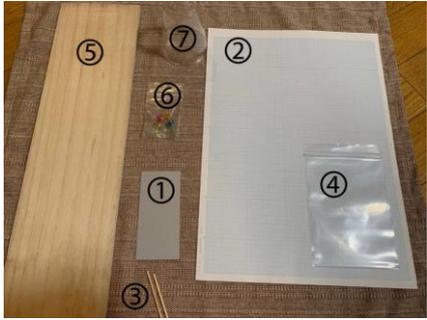
**実験授業の目的**

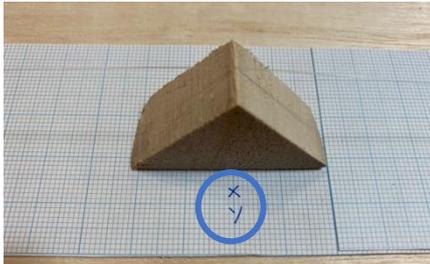
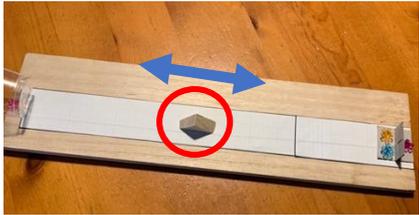
関数電卓使用を前提とした授業の中で、数学を用いて調律をする活動をおこない、どのような学生の数学的な表現・処理が出るかを、ワークシートをもとに調査する。

**授業のねらい**

感覚と数学の双方から調律をする活動を通して、「ピタゴラス音律」の算定法を、関数電卓を用いて数学的に表現・処理することができる。

**本時の展開**

	学習活動	指導の手立て	留意点
導入	<p>○モノコードを作成する。</p> <p>・モノコードを作成する際に必要な材料は以下の材料①～⑦である。</p>		
	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 10px;"> <p>材料①厚紙 材料②方眼紙 材料③爪楊枝 2本 材料④釣り糸 材料⑤木製の板 材料⑥画鋏 4つ 材料⑦底に穴が開いているプラスチックコップ</p> </div> </div>		
	<p>・【資料1】のモノコード作成過程の手順に沿ってモノコードを作成する。</p>		<p>・はさみ, 定規, ペン, セロハンテープ, のりを用意しておく。</p> <p>・【資料1】のモノコード作成過程(4)では, 釣り糸を弱く結ぶと取れやすくなってしまうため, 結びつける際, 複数回固く結ぶよ</p>
	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  </div> <p style="text-align: center;">完成したモノコード</p>		

		<ul style="list-style-type: none"> <li>・モノコードを作成し終わった学生から順に、チューナーを用いて、開放弦（弦のどこにも触れていない状態）の音が「ド」の音になるよう調整する。</li> </ul>	<p>う指示する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・【資料 1】のモノコード作成過程（6）では、(1) (2) で作成した厚紙の右端を材料④の木製の板の右端に合わせるようにしてつけるよう指示する。</li> </ul>
<p>展開</p>	<p>○耳で音律を確認する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・モノコードを用いて、実際に弦を鳴らし、「ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シ・ド（1 オクターブ上）」の部分に印（「×」）と音階を書く。</li> </ul>  <p>印（「×」）と「ソ」を書いた写真</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・弦の長さを調整するもの（木製の三角柱）を左右に動かしながら、弦を弾いて音を確認する。</li> </ul>  <p>弦の長さを調整するもの（木製の三角柱）の動かし方を説明する写真</p> <p>○「音律」について知る。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・「音律」の意味，様々な音律の特色を知る。</li> </ul> <p>→音階（音の高さの並び）のそれぞれ</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・弦の長さを調整するもの（木製の三角柱）の動かし方を，写真を用いて説明する。</li> </ul>	

<p>れの音を調律する基準</p> <p>○「ピタゴラス音律」を題材とした問題について知る。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>『平成 24 年度中学生思考力チャレンジ大会問題』の中の「ピタゴラス音律」を題材とした問題の一部（【資料 2】）について知る。</li> </ul> <p>○「ピタゴラス音律」について知る。</p> <p>→ピタゴラスは、鍛冶屋の槌の音の中に共鳴して協和する音があることを発見し、2つの一弦琴を並べて、実験をおこなったところ、次の2点を発見した。</p> <p>①もとの音の弦の長さを半分にしたときの音は、もとの音の1オクターヴ上の音になる</p> <p>②1つを開放弦、もう1つの弦の長さを1:2に分割して同時に弾いたとき、2音が協和する</p> <p>→違う音同士で最も協和する音程の比である2:3の関係を使って作られた音律が「ピタゴラスの音律」である。</p> <p>○「ピタゴラス音律」の算定法について知る。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>主音（最初の音）の弦の長さ、主音から1オクターヴ上の音の弦の長さの比が2:1であることを確認する。</li> <li>主音でない音を1オクターヴ内につくるための、弦の長さの条件を確認する。</li> </ul>	<p>T: 先程、皆さんが作成したモノコードを題材とした問題があります。</p> <p>T: 「ピタゴラス音律」という言葉を聞いたことがありますか？</p> <p>T: 「一弦琴」とは、皆さんが先程作成したモノコードのように弦が1本の琴のようなものです。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>弦の長さが短くなるにつれて音の高さも高くなることを伝える。</li> <li>「協和する」とは、心地よく聞こえることを表していることを伝える。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>『平成 24 年度中学生思考力チャレンジ大会問題』の中の「ピタゴラス音律」を題材とした問題の一部を紹介する。</li> <li>PowerPoint のアニメーションを用いて、ピタゴラスが実験を通して発見したことを説明する。</li> <li>PowerPoint のアニメーションを用いて、ピタゴラスの算定法における弦の長さの求め方を説明する。</li> </ul>
---	---	---

→主音（基準となる音）を「ド」とすると、「ド」以外の音を1オクターヴ内につくるためには、「ド」以外の音の弦の長さが「1オクターヴ上のド」の音の弦の長さより長くなる。つまり「ド」の弦の長さの半分より、長くなる必要がある。

○ピタゴラスの算定法における弦の長さの求め方を確認し、関数電卓を用いてモノコードの弦の長さを求め、チューナーを用いて調律をおこなう。

- ・主音から第4音までの弦の長さを求める。
- ・主音を「ド」とする。
- ・ピタゴラスの算定法における弦の長さの求め方を確認する際には、弦の長さを1とする。
- ・関数電卓を用いてモノコードの弦の長さを求める際には、「アンサーメモリー (Ans)」を用いる。
- ・関数電卓を用いて求めた弦の長さをもとに、モノコードに印(「○」)をつける。

①「ド」(主音)の弦の長さから第2音の弦の長さを求める。

(1)主音の弦の長さを1とすると、

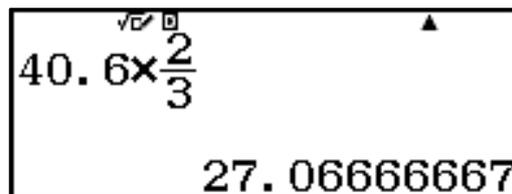
第2音の弦の長さは、 $1 \times \frac{2}{3}$ よ

り、 $\frac{2}{3}$

(2)「ド」(主音)の弦の長さであるモノコードの弦の長さ40.6cmを2倍して3で割るた

め、 $40.6 \times \frac{2}{3}$ を入力する。

・関数電卓の「アンサーメモリー (Ans)」の使い方を確認する



The image shows a calculator screen with the expression  $40.6 \times \frac{2}{3}$  on the top line and the result  $27.06666667$  on the bottom line. There is a small triangle icon in the top right corner of the screen.

$40.6 \times \frac{2}{3}$ を入力したときの

関数電卓の画面

→第2音の弦の長さは、27.1cm

(3) 求めた第2音の弦の長さをもとに、第2音の音階を確認する。

モノコードで実際に音を鳴らし、第2音の音階を、チューナーを用いて再度確認する。

→第2音は「ソ」

②第2音の弦の長さから第3音の弦の長さを求める。

(1) 第2音の弦の長さを $\frac{2}{3}$ 倍した

ときの値が $\frac{1}{2}$ よりも小さくなる

ため、弦の長さをさらに2倍し、1オクターヴ内に第3音をつくる。

(2) 第2音の弦の長さを2倍し

て3で割るため、 $\text{Ans} \times \frac{2}{3}$ を入力する。

出力結果が「ド」の弦の長さの半分

(20.3cm) より小さくなるため、1オクターヴ内に移動させるために、 $\text{Ans} \times 2$ を入力する。

→第3音の弦の長さは、

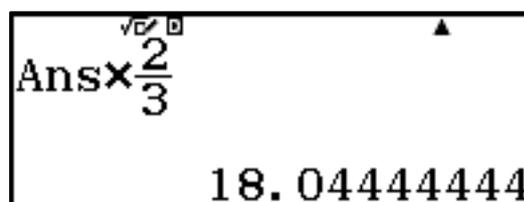
36.1cm

(3) 求めた第3音の弦の長さをもとに、第3音の音階を確認する。

確認方法は①と同様、チューナーを用いて確認する。

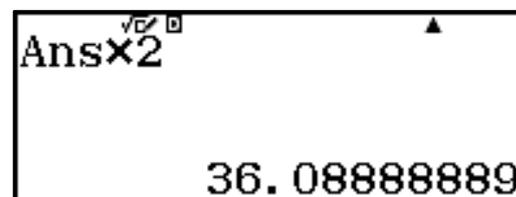
→第3音は「レ」

③第3音の弦の長さから第4音の弦の長さを求める。



Ans  $\times \frac{2}{3}$   
18.04444444

$\text{Ans} \times \frac{2}{3}$ を入力したときの関数電卓の画面



Ans  $\times 2$   
36.08888889

$\text{Ans} \times 2$ を入力したときの関数電卓の画面

(1) 第 3 音の弦の長さを $\frac{2}{3}$ 倍する

と、主音の弦の長さを 1 とし  
ているため、第 4 音の弦の長  
さは $\frac{16}{27}$

(2) 第 3 音の弦の長さを 2 倍し

て 3 で割るため、 $\text{Ans} \times \frac{2}{3}$ を

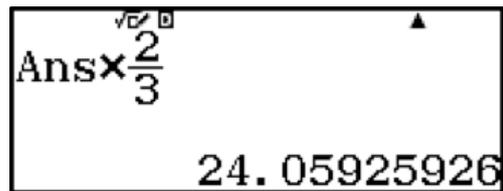
入力する。

→第 4 音の弦の長さは、  
24.1cm

(3) 求めた第 4 音の弦の長さをも  
とに、第 4 音の音階を確認す  
る。

確認方法は①と同様、チュー  
ナーを用いて確認する。

→第 4 音は「ラ」



$\text{Ans} \times \frac{2}{3}$ を入力したときの関数電卓の画面

「ド」(主音)の弦の長さからはじめて、関数電卓を用いて第 4 音の弦の長さま  
で求め、調律をおこないました。ピタゴラスの算定法で 1 オクターヴ上の「ド」  
が出てくるまで、調律をおこないましょう。

○1 オクターヴ上の「ド」が出てく  
るまで、上記手順と同様に、調律  
をおこなう。

・求めた弦の長さをワークシート  
【資料 3】に書き込む。



ピアノの鍵盤の写真

・具体的にどのような  
音階があるかを確認  
するため、ピアノの鍵  
盤の写真を掲示する。

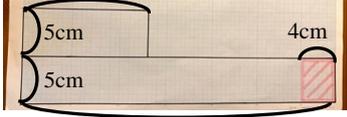
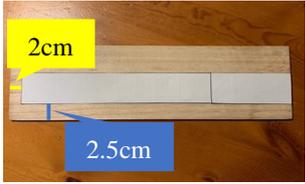
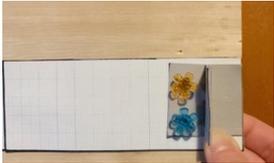
T: 関数電卓を用いて弦  
の長さを求めたら、  
ワークシート【資料  
3】に記入してくだ  
さい。

・机間巡視をしながら、  
学生の進捗状  
況を確認する。

・関数電卓を用いて、  
1 オクターヴ上の  
「ド」が出てくる  
までの調律が終わ  
った学生のところ  
にチューナーを持  
って行き、自分の  
目で見て、調律を  
おこなった音の音  
階を確認してもら  
う。

	<p>○関数電卓を用いて,1 オクターヴ上の「ド」が出てくるまでの調律が終わり次第, 調律をおこなった音の音階を, チューナーを用いて確認する。</p> <p>○主音から第 13 音までが, どの音に対応しているか確認する。 →主音がド, 第 2 音がソ, 第 3 音がレ, 第 4 音がラ, 第 5 音がミ, 第 6 音がシ, 第 7 音がファ#, 第 8 音がド#, 第 9 音がソ#, 第 10 音がレ#, 第 11 音がラ#, 第 12 音がファ, 第 13 音 (2 倍する前) が 1 オクターヴ上のドになっている。</p>	<p>T : 1 オクターヴ上の「ド」が出てくるまでの調律が終わった人は, 挙手をお願いします。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・全員が終わったところで主音から第 13 音までの 13 音に対応している音階を確認する。</li> </ul>	
ま と め	<p>○本時の振り返りをおこなう。</p> <p>○課題を確認する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・課題の説明をおこなう。</li> <li>・課題シート(【資料 4】)を配布する。</li> </ul>	
<p>[課題]</p> <p>第<math>x</math>音の弦の長さを求める際, 主音の弦の長さの半分の長さより小さくなった長さを 2 倍する操作の合計回数を<math>y</math>とするとき, 弦の長さを<math>x</math>, <math>y</math>を用いて表しなさい。また, 実際に求めた弦の長さと同じになっているのか, 関数電卓を用いてどのように確認したのか, かきなさい。</p>			

【資料 1】

モノコード作成過程		
<p>(1) 材料①の厚紙を縦 8cm, 横 4cm に切り, 以下の図 1 のように, 2cm ごとに線を引く。</p>  <p>図 1</p>	<p>(2) (1) の厚紙を以下の図 2 のように折り, 真ん中に切れ込みをいれる。</p>  <p>図 2</p>	<p>(3) 材料②の方眼紙を以下の図 3 の線に沿って切り, 赤色の斜線部分で重ねて貼り付け, 縦 5cm, 横 43cm の方眼紙を作成する。</p>  <p>図 3</p>
<p>(4) 材料③の爪楊枝を半分で切り, 尖っていない方の爪楊枝を右の図 4 のように, 材料④の釣り糸の両端に結びつける。</p>  <p>釣り糸に結びつけた爪楊</p>	 <p>図 4</p>	<p>(5) 材料⑤の木製の板の上に, 左端から 2cm, 下端から 2.5cm あけ, (3) で作った縦 5cm, 横 43cm の方眼紙を以下の図 5 のように置く。</p>  <p>図 5</p>
<p>(6) (1) (2) で作成した厚紙を, 以下の図 6 のように, 材料⑥の画鋏 2 つを使って, 板の右端に合わせるようにしてにつける。</p>  <p>図 6</p>	<p>(7) 材料⑦のプラスチックコップの穴に, (4) で作成した釣り糸を通す。</p>	
<p>(8) (7) で穴に釣り糸を通したプラスチックコップを, 以下の図 7 のように材料⑥の画鋏 1 つを使って, 板の左端につける。</p>  <p>2.4cm 図 7</p>	<p>(9) プラスチックコップと反対側の釣り糸を, (6) で設置した厚紙の切れ込みに引っ掛け, 弦の音を調整しながら (※), 釣り糸についている爪楊枝を板に貼り付ける。また, 以下の図 8 のように材料⑥画鋏 1 つを使って, 厚紙を固定する。</p> <p>※音の調整は, チューナーを用いておこなう。</p>  <p>釣り糸についている爪楊枝を板に貼り付ける 図 8</p>	



【資料3】

「ド」(主音)の弦の長さからはじめて、関数電卓を用いて第4音の弦の長さまで求め、調律をおこないました。ピタゴラスの算定法で1オクターヴ上の「ド」が出てくるまで、調律をおこないましょう。

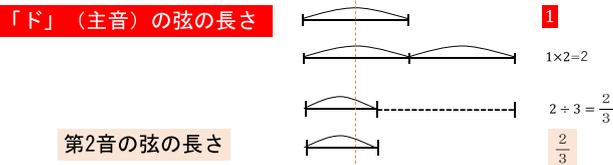
ピタゴラスの算定法

「ド」(主音)の弦の長さから第2音の弦の長さを求める

主音(基準となる音)を「ド」として、弦の長さを1とする。

「1オクターヴ上のド」の弦の長さは $\frac{1}{2}$ になる

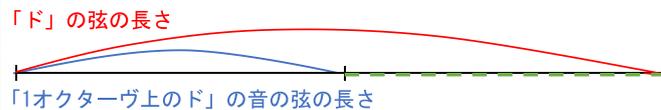
「ド」以外の音弦の長さは、 $\frac{1}{2}$ より長くなる



ピタゴラスの算定法

主音(基準となる音)を「ド」とすると

「ド」の弦の長さ : 「1オクターヴ上のド」の音の弦の長さ  
= 2 : 1



「ド」以外の音を1オクターヴ内につくるためには、「ド」以外の音弦の長さが「1オクターヴ上のド」の音の弦の長さより長くなる、つまり「ド」の弦の長さの半分より、長くなる必要がある。

音	音階	モノコードの弦の長さ
主音	ド	
第2音		
第3音		
第4音		



【資料 4】

[課題]

第 $x$ 音の弦の長さを求める際、主音の弦の長さの半分の長さより小さくなった長さを 2 倍する操作の合計回数を $y$ とするとき、弦の長さを $x$ 、 $y$ を用いて表しなさい。また、実際に求めた弦の長さと同じになっているのか、関数電卓を用いてどのように確認したのか、かきなさい。