

1. 東京都内国立大学工学系学部でのワークショップの概要

ここでは、東京都内国立大学工学系学部でのワークショップに向けた指導案立案、東京都内国立大学工学系学部でのワークショップの流れについて述べる。

1.1. 指導案立案

ワークショップは、棚澤作成『『ピタゴラス音律』の算定法に着目した数学ワークショップ指導案（略案）』をもとに実践している。ワークショップにおいて、学生らは、ピタゴラス音律の算定法をもとに、作成したモノコードと関数電卓を用いて、実際にモノコードを弾き、耳で確認した音律を、調律する。そして、学生自身が表した弦の長さを求める関数をもとに、関数電卓を用いて弦の長さを求め、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認する。ワークショップのテーマは、「関数電卓を用いて調律をしよう」であり、授業の目的は、関数電卓使用を前提とした授業の中で、数学を用いて調律する活動をおこない、どのような数学的な表現・処理が表出するかを、ワークシートをもとに調査することである。ここで、学生の数学的な表現は、学生自身が表した弦の長さを求める関数のことであり、処理は、学生らが、自身が表した弦の長さを求める関数をもとに、関数電卓のモードや機能を用いて、弦の長さを求めることである。ワークショップにおいて調律をおこなう際、関数電卓の「基本計算」モードのアンサーメモリーを用いて活動をおこなった。その後のワークショップの課題では、学生らが、自身が表した弦の長さを求める関数をもとに、関数電卓のモードや機能を用いて弦の長さを求め、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認する。このとき、用いる関数電卓のモードや機能は指定していない。これにより「基本計算」モードのアンサーメモリーとは異なった関数電卓の機能を用いて、課題を解決することを期待している。

1.2. 東京都内国立大学工学系学部でのワークショップの流れ

第1に、モノコードを作成する。モノコードを作る際に必要な材料は以下の材料①～⑦である（図1）。

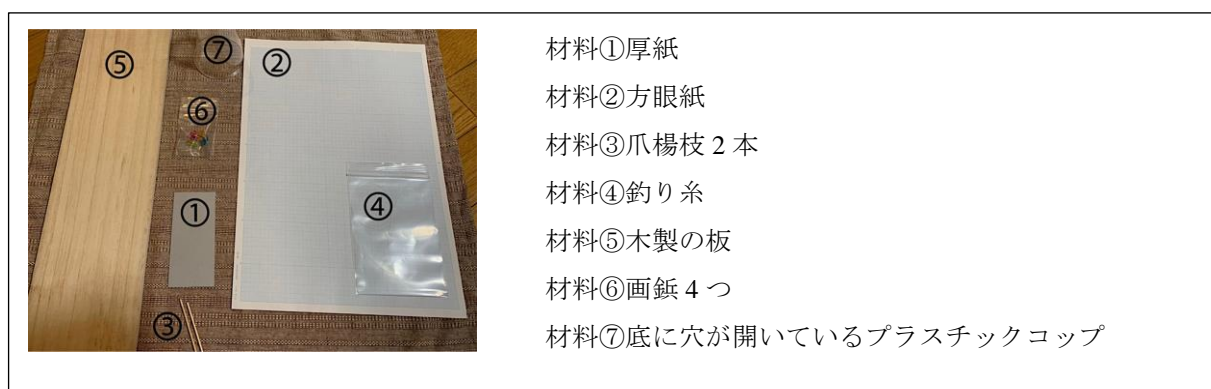


図1 モノコードの材料一覧

モノコードを作成し終わった学生から順に、チューナーを用いて、開放弦（弦のどこにも触れていない状態）の音が「ド」の音になるよう調整する。

第2に、耳で音律を確認する。作成したモノコードを用いて、実際に弦を鳴らし「ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シ・ド (1 オクターブ上)」の部分に印 (「×」) と音階を書く (図2)。図2は、印 (「×」) と「ソ」を書いたときのものである。琴柱と呼ばれる弦の長さを調整する木製の三角柱を左右に動かしながら、弦を弾いて音を確認する (図3)。

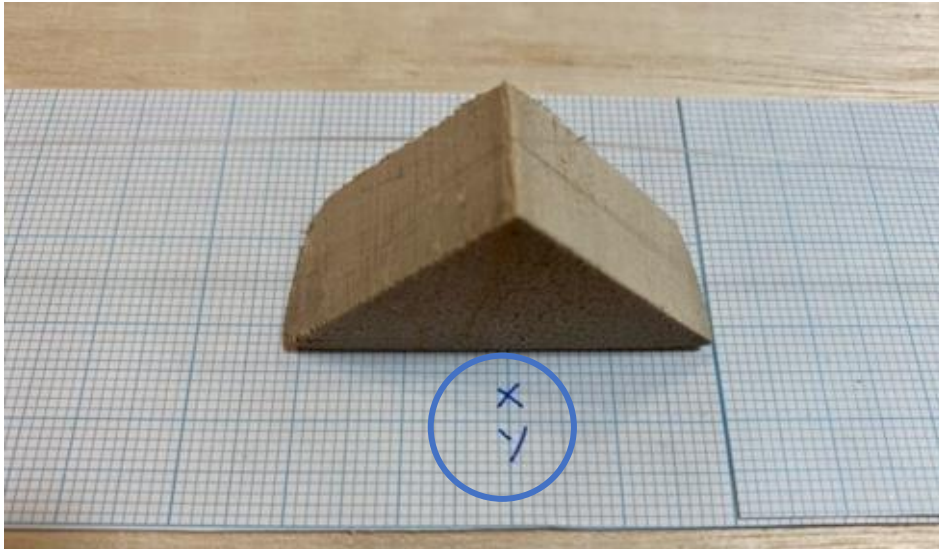


図2 印 (「×」) と「ソ」を書いたときのモノコード

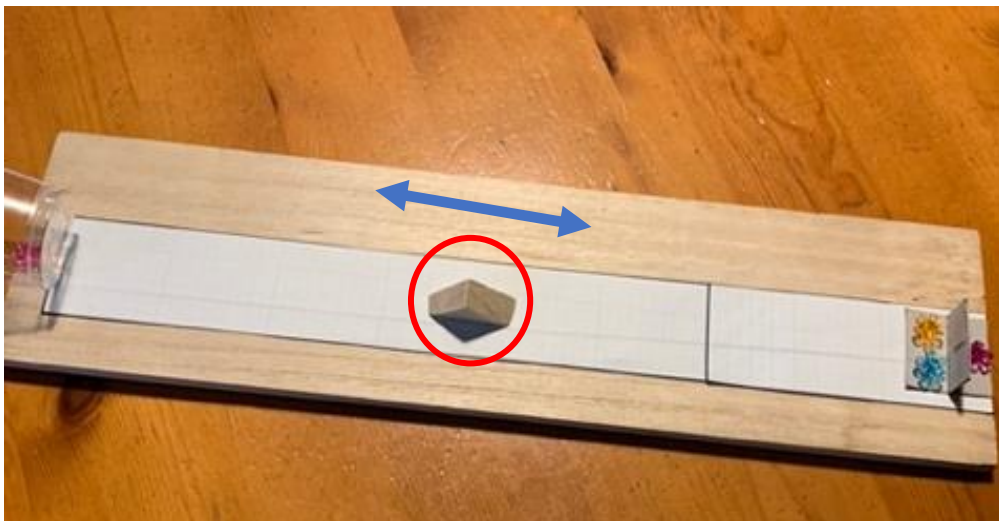


図3 琴柱の動かし方の説明

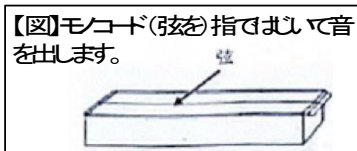
第3に、音律について知り、その後、ピタゴラス音律を題材とした問題 (図4) に触れ、ピタゴラス音律について知る。

出典『平成 24 年度中学生思考力チャレンジ大会問題』

チャレンジさんは、音楽の授業で、古代ギリシャのピタゴラスという人が「ドレミファソラシド」という音階を約 2600 年前に作ったことを知りました。

ピタゴラスは、弦を指ではじいて音を出す、モノコード（【図】）という楽器で、弦の長さを半分にすると、指ではじいたときの音が、1 オクターヴ高くなることを発見しました。

弦の長さを考えると、音の高さが変わります。弦の長さを短くすると音は高くなり、弦の長さを長くすると音は低くなります。



チャレンジさんは、この仕組みを使って「ドレミファソラシド」の弦の長さの割合を調べてみました。ここでは、基準となる音を「ド」とします。ピアノの鍵盤を利用して考えながら以下の問題に答えましょう。

(3) チャレンジさんは、ピアノの鍵盤を使って、弦の長さの割合と音の関係を表にまとめてみました。表中の基準音ドの音の弦の長さを1としたときの①～③の弦の長さの割合を求めましょう。

音名	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド	レ
弦の長さの割合	長さ 1	①		②	$\frac{2}{3}$	③		$\frac{1}{2}$	

図 4 ピタゴラス音律を題材とした問題

第 4 に、ピタゴラスの算定法について知る。

第 5 に、ピタゴラスの算定法における弦の長さの求め方を確認し、関数電卓を用いてモノコードの弦の長さを求め、調律する。ピタゴラスの算定法をもとに、モノコードの弦の長さを求める。弦の長さを求める際には、主音を「ド」とし、以下の①から③を主音から第 4 音までの弦の長さが求まるまで、繰り返しおこなう；

- ①ピタゴラス音律の算定法を確認する。このとき、主音の弦の長さを 1 とする。
- ②関数電卓の「基本計算」モードのアンサーメモリーを利用して、第 2 音の弦の長さを求める。このとき、主音の弦の長さは、モノコードの開放弦の長さとなる。
- ③求めた第 2 音の弦の長さをもとに、モノコードで実際に音を鳴らし、チューナーを用いて音を確認する。

第 6 に、上記①から③を、第 5 音から 1 オクターヴ上の「ド」が出てくるまで、繰り返しおこなう。学生は、求めた弦の長さをワークシート（資料 3、指導案参照）に書き込む。関数電卓を用いて、1 オクターヴ上の「ド」が出てくるまでの調律が終わった学生は、チューナー

を用いて、調律した音の音階を確認する。

第7に、以下の課題を確認する（資料4，指導案参照）。

[課題]

第 x 音の弦の長さを求める際、主音の弦の長さの半分の長さより小さくなった長さを2倍する操作の合計回数を y とすると、弦の長さを x 、 y を用いて表しなさい。また、実際に求めた弦の長さと同じになっているのか、関数電卓を用いてどのように確認したのか、かきなさい。

2. 東京都内国立大学理工系学部でのワークショップの実際

ここでは、東京都内国立大学理工系学部でのワークショップの報告をおこなう。実施日は、2021（令和3）年9月8日であり、対象は、東京都内国立大学理工系学部の教員を志望している学生8名である。インストラクターは筆者である。

学生らは、ピタゴラス音律の算定法をもとに、作成したモノコードと関数電卓を用いて調律した（図5，6）。そして課題（資料4，指導案参照）において、学生は、自身が表した弦の長さを求める関数をもとに、関数電卓を用いて弦の長さを求め、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認した。ここでは、学生らが、確認の際に用いた関数電卓のモードや機能に着目して、学生の課題解決の実際を報告する。



図5 関数電卓を用いて弦の長さを求めている学生

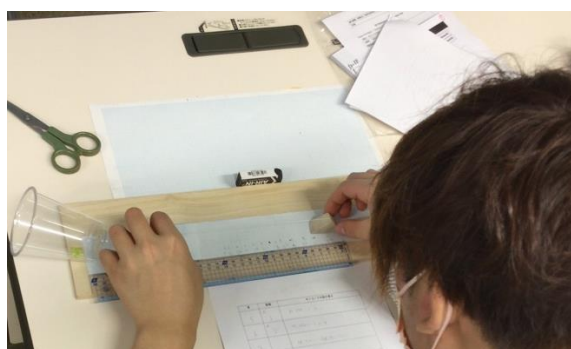


図6 求めた弦の長さをもとに音を確認する学生

弦の長さを求める関数を表した学生は7名であり、そのうち、自身が表した関数をもとに、関数電卓を用いて弦の長さを求め、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認することができる関数を表した学生は6名であった。この学生6名が表した弦の長さを求める関数は、以下の2つに分類することができる；

関数① 基準となる音である主音から順に、弦の長さを2倍して3で割る計算と、求めた弦の長さが主音の半分の長さより短い場合には、さらに2倍するという計算を分けて表している関数

関数② 基準となる音である主音から順に、弦の長さを2倍して3で割る計算と、求めた弦の長さが主音の半分の長さより短い場合には、さらに2倍するという計算を1つにまとめて表している関数

ここでは、学生らが、確認する際に用いた関数電卓のモードや機能とその使用方法に着目して、関数①、関数②について述べる。

2.1. 関数①について

関数①は、すべて以下のような関数であった。 L_x を、第 x 音の弦の長さ、 L を主音の弦の長さとする。また、ワークショップで作成したモノコードの開放弦の長さは 40.6cm であったため、 $L = 40.6$ である。

$$L_x = L \times \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \times 2^y \quad \dots (1)$$

この関数をもとに、関数電卓を用いて弦の長さを求め、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認した際、「基本計算」モードのカルク機能を用いた学生が 2 名、「基本計算」モードのアンサーメモリーを利用した学生が 1 名、「表計算」モードを用いた学生が 1 名あった。

ここでは、「基本計算」モードのカルク機能を用いた確認方法と「表計算」モードを用いた確認方法について述べる。まず、学生 TM の記述内容をもとに、「基本計算」モードのカルク機能を用いた確認方法について述べる(図7)。「基本計算」モードを選択した後、 $L = 40.6$ とした(1)を入力する。その後、**CALC**を押下し、 $x=1$ 、 $y=0$ を入力すると、出力結果が、主音の弦の長さである 40.6 になる。次に、第 2 音の弦の長さを求めるために、**CALC**を押下し、 $x=2$ 、 $y=0$ を入力する。出力結果である 27.0666667 が、第 2 音の弦の長さになる(図8)。

(1) $40.6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \times 2^y$ [cm] 2' 5' 2' 5' 4' 3

実際に求めた弦の長さは、以下の表になる。

第何音	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
長さ [cm]	27.1	36.1	24.1	32.1	21.4	28.5	36.0	25.3	33.8	22.5	30.0	20.0

関数電卓と上のワークを用いて、(1)を確認する。
 31. 3はxに依存し、以下のようになる。

$$y = \begin{cases} 0 & (x=2) & 5 & (x=10, 11) \\ 1 & (x=3, 4) & 6 & (x=12, 13) \\ 2 & (x=5, 6) \\ 3 & (x=7) \\ 4 & (x=8, 9) \end{cases}$$

関数電卓の操作手法

モード: 基本計算モード
 入力: 40.6 \times $\left(\frac{2}{3}\right)$ \square^{x-1} $\square \times 2$ \square^{y} \square **CALC**

出力: $x=2, y=0 \dots 27.06\dots$, $x=3, y=1 \dots 36.08\dots$, $x=4, y=1 \dots 24.05\dots$,
 $x=5, y=2 \dots 32.07\dots$, $x=6, y=2 \dots 21.38\dots$, $x=7, y=3 \dots 28.51\dots$,
 $x=8, y=4 \dots 38.01\dots$, $x=9, y=4 \dots 25.34\dots$, $x=10, y=5 \dots 33.79\dots$,
 $x=11, y=5 \dots 22.53\dots$, $x=12, y=6 \dots 30.04\dots$, $x=13, y=6 \dots 20.02\dots$

図7 学生 TM の記述内容

$$40.6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \times 2^y$$

$$27.06666667$$

図8 $x=2, y=0$ を入力した後の関数電卓画面

第3音, 第4音, ...と, 順に弦の長さを求める際, x に $x=3, x=4...$ と順に値を入力し, 出力結果が主音の弦の長さの半分の値である 20.3 よりも小さくなった場合に, y を 1 増加した値を入力する。上記手順を繰り返しおこない, 出力結果と調律する中で求めた弦の長さが同じになっていることを確認する。

次に, 学生 YM の記述内容 (図9) をもとに, 「表計算」モードを用いた確認方法について述べる。

$$l_{x,y} = l_{1,0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \times 2^y$$
 ただし, $l_{1,0}$ は主音の弦の長さ 40.600 [cm] である。

- 表計算モードに切り替える。45行5列の表が表示される。(取扱説明書 p.44)
- A1セルに「40.6」を入力する。
- A2:A13の範囲に「A1×(2/3)」を入力する。(一括入力(数式), OPTN 7.)
ただし, セルの参照は相対参照であり, 式を入力するのは左上端のA2セルを基準とした相対参照名である。
- B1:E13の範囲に「A1×2」を入力する。(一括入力(数式))
- $1 \leq x \leq 12$ のとき, 中央行の50のデータのうち, $\frac{1}{2}l_{1,0}$ 以上 $l_{1,0}$ 以下のものが1つだけあり, それが $l_{x,y}$ である(中央7列である)。
しかし, $y+1 > 5$ のとき5列の表は $l_{x,y}$ は入らず, そのため, 最初 $y=5$ (すなわち $l_{x,4} < \frac{1}{2}l_{1,0}$) とする $x=10$ で表から読み出すので, A10セルを「E9×(2/3)」と編集する。(セルの編集, OPTN 3)
これに対し, $x \geq 10$ のとき, 2行 $y-3$ 列のセルの値が $l_{x,y}$ となる。
 $y-3 > 5$ となった場合は上と同じ処理を繰り返してよい。
- $x=13$ のとき, $l_{13,7} \approx l_{1,0}$ となることがわかるので, その場合である $l_{13,6} = 20.026$ が「1779-T上のド」の弦の長さとなる。

図9 学生 YM の記述内容

学生 YM の記述内容をもとに, 以下の操作手順で, 弦の長さを求める。第1に, 「表計算」モードを選択した後 (図10), セルA1に「40.6」を入力する (図11)。



図 10 「表計算」モードを選択するときの関数電卓画面

	A	B	C	D
1	40.6			
2				
3				
4				

図 11 セル A1 に「40.6」を入力したときの関数電卓画面

第 2 に、セル A2 からセル A13 に、「 $A1 \times \frac{2}{3}$ 」を一括入力する（図 12, 13）。一括入力は、**OPTN** を押下した後、**1** を押下する。

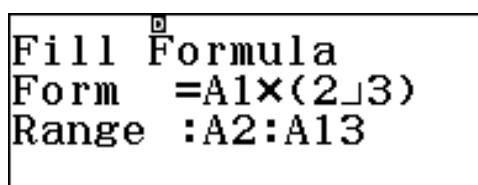


図 12 「 $A1 \times \frac{2}{3}$ 」を一括入力する前の関数電卓画面

	A	B	C	D
1	40.6			
2	27.066			
3	18.044			
4	12.029			

=A1*(2/3)

図 13 「 $A1 \times \frac{2}{3}$ 」を一括入力した後の関数電卓画面

第 3 に、セル B1 からセル E13 に、「 $A1 \times 2$ 」を一括入力する（図 14）。学生 YM が記述しているように、 $1 \leq x \leq 12$ において、第 x 行の 5 つのデータのうち、20.3 以上 40.6 以下のものが 1 つだけあり、それが第 x 音の弦の長さとなる。表計算での計算結果より、第 3 音の弦の長さが 36.088 であることがわかる（図 15）。

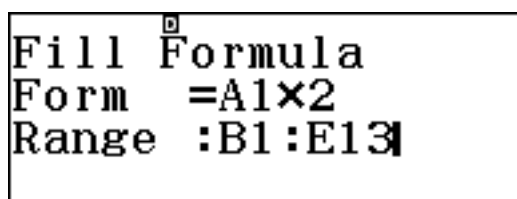


図 14 「 $A1 \times 2$ 」を一括入力する前の関数電卓画面

	A	B	C	D
1	40.6	81.2	162.4	324.8
2	27.066	54.133	108.26	216.53
3	18.044	36.088	72.177	144.35
4	12.029	24.059	48.118	96.237

=A3×2

図 15 「A1×2」を一括入力した後の関数電卓画面

第 4 に、「表計算」モードでは、45 行×5 列の表が表示される。学生 YM が記述しているように、 $y+1 > 5$ のとき 5 列の表に L_x は入らない。つまり、 $y=5$ となる $x=10$ のとき、20.3 以上 40.6 以下となるデータが、第 10 行の 5 つのデータの中にないため、セル A10 を「 $E9 \times \frac{2}{3}$ 」と編集する (図 16)。その際、**OPTN** を押下した後、**3** を押下する。

	A	B	C	D
9	1.5841	3.1682	6.3365	12.673
10	16.897	33.795	67.59	135.18
11	11.265	22.53	45.06	90.12
12	7.51	15.02	30.04	60.08

=E9×(2/3)

図 16 「 $E9 \times \frac{2}{3}$ 」と編集した後の関数電卓画面

以上の操作手順をおこない、出力結果と調律する中で求めた弦の長さが同じになっていることを確認する。

学生 HH が記述した確認方法は、ワークショップにおいて課題を提示する前に学生が調律する中でおこなった、「基本計算」モードのアンサーメモリーを利用した弦の長さの求め方と同様の方法である (図 17)。

始めの弦の長さを l_0 とすると、第 x 音の弦の長さ l_x は、

$$l_x = l_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot 2^y \dots (\star)$$

こゝを確認するために、弦の長さ(今回は 406mm)に $\frac{2}{3}$ をかけた、

$$\boxed{A} \boxed{0} \boxed{6} \boxed{\times} \boxed{\frac{2}{3}} \boxed{2} \boxed{右} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{=} \dots (1)$$

こゝにより示された値は弦の長さの半分(203)を上回る 271 であった。
 次に、今の値にさうに $\frac{2}{3}$ をかけるため、以下の操作をした。

$$\boxed{Ans} \boxed{\times} \boxed{\frac{2}{3}} \boxed{2} \boxed{右} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{=} \dots (2)$$

こゝにより示された値は弦の長さの半分を下回ったので、2倍した。

$$\boxed{Ans} \boxed{\times} \boxed{2} \boxed{=} \dots (3)$$

こゝ以降、操作(2)を続け、示された値が弦の長さの半分を下回った
 ときのみ、操作(3)を繰り返した。
 すると、第 x 音をおめるまでの操作(2)の回数 y は、帰納的に $(x-1)$ 回
 であることがわかった。また、操作(3)の回数 z とすれば、
 (\star) の式は正しいといえる。

図 17 学生 HH の記述内容

2.2. 関数②について

関数②は、以下のような関数であった。 L_x を、第 x 音の弦の長さ、 L を主音の弦の長さとする。

$$L_x = 2^{x+y} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x \times L$$

$$L_x = \frac{2^{x+y-1}}{3^{x-1}} \times L \dots (2)$$

これらの関数を表した学生 2 名は、これらの関数をもとに、関数電卓を用いて弦の長さを求めた。また、学生 2 名は、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認した際に用いた関数電卓のモードや機能について、記述していなかった。

3. 東京都内国立大学理工系学部でのワークショップの実践をしてみても

ワークショップにおいて、学生らは、ピタゴラス音律の算定法をもとに、作成したモノコードと関数電卓を用いて調律した。そして自身が表した弦の長さを求める関数をもとに、関数電卓を用いて弦の長さを求め、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認した。学生らが表した弦の長さを求める関数は、次の 2 つに分類される：関数①基準となる音である主音から順に、弦の長さを 2 倍して 3 で割る計算と、求めた弦の長さが主音の半分の長さより短い場合には、さらに 2 倍するという計算を分けて表している関数、関数②基

準となる音である主音から順に、弦の長さを2倍して3で割る計算と、求めた弦の長さが主音の半分の長さより短い場合には、さらに2倍するという計算を1つにまとめて表している関数。関数①については、この関数をもとに、関数電卓を用いて弦の長さを求め、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認する方法として、「基本計算」モードのカルク機能を用いた方法、「基本計算」モードのアンサーメモリーを利用した方法、「表計算」モードを用いた方法の3つの方法が見られた。一方、関数②については、関数電卓のモードや機能を用いた確認方法が見られなかった。

関数①について「表計算」モードを用いた方法では、関数電卓で求めた複数の結果を一画面で確認することができるため、1オクターヴの中に主音の「ド」と異なった音を作るための条件であった「主音の弦の長さの半分以下」という条件を満たしているかを確認しやすくなっている。また、学生YMは $y+1 > 5$ のとき5列の表に L_x は入らないと、「表計算」モードを用いた方法の問題点をあげた上で、その問題を解決する方法がワークシートの記述内容より見受けられた。

以上のように、本実践から2点が明らかとなった。1点目は、学生がピタゴラス音律の算定法をもとに表した、弦の長さを求める関数は、1通りではないということである。2点目は、「基本計算」モードのアンサーメモリーとは異なった関数電卓の機能を用いて、課題を解決することもできるということである。学生は、自身が表した弦の長さを求める関数をもとに、関数電卓を用いて弦の長さを求め、調律する中で求めた弦の長さと同じになっていることを確認した。その際に学生が用いた関数電卓のモードや機能は、「基本計算」モードのアンサーメモリーのほか、「基本計算」モードのカルク機能や「表計算」モードなどが挙げられる。