埼玉県内国立大学附属高等学校での実践報告

棚澤　日菜子

１．埼玉県内国立大学附属高等学校での授業の概要

ここでは，埼玉県内国立大学附属高等学校での授業に向けた指導案立案，埼玉県内国立大学附属高等学校での授業の流れについて述べる。

1.1. 指導案立案

授業は，棚澤作成「対数目盛を用いた線形変換に関する数学授業指導案（略案）」をもとに実践している。授業において，生徒らは，自身が点をプロットした片対数グラフと，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想する。そして，線形であるとみなすために必要な根拠は何かについて考察する。授業のテーマは，「関数電卓を使って貯金計画を立てよう」であり，授業の目的は，米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題 SAT math test Question 4 of 28 をもとに，関数電卓を用いて，次の 2 点について明らかにすることである。1 点目は，生徒らが，自身が点をプロットした片対数グラフと，関数電卓（カシオ計算株式会社 fx-JP900-N）の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとに，y 軸を対数目盛に変更したことで，曲線で表されていたグラフの変化をどのように予想したのかである。2 点目は，生徒らはどのような根拠をもとに線形であるとみなしたのかである。授業では，生徒らが，自身が点をプロットした片対数グラフと，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとに，y 軸を対数目盛に変更したことで変化したグラフの概形と，線形であるとみなすために必要な根拠は何かについて考察することができることを期待している。また，授業で扱っている米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題 SAT math test Question 4 of 28 は，指数関数を用いて解決することができるが，指数関数のグラフでは，x が 1 増加することに伴う y の増加量が大きいため，年度ごとの変化を確認することが難しい。そこで，指数関数の常用対数をとると，x の値が 1 増加したときの $\log_{10}y$ の値の増加量が，y の増加量よりも小さくなるため，年度ごとの変化が確認し易くなる。このことから，生徒らが指数関数の常用対数をとることの意義を実感することも期待している。

1.2. 埼玉県内国立大学附属高等学校での授業の流れ

授業は，2 時間（45 分×2）で計画・実施した。1 時間目では，第 1 に，米国の標準テスト SAT の The SAT Math Test のサンプル問題である SAT math test Question 4 of 28 の内容（図 1）を把握する。また，問題の内容より，口座の残高が 2 倍になるということは，口座の残高が 1000 ドルになるということを確認する。第 2 に，年数を x，口座の残高を y とし，口座の残高を求める式を x と y を用いて表す。口座の残高を求める式は，以下のような指数関数で表される。

$$y = 500\times(1.05)^x \quad (x：0 \text{以上の整数})$$

また，上記の指数関数をグラフで表すと以下のような曲線で表される（図 2）。図 2 のグラフを y 軸付近で拡大した場合，x の値が 0 から 1 増加すると，y は 25 増加しており（図 3），x の値が増加すると，y の値は急激に増加している。そのため，年度ごとの変化を確認することが難しい。

SAT math test Question 4 of 28

Alison deposits $500 into a new savings account that earns 5 percent interest compounded annually. If Alison makes no additional deposits or withdrawals, how many years will it take for the amount in the account to double?

選択肢　　A：14　B：15　C：19　D：20　E：21

問題：

アリソンは 500 ドルを，年 5%の複利で利息がつく新しい普通預金口座に預けました。もし，アリソンが預金を追加したり引き出したりしない場合，口座の残高が 2 倍になるには何年かかるでしょうか？

図 1　サンプル問題 SAT math test Question 4 of 28 の内容

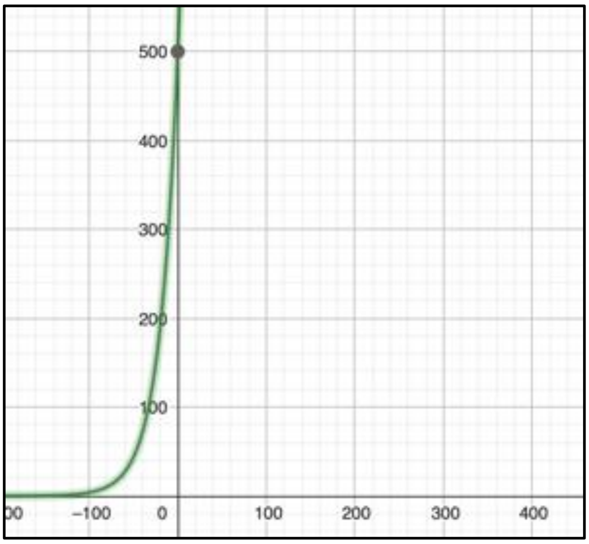


図 2　$y = 500\times(1.05)^x$ のグラフ

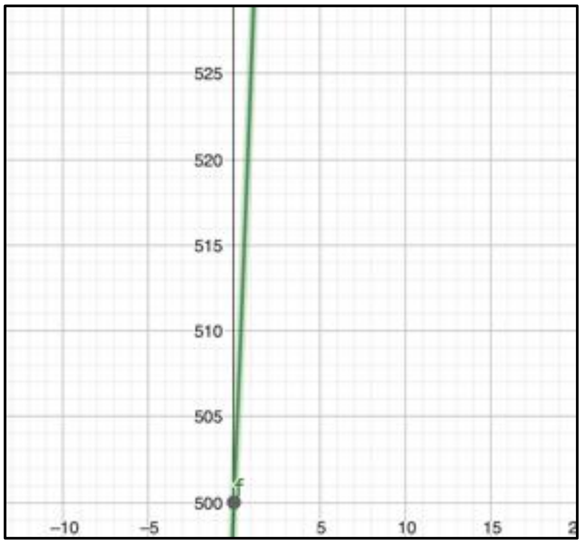


図 3　$y = 500\times(1.05)^x$ のグラフを y 軸付近で拡大したグラフ

そこで，$y = 500\times(1.05)^x$ の両辺の常用対数をとると，x，y，$\log_{10}y$ の値は以下のようになり（表 1），x の値が 1 増加したとき，$\log_{10}y$ の値の増加量は，y の増加量よりも小さくなるため，年度ごとの変化が確認し易くなる。第 3 に，$y = 500\times(1.05)^x$ の両辺の常用対数をとる。第 4 に，生徒らは，x と y の値の常用対数をもとに，片対数グラフに点をプロットする。その際，縦軸は口座の残高，横軸は年数をとる。第 5 に，x の値と y の値をもとに，点をプロットした片対数グラフをもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想する。予想したグラフの概形とそのように予想した理由をワークシート（資料 1，指導案参照）に記述する。

表 1　x の値，$\log_{10}y$ の値，$\log_{10}y$ の値の増加量をまとめた表

x	$\log_{10}y$ の値	$\log_{10}y$ の値の増加量
1	2.720159303	—
2	2.741348602	0.021189299
3	2.762537902	0.021189300
4	2.783727201	0.021189299
5	2.8049165	0.021189299
…	…	…

第 6 に，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数 2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）の結果をもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想する。予想したグラフの概形とそのように予想した理由をワークシート（資料 2，指導案参照）に記述する。

2 時間目では，第 1 に，生徒らは 1 時間目の振り返りをおこなう。具体的には，次の 2 点である。1 点目は，x の値と y の値をもとに，点をプロットした片対数グラフをもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかである。2 点目は，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数 2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）の結果をもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかである。第 2 に，生徒らは，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフが線形であるとみなす根拠を探す。点をプロットした片対数グラフ，データの並び，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数 2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）結果，ワークシートの記述内容をもとに，線形であるとみなすための根拠について考察し，ワークシート（資料 3，指導案参照）に記述する。点をプロットした片対数グラフについては，片対数グラフに点をプロットすると，線形になっているように見えることを根拠として線形とみなす。データの並びについては，x の値と $\log_{10}y$ の値に着目すると，$\log_{10}y$ の値の増加量がほぼ一定である。このことから，変化の割合もほぼ一定となるため（表 1），x の値と，$\log_{10}y$ の値の変化の割合が一定であることを根拠として線形とみなす。関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数 2 次回帰計算（$y = a + bx + cx^2$）の結果については，出力結果をもとに，x^2 の係数（c の値）に着目すると，-7.14285×10^{-11} であり（図 4），限りなく 0 に近い値となっている。出力結果をもとに，2 次関数で表すと，以下のような式になる。

$$\log_{10}y = -7.14285\times10^{-11}x^2 + 0.0211892997x + 2.698970003$$

このことから x^2 の係数（c の値）が，-7.14285×10^{-11} であり，限りなく 0 に近い値であることを根拠として線形とみなす。

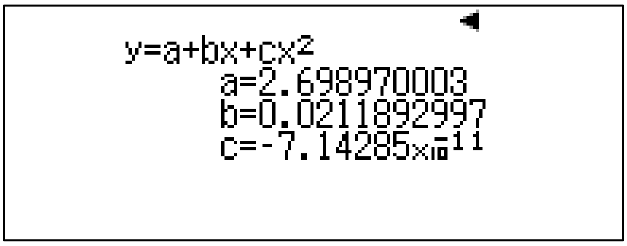


図 4　関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）2 次回帰計算結果

第 3 に，y 軸を対数目盛に変更したことにより，様々な根拠で曲線で表されていたグラフが線形とみなせることを確認する。

第 4 に，サンプル問題 SAT math test Question 4 of 28 の問題を解決する。関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）2 次回帰計算結果より，y 軸を対数目盛に変更したことで，曲線で表されていたグラフが線形変換され，線形とみなすことができる。これより，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）1 次回帰計算をおこない，線形変換された口座残高を求める関数を式で表す。関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）1 次回帰計算結果より，y = a + bx において，a = 2.698970004，b = 0.0211892993 となっているため（図 5），以下のような 1 次関数で表すことができる。

$$\log_{10}y = 0.0211892993x + 2.698970004 \ldots（＊）$$

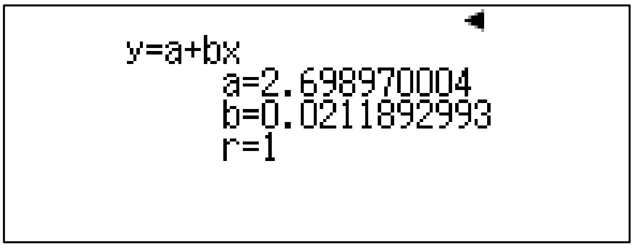


図 5　関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x , y）1 次回帰計算結果

口座の残高が 2 倍になる年数を求めるため，関数電卓の「基本計算」モードのソルブ機能を用いて，式（＊）の y に 1000 を代入する。x = 14.20669894 と表示されるため，口座の残高が 2 倍になるのは 15 年後である。ここで，指数関数で求めた解答（図 6）より，x = 14.20669908 と表示されるため，口座の残高が 2 倍になるのは 15 年後である。よって，正しい選択肢は B となる。

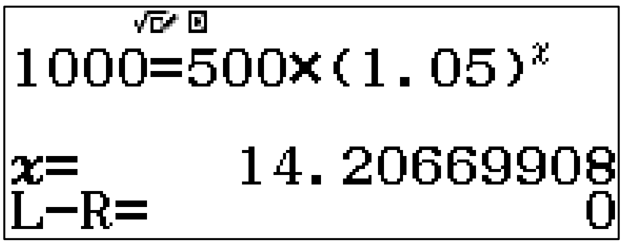


図 6　指数関数 $y = 500\times(1.05)^x$ で求めた解答

第 5 に，以下の課題を確認する（資料 4，指導案参照）。

> ［課題］
> 直線であるとみなすための根拠のうち，最も必要であると考える根拠を 1 つ選び，その理由を記述しなさい。

２．埼玉県内国立大学附属高等学校での授業の実際

ここでは，埼玉県内国立大学附属高等学校での授業の報告をおこなう。実施日は，2023（令和 5）年 1 月 17 日であり，対象は，埼玉県内国立大学附属高等学校第 3 学年の生徒 18 名である。授業者は筆者である。以下では，グラフの概形の予想と線形であるとみなす根拠に焦点をあてる。

2.1. 生徒らが記述した y 軸の目盛を対数目盛としたグラフの概形の予想

ここでは，埼玉県内国立大学附属高等学校の生徒らが点をプロットした片対数グラフと，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとに記述した y 軸の目盛を対数目盛としたグラフの概形の予想について述べる。

2.1.1. 点をプロットした片対数グラフをもとにしたグラフの概形の予想

生徒 18 名のうち，点をプロットした片対数グラフをもとに，y 軸の目盛を対数目盛としたグラフの概形を予想した生徒は 10 名であり，生徒 8 名は記述なしであった。グラフの概形を予想した生徒 10 名のうち，線形になると予想した生徒は 6 名であった。また，線形に近いグラフになると予想した生徒が 4 名であった。例えば，生徒 TM は，y 軸の目盛を対数目盛とすることにより，曲線で表されていたグラフの概形がどのように変化したかについて「もともとは，急な右上がりだったが，ゆるやかな右上がり」になると予想している（図 7）。

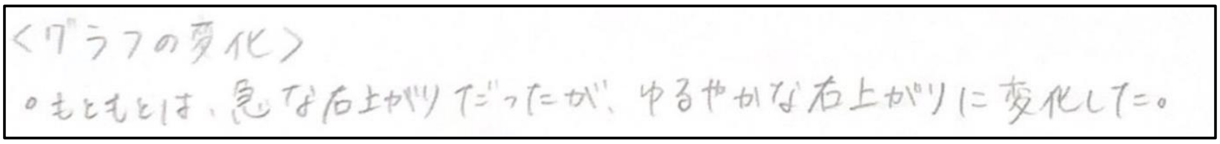

<グラフの変化>
・もともとは、急な右上がりだったが、ゆるやかな右上がりに変化した。

図 7　生徒 TM が片対数グラフをもとにグラフの概形を予想した記述内容

さらに，生徒 TM は，年数が 10 年以上になる場合についても記述しており，y 軸の目盛を対数目盛とする前と後のグラフの概形の図も記述している（図 8）。

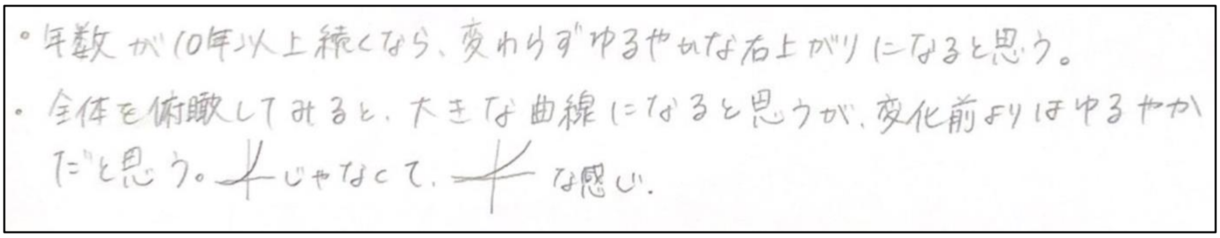
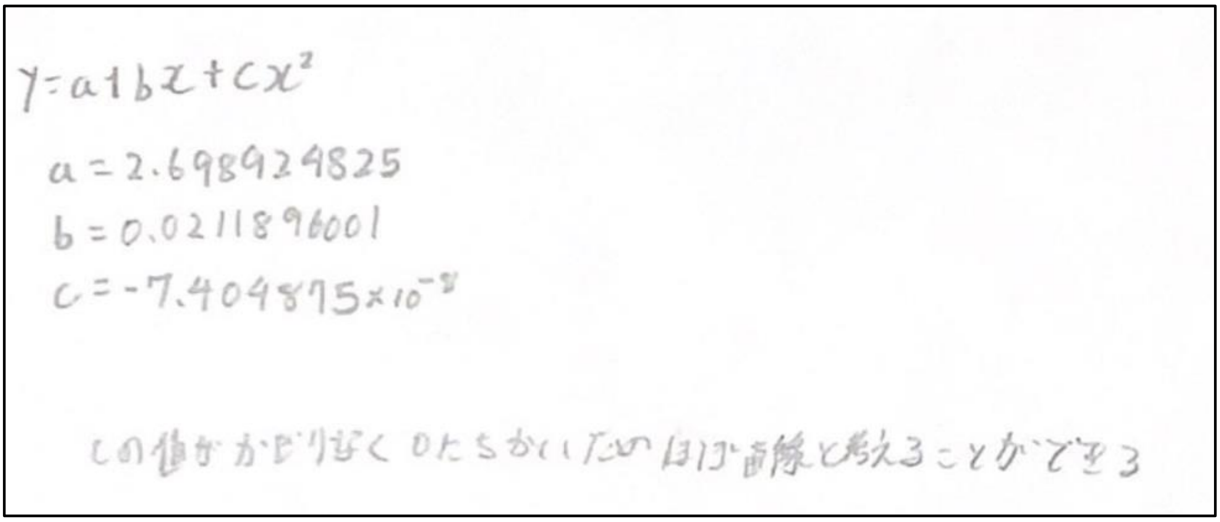

・年数が10年以上続くなら、変わらずゆるやかな右上がりになると思う。
・全体を俯瞰してみると、大きな曲線になると思うが、変化前よりはゆるやかだと思う。じゃなくて、な感じ。

図 8　生徒 TM が記述したグラフの概形を表した図と予想したグラフの概形

2.1.2. 関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとにしたグラフの概形の予想

生徒 18 名のうち，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとに，y 軸の目盛を対数目盛としたグラフの概形を予想した生徒は 6 名であり，生徒 12 名は記述なしであっ

た。グラフの概形を予想した生徒 6 名のうち，線形になると記述した生徒は 5 名であり，線形に近いグラフになると予想した生徒は 1 名であった。生徒 ND は，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x, y）2 次回帰計算結果より，「C の値がかぎりなく 0 にちかいためほぼ直線と考えることができる」と記述している（図 9）。また，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x, y）2 次回帰計算をおこなっていることにより曲線（放物線）になると答えた生徒が 1 名であった。


$y=a+bx+cx^2$

$a=2.698924825$

$b=0.0211896001$

$c=-7.404875\times10^{-8}$

Cの値がかぎりなく0にちかいためほぼ直線と考えることができる

図 9　生徒 ND が関数電卓の「統計計算」モードによる
2 変数（x, y）2 次回帰計算結果をもとにグラフの概形を予想した記述内容

2.2. 生徒らが記述した線形であるとみなすための根拠

線形であるとみなすための根拠を，以下の 4 つのタイプに分類する；

根拠①　片対数グラフをもとにした根拠

根拠②　データの並びをもとにした根拠

根拠③　関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとにした根拠

根拠④　上記 3 つのタイプ以外の根拠

2.2.1. 根拠①

生徒 4 名が記述しており，点をプロットした片対数グラフより，視覚的に線形であると判断する根拠であった。生徒 KY は「片対数グラフは値が大きくなるにつれ，y 軸のマス目が小さくなるので，普段使っているグラフが急な右上がりなものでも，片対数グラフを使用すれば直線であることが分かる」と記述している（図 10）。

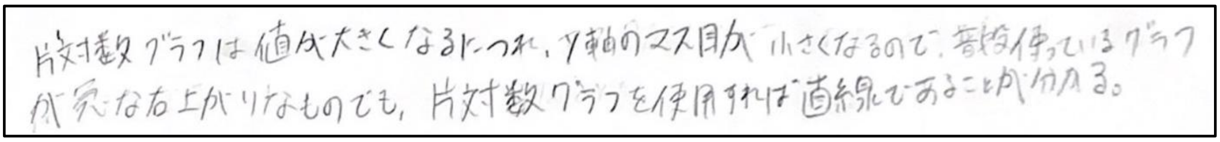

片対数グラフは値が大きくなるにつれ，y軸のマス目が小さくなるので，普段使っているグラフが急な右上がりなものでも，片対数グラフを使用すれば直線であることが分かる。

図 10　生徒 KY が記述した線形であるとみなすための根拠

2.2.2. 根拠②

根拠②の根拠を生徒 2 名が記述していた。生徒 TM は「$\log_{10}$（$500\times(1.05)^x$）は，x が 1 増えるごとに，$\log_{10}y$ は 0.021189299 ずつ増えている。つまり，変化の割り合いがほぼ一定=グラ

フが直線であると言える（原文ママ）」と記述しており（図 11），x の値と $\log_{10}y$ の値について変化の割合がほぼ一定であるため線形であると判断する根拠であった。

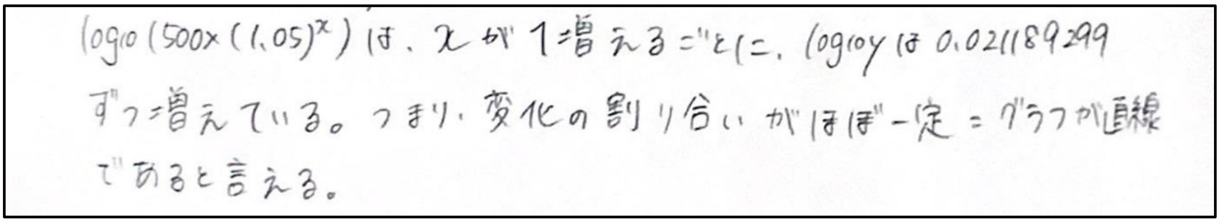

$\log_{10}(500\times(1.05)^x)$ は、x が 1 増えるごとに、$\log_{10}y$ は 0.021189299 ずつ増えている。つまり、変化の割り合いがほぼ一定＝グラフが直線であると言える。

図 11　生徒 TM が記述した線形であるとみなすための根拠

2.2.3. 根拠③

生徒 2 名が記述しており，生徒 2 名全員が，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x, y）2 次回帰計算結果において，x^2 の係数（c の値）が限りなく 0 に近い値となっていることが線形であるとみなすための根拠であると記述していた。例えば，生徒 IH は「y＝a＋bx ＋ cx^2 の式において，グラフが直線だと言えるためには，b と c もしくは c の値がかぎりなく 0 に近い必要がある」と記述しており，また，「c＝ −7.40×10^{-8} は，かぎりなく 0 に近いと言える」と記述していることから（図 12），x^2 の係数（c の値）に着目していることがわかる。

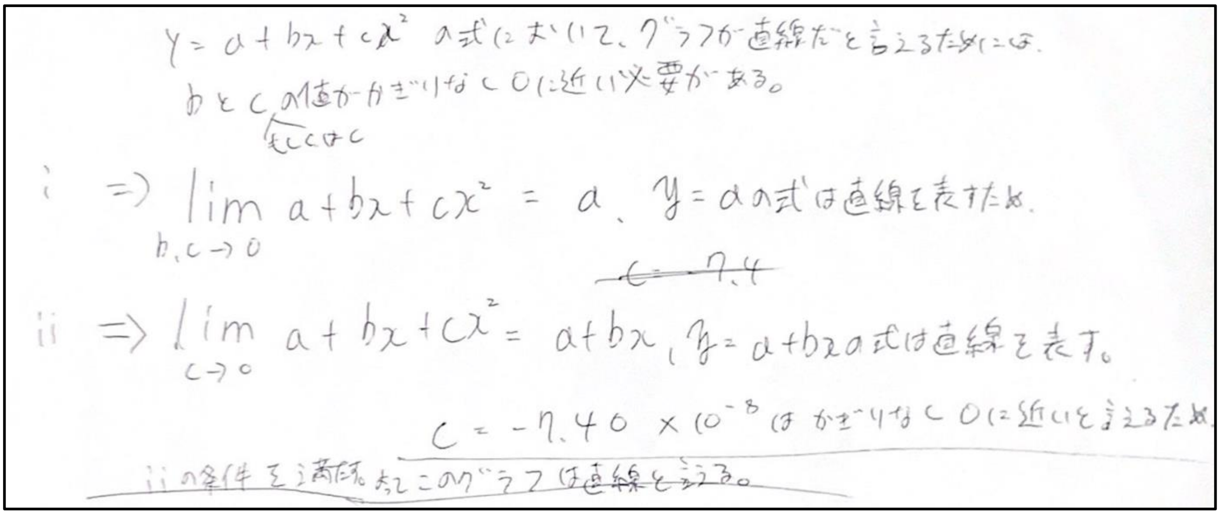

$y = a + bx + cx^2$ の式において、グラフが直線だと言えるためには、b と c の値がかぎりなく 0 に近い必要がある。
もしくは c
i ⇒ $\lim_{b,c\to 0} a+bx+cx^2 = a$、$y=a$ の式は直線を表すため。
~~c = -7.4~~
ii ⇒ $\lim_{c\to 0} a+bx+cx^2 = a+bx$、$y=a+bx$ の式は直線を表す。
$c = -7.40 \times 10^{-8}$ はかぎりなく 0 に近いと言えるため、
ii の条件を満たすこのグラフは直線と言える。

図 12　生徒 IH が記述した線形であるとみなすための根拠

2.2.3. 根拠④

生徒 3 名が記述している。生徒 TM は GeoGebra を用いて，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x, y）2 次回帰計算結果から求められる 2 次関数を入力し，表示されたグラフを見て，視覚的に線形であると判断しており，他 2 名も生徒 TM と同様の記述があった（図 13）。

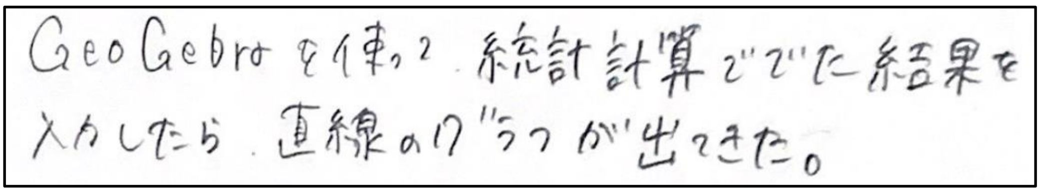

GeoGebra を使って、統計計算ででた結果を入力したら、直線のグラフが出てきた。

図 13　生徒 TM が記述した線形であるとみなすための根拠

３．埼玉県内国立大学附属高等学校での授業実践をしてみて

授業において，生徒らは，自身が点をプロットした片対数グラフと，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとに，y 軸を対数目盛に変更したことにより，曲線で表されていたグラフがどのように変化するのかを予想した。そして，線形であるとみなすために必要な根拠は何かについて考察した。線形であるとみなすための根拠を，次の 4 つのタイプに分類した：根拠①片対数グラフをもとにした根拠，根拠②データの並びをもとにした根拠，根拠③関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとにした根拠，根拠④上記 3 つのタイプ以外の根拠である。

根拠①については，生徒 4 名が記述しており，生徒 4 名全員が記述した根拠は，点をプロットした片対数グラフより，視覚的に線形であると判断する根拠であった。根拠②については，生徒 2 名が記述しており，x の値と $\log_{10}y$ の値について変化の割合がほぼ一定であるため線形であると判断する根拠であった。根拠③については，生徒 2 名が記述しており，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x, y）2 次回帰計算結果において，x^2 の係数（c の値）に着目した根拠であった。具体的には，x^2 の係数（c の値）が限りなく 0 に近い値となっていることである。根拠④については，生徒 3 名が記述しており，GeoGebra を用いた根拠であった。具体的には，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x, y）2 次回帰計算結果から求められる 2 次関数の式を GeoGebra に入力し，表示されたグラフを見て，視覚的に線形であると判断する根拠であった。

以上のように，実践から 2 点が明らかとなった。1 点目は，授業における生徒らの y 軸の目盛を対数目盛としたグラフの概形の予想について，点をプロットした片対数グラフをもとにし線形となると記述している生徒が，関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとにし線形となると記述している生徒よりも多かったことである。線形であるとみなすための根拠についても，根拠①の片対数グラフをもとにした根拠を記述している生徒が，根拠③の関数電卓の「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとにした根拠を記述している生徒よりも多かった。2 点目は，関数電卓の「統計計算」モードによる 2 変数（x, y）2 次回帰計算結果をもとに GeoGebra 等のアプリを使ってグラフを表示させ, 表示されたグラフから視覚的に線形であると判断する根拠を記述していた生徒がいたことである。片対数グラフや GeoGebra などを使用することにより，視覚的にグラフの概形を確認することができる。これらのことから，視覚的に直線と判断することができる根拠を，線形とみなすための根拠とする生徒が多いのではないか。