産学共同プロジェクト「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」

数学Ⅲ　指導案（略案）

上田　凜太郎

実験授業の目的

関数電卓の利用を前提とした解決において，中で働く思考を調査する。

授業のねらい

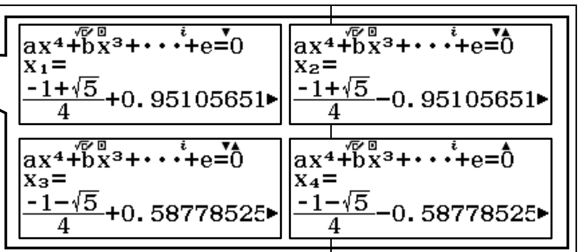
$x^n=1$ の解を関数電卓の高次方程式機能を用いて求めるために，x^n-1の因数分解における各因数の最高次数に着目し，その規則性を推測することができる。

本時の展開

	学習活動	指導の手立て	留意点
導入	・関数電卓の機能を確認する。 ①高次方程式機能を用いると，2 から 4 次の方程式の解を求めることができる。 ②高次方程式の解の表示方法は，実数解のみを表示する場合と，虚数解も表示する設定がある。 ③複素数の表示方法は，$a+bi$と$r\angle\theta$の 2 つがある。	・各自が探究したい状況に応じて設定や表示を変更する重要性を伝える。	・プロジェクターを用いて関数電卓の画面を表示する。
展開	・本時の問題を把握する。 問題 $x^n-1=$の解を求めてみよう ・自力解決を行う。 ①極形式とド・モアブルの定理を用いて代数的に探究する。 ①-1　rの処理に手間取る。 $x=r\cos\theta+i\sin\theta$とおく ド・モアブルの定理より $r^n\cos n\theta+ir^n\sin n\theta=1$	S：$r^n=1$をどう処理すれば良いのか... →T：どうすれば，処理ができるようになる	・生徒の既習事項を丁寧に確認して支援する。

	①-2　θの処理に手間取る。 $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$とおく ド・モアブルの定理より $r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta = 1$ よって，$r = 1$ θはよくわからない。	かな。 T：何に困っているのかな？ →S：θをどうやって求めたらいいのか… →T：$\cos\theta + i\sin\theta = 1$ となる場合は，具体的にどんな場合かな？	
	①-3　解を求めるが，複素数平面は考えない。 $x = r\cos\theta + i\sin\theta$とおく。 ド・モアブルの定理より $r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta = 1$ $r = 1, \theta = \frac{2\pi}{n}k(k \in \mathbb{Z})$ よって， $x = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k$ $(k \in \mathbb{Z})$	T：複素数平面上だと，どうやって表されるかな？ →S：正多角形になる。 →T：nが変化する事は，図形上にどんな違いとして表れるかな？ →T：他の方法でも解決できるかな？	・計算上の処理を，他の数学的表現で考察する見方を促す。
	②因数分解し，既知の方程式に帰着させる。 ②-1　特定の場合のみ考える。 $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$	T：他の場合はどうかな？ →S：計算が大変。 →T：関数電卓は使えるかな？ →S：使えない場合がありそう。	・関数電卓の機能の限界を顕在化させる。
	②-2　解ける場合と解けない場合を場合分けする。 $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$		

	$x^4-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)$ x^5-1 $=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ x^6-1 $=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ x^7-1 $=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ 因数分解ができる場合もあれば，できない場合もある。 ③関数電卓の高次方程式機能を用いる。	T：因数分解にはどんな特徴があるかな？ →S：みんなバラバラで特徴はない。 →T：因数分解の共通点はないかな？	・生徒の途中式を振り返ることを通して，因数分解の共通点を見出すことを促す。
	③-1　1 つの場合のみを求める。 $n=3$の場合を考える。 高次方程式機能より， $x_1=1,\ x_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $x_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$	T：$n>5$の場合も求められるかな？ →S：因数分解できればできる。 →T：どこまで因数分解できればいいのかな？	・関数電卓の使用前提下での因数分解の捉えを顕在化させる。
	③-2　複数の場合を求める。 $n=3$，4，5 の場合を考える。 高次方程式機能より， $n=3$のとき $x_1=1,\ x_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $x_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ $n=4$のとき $x_1=1, x_2=-1,$ $x_3=i, x_4=-i$ $n=5$のとき $x-1$を因数にもつため x^5-1	T：nがどんな値のとき，高次方程式機能が使えないかな？ →S：nが大きくなると使えない。 →T：nが大きくなるといつでも使えなくなるかな？ →S：4 次以下まで因数分解できるなら使える。	・関数電卓の使用前提下での因数分解の捉えを顕在化させる。

	$=(x-1)(x^4+x^3+x^3+x+1)$ よって，$x^4+x^3+x^3+x+1=0$の解を，高次方程式機能を用いて求めると $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+0.9510565163i$ $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}-0.9510565163i$ $x_3=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}+0.5877852523i$ $x_4=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}-0.5877852523i$ ③-3　高次方程式機能を用いて解決できない場合を発見する。 $n=7$の場合を考える $x-1$を因数にもつため x^7-1 $=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^3+x+1)$ 右側の多項式がこれ以上因数分解できないから，高次方程式機能を使えない。 ④手が止まる。 ・比較・検討を行う （グループ→全体） <u>グループ</u> 議論の視点 ・関数電卓の使用の有無 ・両者の対応関係 <u>全体</u> ・①-3 より，複素数平面上での	 T：この因数定理を一般化するとどうなるのかな？ →S：多項式に規則性がありそう。 T：nがどんな数の場合，因数分解がこれ以上できないんだろう？ →S：規則性はない。 T：関数電卓の高次方程式機能を使って求められるかな？ 大別して①と②のどちらも取り上げるようにする。	 ・ここで推測が出ない場合には，さらに問いかけず，全体での比較・検討で行う。

	表現はできる。 ・②-1 より，既知の方程式に帰着できれば，解を求めることができる。 ・②-2 より，既知の方程式に帰着できない場合は解けない。 ・③-2 より，関数電卓の高次方程式機能を用いれば，4 次方程式までは解を求めることができる。 ・③-3 より，nがどんな数でも一回は因数分解ができそうだが，その後に因数分解できるかはわからない。 ・関数電卓の高次方程式機能を前提にすると，因数分解した多項式の最高次数が 4 以下であることが大事。 ・因数分解した後の各因数の最高次数とnとの関係を調べる。	T：因数分解したときにどんな方程式なら解くことができるのかな？ T：②と③では，因数分解の目的は同じかな？ T：因数分解できたとして，どういう風に因数分解できたら高次方程式機能が使えるんだろう？	

課題

$2 \leqq n \leqq 10$の場合で，因数の多項式の最高次数とnとの間にはどんな関係があるだろうか？

・自力解決に取り組む。

①nと因数の最高次数の関係を

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
因数の最高次数	1	2	2	4	2	6	4	6	4

②nと因数の最高次数と因子の個数との関係を表にまとめる

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
因数の最高次数	1	2	2	4	2	6	4	6	4
因数の個数	2	2	3	2	4	2	4	3	4

	・比較・検討を行う（全体） ①nが素数の場合は，最高次数は$n-1$となる。 ②最高次数は，nが増加するに従って単調増加するわけではない。 ③nの約数の個数と因子の個数は対応している。 ④nと互いに素なn以下の自然数の個数と最高次数は対応している。	T：どんな関係を推測できるかな？ T：nが素数の時はどうだろう？ T：最高次数はどんどん大きくなる一方なのかな？ T：nの約数とは関係ないかな？ T：nと互いに素な数とは関係ないかな？	
まとめ	・本時の振り返りを行う。 ①$x^n-1=0$の解を求める際に，関数電卓の高次方程式機能を用いることができるときとできないときがあった。 ②①の場合を判断するために，nの約数の個数や互いに素なn以下の自然数の個数に着目すればよさそう。 ・学習感想をかく。		・あくまでも推測であったことを確認する。

※本指導案では，エミュレーターを使用しているため，画面が英語表示になっているが，実際の関数電卓では日本語表示となる。