茨城県内国立大学理系学部でのワークショップの実践報告

東京都立工芸高等学校　上田　凜太郎

1．茨城県内国立大学理系学部でのワークショップの概要

ここでは，茨城県内国立大学理系学部でのワークショップに向けた指導案立案，茨城県内国立大学理系学部でのワークショップの流れについて述べる。

1.1. 指導案立案

本ワークショップは，上田作成「数学II指導案（略案）」をもとに実践している。本ワークショップは，これまでに分析してきた埼玉県高等学校数学科標準テストの$\boxed{6}$（4）に着目した。

埼玉県高等学校数学科標準テスト$\boxed{6}$（4） 方程式$x^3-3x-3=0$の実数解の個数は$\boxed{4}$である

この問題を，関数電卓を使用して解決すると，高次方程式機能を用いて解を具体的に求めることができ，実数解の個数を求めることができる。本稿では，この解決を関数電卓アプローチと呼ぶ。この問題について，関数電卓を使用しない解決を示す。一つ目は，方程式の実数解の個数を，関数$f(x)=x^3-3x-3$のグラフとx軸との共有点の個数に帰着させるものである。具体的には，$f(x)=x^3-3x-3$の増減表を作成し，グラフを描く（図 1，グラフは動的数学ソフトウェア GeoGebra で作成）。

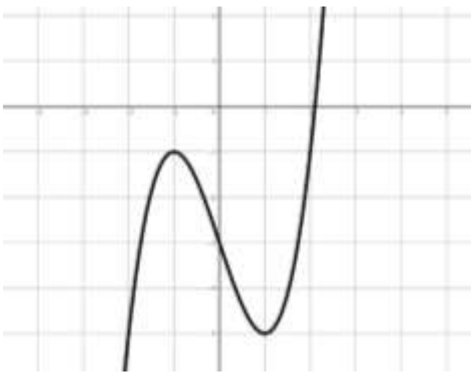

図 1　$f(x)=x^3-3x-3$のグラフの概形

このグラフとx軸は 1 つの共有点を持つので，この方程式の実数解の個数は 1 つである。本稿では，この解決を関数アプローチと呼ぶ。二つ目は，$f(a)=0$となるaを求め，因数定理を用いて因数分解し，その因数である 2 次式に着目し解の公式を用いて解を求めるものである。本稿では，この解決を代数アプローチと呼ぶ。一方，この方程式では簡単にaを求めることができないため代数アプローチが容易ではない。この問題を，関数電卓を用いて解決した際に，高次方程式機能が利用できることを明らかにしてきた。そこで，この機能を学生がどのように活用していくかを明らかにすることを意図し，ワークショップを計画した。

1.2. 茨城県内国立大学理系学部でのワークショップの流れ

まず，三次方程式の実数解の個数を求める次の問題に取り組む。

問題
方程式 $x^3+3x^2-2=0$ の実数解の個数を求めましょう

関数アプローチでは，$f(x)=x^3+3x^2-2$のグラフとx軸の共有点は3つなので，この方程式の実数解の個数は3である。代数アプローチでは，$f(-1)=0$であるため因数定理より$f(x)$は $x+1$ を因数にもつ。よって $(x+1)(x^2+2x-2)=0$ と因数分解し，この方程式の解を求め，実数解の個数は3である。関数電卓アプローチでは，機能を用いてこの方程式の解を求め，実数解の個数は3である（図2）。

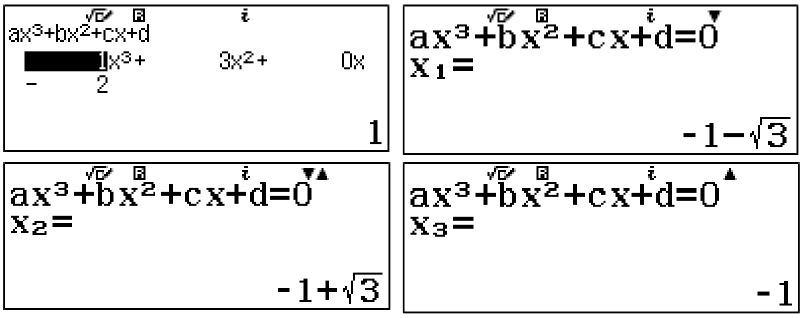

図2　高次方程式機能を用いた$x^3+3x^2-2=0$の解の表示

次に，上記の方程式を発展させ，本時の問題として，五次方程式の実数解の個数を求める問題に取り組む。

問題
方程式 $x^5-1=0$ の実数解の個数を求めましょう

関数アプローチでは，$f(x)=x^5-1$が$x=0$ を除き単調増加であるため，この関数のグラフとx軸の共有点は1つなので，実数解の個数は1である。代数アプローチでは，既知である2次方程式に帰着させることを意図し，$f(1)=0$であるため因数定理より$x-1$が因数であり，$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ と因数分解することができる。このとき，$x^4+x^3+x^2+x+1=0$は，$x\neq 0$より両辺をx^2で除することができ，$x+\frac{1}{x}$に関する2次方程式へ帰着させ求める。関数電卓アプローチでは，高次方程式機能を使用できる4次式以下に次数を下げることを意図して因数定理を用いて因数分解を行う。そして，因数の$x^4+x^3+x^2+x+1$ に着目して，高次方程式機能を使用し解を求め，実数解の個数は1である（図3）。

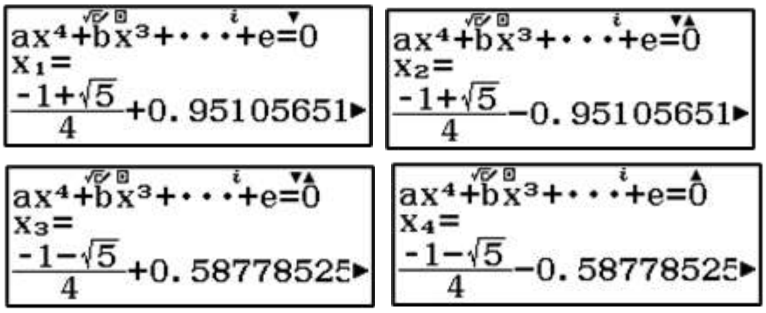

図3　高次方程式機能を用いた$x^4+x^3+x^2+x+1=0$の解の表示

なお，この方程式の場合，複素数平面を用いて考察することが容易にできる。具体的には，$x = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ とおき，ド・モアブルの定理より$r^5(\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = 1$ を得る。よって，$r = 1, \theta = \frac{2}{5}\pi k$（$k \in \mathbb{Z}$）から，$x = cos\frac{2}{5}\pi k + i\,sin\frac{2}{5}\pi k$ （$k \in \mathbb{Z}$）と求めることができ，実数解の個数は 1 である。この解決を，複素数アプローチと呼ぶ。

２．茨城県内国立大学理系学部でのワークショップの実際

ここでは，茨城県内国立大学理系学部でのワークショップの報告を行う．実施日は，2020（令和 2）年 11 月 28 日であり，対象は，茨城県内国立大学理系学部の教員を志望している学生 8 名である。インストラクターは筆者である。なお，感染症予防の観点からワークショップは遠隔 Web 会議サービスを用いて行った。

2.1. 授業の概要

ここでは，授業の実際の概要を示す。まず，インストラクターは導入で方程式 $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ の実数解の個数を求める問題を提示し，学生らは自力解決に取り組んだ。自力解決後，学生らは 4 人 1 グループで解決を共有し，インストラクターは学生らによる関数アプローチと代数アプローチを全体共有した（図 4）。

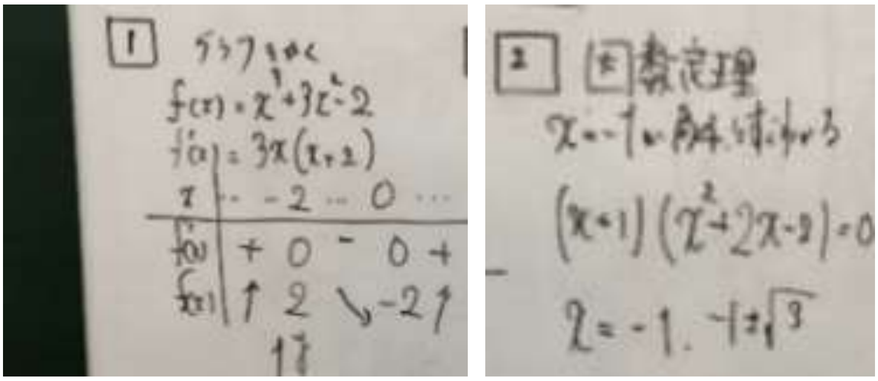

図 4　導入の問題における学生らの解決

また，インストラクターは関数電卓の高次方程式機能を紹介し，4 次式以下の有理数係数方程式の解を具体的に求めることができることを示した。

次に，インストラクターは本時の問題を提示し，導入の問題と同様，学生らは自力解決後にグループで解決を共有した。その後，インストラクターは学生らが行った関数アプローチ，複素数アプローチ，関数電卓アプローチ，そして代数アプローチを全体共有した（図 5）。

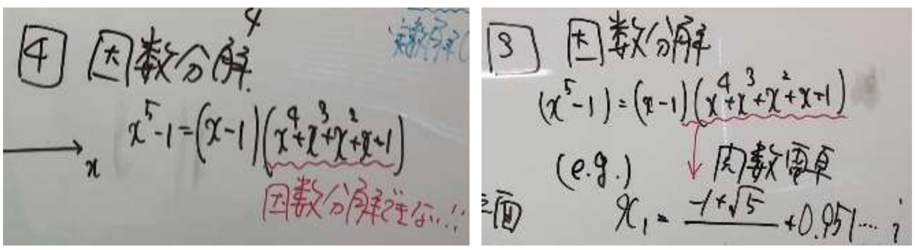

図 5　本時の問題における学生らの解決

2.2. グループ活動の実際

次に，各グループ活動に着目し，学生らの解決の詳細を報告する。なお，プロトコルの番号はグループ活動の通し番号を，In はインストラクターを表す。

2.2.1 グループ 1 の解決の実際

グループ 1 は Hiro，Ken，Meg， Rick の 4 人から構成される。グループ活動の冒頭で，学生らは各々の解決を説明した。まず，Ken が自身の解決を説明した。

---

①－01Ken：自分が考えたのは，さっきと同じように，この左辺の x^5-1 っていうのを $f(x)$ とかって関数でおいて，微分して増減を調べたっていうことです。で，x軸との交点が一個になったので，一個っていうのと，もう一個がこの 1 の五乗根が解なので，この単位円を五等分するように配置されるはずなので，実数 1 個っていうので求めました。以上です。

ここから，Ken の解決は関数アプローチに分類される。この Ken の解決と同様であるという主張のもと，Rich と Hiro が続いて自身の解決を説明した。

---

①－05Rick：逆だったら次僕だと思うんですけど，僕も同じように増減表をかいて，グラフでやろうとしました。でもなんかわかんなかったです。結局 1 個しか見つかってないです。同じようにグラフ描いてやろうとしたんですけど，なんか，途中でわかんなくなりました。っていう感じです。

①－06Hiro：ありがとうございます。じゃあ僕も。僕も一応グラフでやりました。見えづらい。さっきと同じというかまぁ，定数項だけ別にして， $y=x^5$と $y=1$との共有点を求めようかなと思って，$y=x^5$のグラフが描ければ求まるかなっていうやつです。で，ただそのやっぱり増減表かくときに微分すると，x^4 になって，結局 x^4 の概形が分からないといけないので，で x^4 も微分してってなるとちょっと，何回も微分しないといけないっていうのが面倒くさいというかちょっとあれだったんで，x^4 の時点でもう 0 より必ず大きいっていうので x^5 は単調増加，まぁ $x=0$ 以外のところでは単調に増加するっていうのを決めて，決めてと言うか，それを使ってやりました。以上です。

Hiro の解決は，$g(x)=x^5$ と $h(x)=1$ のグラフの共有点の個数に帰着させており，$f(x)=x^5-1$ とx軸との共有点の個数に帰着させた Rick と Ken と同じ関数アプローチに分類される。次に続く Meg も含め，グループ 1 の全ての学生は関数アプローチに基づいて解決している一方

で，Meg は他の解決を説明した。

---

①－07Meg：私もグラフ描いてないんですけど，増減表かいてやって，解が 1 個って出て，因数分解の奴を最初やろうと思ったんですけど，$x-1$ でくくれたけど，そのもう一つの方が 4 乗，4 次式になっちゃって，なんかここで関数電卓使えばできる，できるかなっていうかその解がどんな形になるか見れば解が 1 個になるってわかるかなって思って。だからなんかやっぱ因数分解の方だとちょっと次数が大きくなっちゃうと難しいかなっていうのを思いました。以上です。

Meg は自身の二つ目の解決について，「4 次式になっちゃって，なんかここで関数電卓使えばできる」と説明した。高次方程式機能を使用できる 4 次式以下に次数を下げる意図のもと，因数分解を行ったかどうか不明瞭である。よって，この解決が関数電卓アプローチであるかどうかはこの時点では判断できない。そこで， Meg の解決の意図を顕在化させるため，インストラクターは Ken の解決を取り上げた。

---

①－14In　：Ken 君もさ，最初因数分解やってなかった？

①－15Ken：あー，やりました。でなんか，xの 4 次式が出てきてそれを因数分解しようと思ったら無理だわってなったんで。

①－16In　：あー。なるほど。

①－17Ken：あきらめました。

①－18In　：無理っていうのは，何が無理なんだっけ？

①－19Ken：だからこのx^4+3，ちがう$x^4+x^3+x^2+x+1$っていうのが出てきたんですけど，その解を求めるのが厳しかったんで，ちょっと別のやり方にしました。

Ken の解決は，因数分解して求めた因数をさらに因数分解することを意図しており，代数アプローチに分類される。Ken は，因数$x^4+x^3+x^2+x+1$の因数分解に困難を抱いており，この解決を断念している。引き続き，インストラクターは Meg に再度の説明を促した。

---

①－22In　：Meg は最初因数分解したでしょう？その時ってどういうこと考えて因数分解しました？

①－23Meg：どういうこと考えて，どういう...

①－24In　：なんかあれ，脊髄反射で因数分解したの？

①－25Meg：いやなんか，普通にこの式見て，1 が当てはまる，1 が解としてあらわれるのはわかるから，わかるってか，1 を入れたら 0 になるっていうのはわかるから，$x-1$

でくくって，その 4 次式の式がでてきたんですけど，なんか最初は$x+\frac{1}{x}$の形？でやろうかなと思ったんですけど，やめちゃいました。

上の説明で Meg は$x+\frac{1}{x}$に着目し，因数$x^4+x^3+x^2+x+1$を因数分解することを意図していた。Meg は因数分解して求めた因数をさらに因数分解することを意図し因数定理を用いており，その過程で偶発的に高次方程式機能を使用していた。よって，Meg の解決は関数電卓アプローチではなく代数アプローチに分類され，Ken の代数アプローチとの相違点を見出しえない。そこで，学生らの解決の相違点を問うことをねらいとして，インストラクターは次のように発問した。

---

①－30In　:（中略）えーと，そしたらですね，このグループでは，いま 4 つね，大体ね，解決策が。特にね，因数分解のところをもうちょっと議論してほしいなと思うんです。というのは，うんと，因数分解を一回やってそっから先進んだ場合と途中で止まった場合があるじゃない？具体的には Ken 君の場合と Meg さんの場合。なんでそれが，進んだり進まなかったりしたっていうのかを考えてほしいなと思う。結果としてできる，できないじゃなくて，その何で Meg さんは解決まで進んで，Ken 君は解決が止まったのか。そこをちょっと考えてほしいなと思います。で，考える視点としては，数学のこの色んな概念っていうのが，方法として考えられるんであれば，その目的っていうのがきっとあるはずじゃない？その数学の概念を使うときの。その目的が一体何だろうっていうのを，1 個視点に考えてほしいなと思います。ちょっと難しいから時間とりますけど。

このインストラクターの発問に対して，学生らは Ken の解決を振り返りながら議論を進めた。

---

①－37Rick : Ken さんってどこでストップしちゃったんでしたっけ？$x-1$で因数分解したあとの，

①－38Ken : えっと，とりあえず$x-1$ って因数を持つっていうのはわかって，でそれが因数分解して，もう片方の 4 次式になったんですけど。

①－39Rick : なりましたよね。

①－40Ken : そのなんか色々，考えては一応みたんですけど，まぁなんか何となく実数解持たなそうだなっていうのはわかったんですけど，これをいざ実際に因数分解しようってなったときに，なんかできないなっていう風になって。で，なんかその考え方として発表するってなると難しいなって思って，そのグラフを描くとかっていう方にいきました。

①－41Rick：うーん。そうなりますよね。

①－42Ken：なんかその解持たないなって，関数電卓とか使って求めるだけならこれでも十分いけると思うんですけど。

37Rickにおいて，Rickはどこで Kenの解決が困難になったかを問うており，Kenの解決の意図に言及していない。この Rick の問いかけに対応した Ken も，自身の解決が因数分解を進めることを意図したという前提に着目することなく，因数分解の可否にのみ言及している。その結果，Kenは関数電卓の使用の有無について，「関数電卓とか使って求めるだけならこれでも十分いけると思うんですけど」と，計算を代替するものであると解釈している。

一方で Meg は，インストラクターの発問がねらいとした意図の違いに着目して議論している。

---

①－31Hiro：あんまり趣旨がわかってないんですけど，ごめんなさい。

①－32Meg：多分なんか，私は4次式が出てきたときに関数電卓を使うっていう方法を使って，その因数分解の方で解き進めていったけど，その Ken さんの方は4次式が出たときに，なんか違う方法にしようって変えたっていう違いが生まれたとは何でかっていう感じだと。

ここではHiroがインストラクターの発問のねらいを図りあぐねており，解決の意図に着目できていない。よって，次に続く Hiro の焦点は，Ken と Rick と同様に解決をどのように進めたかに終始している。この Hiro の焦点に対応するために，Meg の議論も解決の意図から，解決の方法へと転換した。

---

①－35Hiro：因数分解で進めていったわけではないですよね。

①－36Meg：そうですね，なんか普通に解を求め，そこからは因数分解 1 個$x-1$を出したら，それ以外のところは解を求めるっていう方法でやっちゃったから，うーん，そういうことです。

2.2.2 グループ2の解決の実際

グループ2はAnn，Ben，Kay，Rayの4人から構成される。まず，Rayが自身の解決を説明した。なお，AnnはT.A.で同席している大学院生のため，議論には基本的に参加していない。

---

②－02Ray：そうですね。じゃあ，まず私からでいいですか？一つ目が，まぁド・モルガンの

法則ですかね。$\cos\theta + i\sin\theta$とおいて，θ，偏角を求めると，0 から2πの範囲で実数が 0 しかないので，解が 1 つと。あとは，さっきと同様で，$f(x) = x^5 - 1$とおいて，微分すると単調増加。まぁ，それは詳しくはやってないんですけど，＋∞の極限で∞に発散して，－∞の極限でーに発散するので，x軸と交わると，という感じです。

Ray は，複素数平面を用いた解決と，座標平面を用いた解決を行っており，複素数アプローチと関数アプローチに分類される。次に，Ben が自身の解決を説明した（図 6）。

---

②－04Ben：$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$を$g(x)$とおいて，それを関数電卓にあてはめてみると，実数解を持たないってことが分かったので，実数解の個数は一つだなぁと考えました。

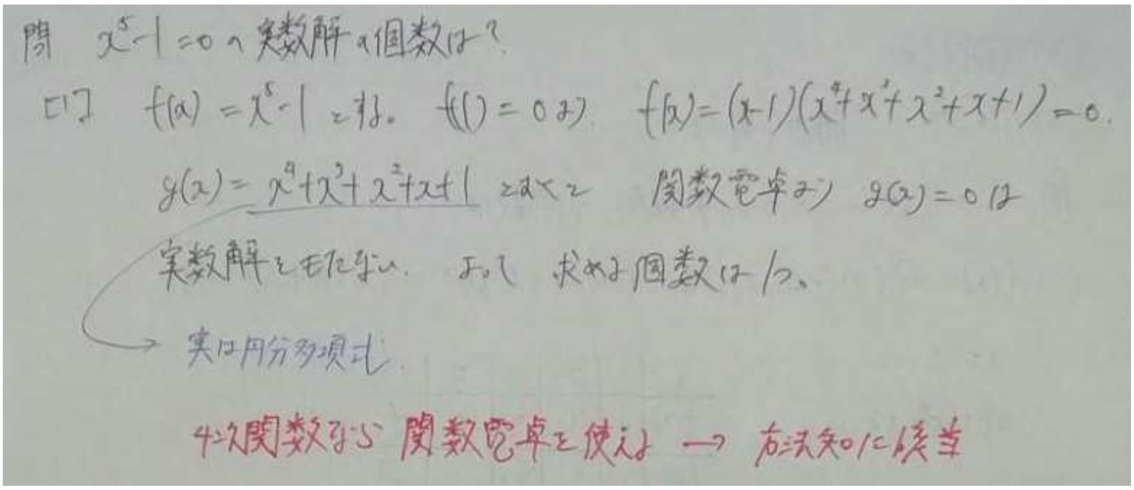

図 6　Ben の解決

Ben は，関数電卓を用いた解決を行っているため，関数電卓アプローチに分類されうる。一方で，その解決の意図はこの説明からは明らかになっていないため，Meg と同様に代数アプローチである可能性もある。続いて，Kay は，Ray と Ben の解決と比較しながら自身の解決を説明した。

---

②－07Kay：ありがとうございます。じゃあ一応私も。まぁ微分してって話は Ray さんと全く同じなので，それ以上語れることはないんですけれど。ちょっと私は関数電卓使うところの余地を見出す前に時間オーバーしちゃったので，そこは Ben さんのアイディアにお任せすると。そうすると，Ray さんは，ド・モルガン，失礼しましたド・モアブルの法則を使って，複素数の偏角から求めたとあったんですが，一応私は，お二人の方針を組み合わせて途中から変えたって感じで。まず$x = 1$

が解を持つってわかったので，それで因数分解しまして，4 乗＋3 乗＋2 乗＋1 乗＋1＝0。あとはこの実数解を求めればいいんですけれど，数Ⅱだかの技法で習った相反方程式でしたっけ？係数が対称になっているので，まず x が 0 じゃないと確認して，x^2でわって，それで $x+\frac{1}{x}$ の二次方程式をつくって，そこから死ぬほど計算が大変だったんですけれど，そうしたところ，最終的に判別式が負になってしまったので，実数解がないねっていう風にやってみまし。以上です。ありがとうございました。

Kay は 2 つの解決を行った。前者は，Ray と同様に関数アプローチに分類される。後者の解決は，Ben と同様に因数分解したと振り返っている。一方，Kay は因数分解した後に見いだした$x^4+x^3+x^2+x+1$ を$x+\frac{1}{x}$ に関する二次方程式に帰着させて解決した。このことから，Kay の後者の解決は既知である 2 次方程式に帰着させることを意図して進めており，代数アプローチに分類される。

それぞれの解決を共有した後に，グループ活動を行うにあたり授業者が示した視点に基づいて議論が行われた。

---

②－08Ray：ありがとうございます。じゃあ，えーと，なんでしたっけ？目的，なんでしたっけ？あの，提示された 2 点。

②－09Kay：アプローチの違いと目的でしたっけ？

②－10Ray：そうですね。

この議論において，Kay の問いかけに対する Ben の説明から，その解決の意図が顕在化された。

---

②－15Kay：目的の違いですか。Ben さん，関数電卓使う方針発見してみてどうでした？

②－16Ben：関数電卓使うところで，次数が 2 から 4 ってなっていて，4 のときは使えるなぁと思ったので，また関数を$g(x)$って名前つけてあげて，そこから関数電卓使えばいいかなと思って。実際，それの答えを求めてみると，どれも虚数を含んだ解になっていたので，それで関数電卓を使う価値はあったかなって思っています。比較的時間もかからずにすぐ計算できたので，楽だったかなと。

②－17Kay：そうですね。最初に関数電卓が使えるように工夫するって，工夫したんですよね？4 次までなので。

②－18Ben：5 乗のところを 1 次落としてあげれば 4 乗になるので，そしたら関数電卓のさっきの機能を使えばいけるかなと。

Benは，ワークショップの冒頭で取り組んだ$x^3+3x^2-2=0$ の実数解の個数を求める問題において関数電卓の高次方程式機能を用いる際に，次数が2から4までであった経験をもっている。このことから，方程式 $x^5-1=0$ の実数解の個数を求める問題において，多項式の次数を四次以下に変形することを意図して解決に取り組んだことがわかる。このBenの意図は，Kayによる「最初に関数電卓が使えるように工夫するって，工夫したんですよね？」という解釈においても共有されたことがわかる。一方で，この議論においてRayは発言していないため，Rayの解釈はここでは明らかではない。そこで，インストラクターはBenの解決についてRayの解釈を顕在化させる発問を行った。

---

②－36In　：うん。他にも因数分解で解いた子います？Ben君だけかな．たとえばRay君とか，めっちゃ無茶ぶりだけど，急に話降るけど，Ben 君の考えは思いついたのかな？自分で解いたときに。

②－37Ray：関数電卓を使うっていう先生の言葉を聞き逃していて。

②－38In　：あー，うんうん。じゃあBen君の聞いて，何か感想あります？

②－39Ray：そうですね。微分とかド・モアブルの定理は結局数Ⅲまで，あ，微分は数Ⅱですけど，あの高校生の後半にならないと履修しないところもある中で，で，x^5-1っていう代数だけで解こうっていう発想になったときに，1 回因数定理を使って履修したばっかの生徒だと，まぁ解けないと思うんですよ。その4次方程式の解の個数が関数電卓がないとわからない，微分使わないとわからないので。ってなったときに，関数電卓の使い方が分かっていると，それが1つしかないってことが確認できるので，まぁ微分しか知らなくても，微分をまだ履修してない生徒でも確認できてそこが見れたのかなとは思いました。

インストラクターの発問に対し，Rayはこの問題を解決するために必要な数学の内容について言及した。この言及の中で，関数電卓が使用できる場合には複素数アプローチや関数アプローチを用いることなく，関数電卓アプローチを用いることができることを指摘した。一方，$x-1$ を因数に持つことから因数定理を用いた際の意図についての言及はなく，KayとBenの解決における因数分解の差異をどのように捉えているかは明らかではない。

３．茨城県内国立大学理系学部でのワークショップを実践してみて

本ワークショップを実践してみて，関数電卓を使用する際の意図を顕在化させる必要性があることが示唆される。本ワークショップは遠隔Web会議サービスを利用して行ったため，自力解決においてインストラクターが受講者の思考を顕在化させるような手立てを講ずることが困

難であった。そのため，グループ 1 の Meg の解決がどのアプローチであるかを判断することができず，グループでの議論を通してその顕在化を図った。一方で，グループ活動においてインストラクターが指示した，アプローチの目的を問う発問は，グループ 2 の Ben の解決の意図を顕在化させる役割を果たした。今後，中等教育段階の生徒を対象とする授業実践では，比較・検討において異なるアプローチを取り上げるためには，自力解決時の机間巡視における見取りが重要となる。その際には，紙とペンや関数電卓等，生徒が何を用いて解決しているかだけでなく，解決の意図を顕在化させる手立てが求められる。