

茨城県内国立大学理学系学部学生および埼玉県内国立大学教員養成系学部学生を
対象としたワークショップの実践報告

山本 柚
原 健太郎

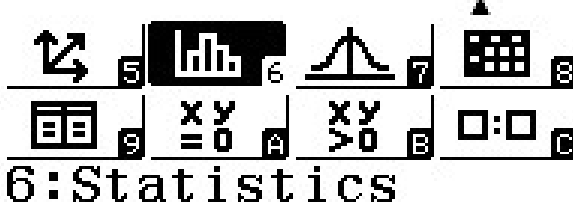
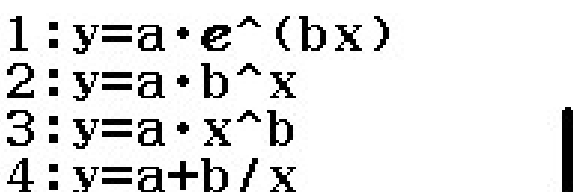
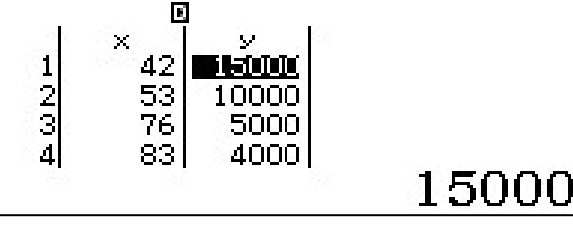

1. 茨城県内国立大学理学系学部学生および埼玉県内国立大学教員養成系学部学生を対象
としたワークショップの概要

ここでは、茨城県内国立大学理学系学部学生および埼玉県内国立大学教員養成系学部学生を対象としたワークショップに向けた指導案立案，茨城県内国立大学理学系学部学生および埼玉県内国立大学教員養成系学部学生を対象としたワークショップの概要について述べる。

1.1. 指導案立案

ワークショップは、山本作成「プロジェクターの光の明るさと投影距離に関する数学科指導案（略案）」をもとに実践している。筆者らは、本ワークショップに向けて、2乗に反比例する関数の教材開発をおこなった。具体的には、測定距離と投写画面の明るさを測定する予備実験をおこなった。予備実験によって得られたデータをもとに関数電卓を用いて投写画面の明るさは測定距離の2乗に反比例するとみなす（表1）。

表1 「統計計算」モードによる回帰計算結果を表示する操作手順

<p>【操作1】 関数電卓の「統計計算」モードを選択する。 「MENU 6 ≡」を順に押下する。</p>	
<p>【操作2】 使用する統計計算の種類を選ぶ。（ここでは計算タイプ「$y=a \cdot x^b$」を選択する） 「\blacktriangledown 3」を順に押下する。</p>	
<p>【操作3】 距離をx，明るさをyとして，実験から得られたデータを入力する。 x列1行目を選択後，「4 2 ≡ 5 3 ≡ 7 6 ≡ 8 3 ≡…」と入力していく。y列も同様におこなう。</p>	
<p>【操作4】 OPTN から「4:回帰計算結果一覧」を選択する。 「OPTN 4」を順に押下する。</p>	

<p>【操作 5】 回帰計算結果を表示する。</p>	<pre> y=a·x^b a=24865124.82 b=-1.975166753 r=-0.999672824 </pre>
--------------------------------	--

回帰計算の結果一覧から、相関係数 r が -1 に近いから、 x と y には強い負の相関があり、 $b \approx -2$ であることから、投写画面の明るさは測定距離の 2 乗に反比例するとみなすことができる。

また、2 変数(x, y)べき乗回帰計算の結果から得られる相関係数 r は、入力したデータ x, y の自然対数を取った値 $\ln x, \ln y$ の相関係数である (べき乗回帰 - 高精度計算サイト - Keisan)。実際、関数電卓の「統計計算」モードにおいて、 $\ln x$ の値を x 、 $\ln y$ の値を y として入力し (図 2)、2 変数(x, y)1 次回帰計算の結果一覧を表示すると、相関係数の値が一致することが確かめられる (図 3)。

	x	y
1	3.9702	9.6158
2	3.9702	9.2103
3	4.3307	8.5171
4	4.4188	8.294

3.737669618

図 2 $\ln x$ の値を x 、 $\ln y$ の値を y として
入力した画面

<pre> y=a+bx a=17.02897677 b=-1.975166753 r=-0.999672824 </pre>

図 3 2 変数 (x, y) 1 次回帰計算結果
を表示した画面

1.2. 茨城県内国立大学理学系学部学生および埼玉県内国立大学教員養成系学部学生を対象としたワークショップの流れ

ワークショップでは、まず、平成 27 年度全国学力・学習状況調査で出題されたプロジェクターを題材とした問題について紹介する。次に、プロジェクターのレンズから投写画面までの距離(以下、投写距離)とプロジェクターの投写画面の明るさ(以下、投写画面の明るさ)を測定する実験をおこなう(図 1)。実験から得られたデータをもとに、関数電卓を用いて、測定距離と投写画面の明るさの間に成り立つ関数関係を探究する。なお、「統計計算」モードによる解決を想定している。

ワークショップでは、次のようにして投写距離と投写画面の明るさを測定する実験をおこなった。まず、学生らを 3 人程度のグループに分ける。各グループに照度計、プロジェクター、メジャーを用意する。また、正確な測定をおこなうため、窓に暗幕を設置するなどして、部屋をできる限り暗くする。そして、各グループで投写距離と投写画面の明るさを測定する実験をおこないデータを集める。



図1 ワークショップでの実験の様子

2. ワークショップの実際

実施日は、茨城県内国立大学理学系学部学生を対象としたワークショップが2022（令和4年）11月23日、埼玉県内国立大学教員養成系学部学生を対象としたワークショップが2022（令和4年）12月7日、14日である。インストラクターは第1著者と第2著者である。

ワークショップでは、いずれの学生も「統計計算」モードによる回帰計算結果をもとに、測定距離と投写画面の明るさの間に成り立つ関数関係を探究していた。学生らが「統計計算」モードによる回帰計算結果から、学生がどのように結論づけていたかについて述べる。

2.1. 埼玉県内国立大学教員養成系学部学生を対象としたワークショップ

2.1.1. 学生 YT の回答

学生 YT は「統計計算」モードにおいて、3種類の計算タイプ（「(i) $y = a + bx$, (ii) $y = a + \frac{b}{x}$, (iii) $y = a + bx + cx^2$ 」）において回帰計算をおこなっていた。学生 YT は「実験から (i),(ii),(iii) のような結果が得られた。(i) から、 $b < 0$ より、右下がりのグラフのことがうかがえる。また、(ii) でも $x > 0$ で右下がりのグラフのことが考えられる。相関係数 r の値から、(i) より (ii) の値の絶対値が 1 に近いことから、(i) の直線的な右下がりのグラフより (ii) の曲線的な右下がりのグラフの関係があると考えられる。ここでいうと、反比例の関係が最も近いといえる（原文ママ）」と記述している（図 4）。3つの回帰計算結果をもとに、グラフの概形と相関係数 r の値に着目し、反比例の関係があると結論づけている。

距離(m)	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	4.0
明るさ(lux)	12000	7000	4500	3500	2500	2000	1600	1480	1350	1050	850	750	650	375

・関数電卓の統計モードを使って、関係を調べた。

入力した値 $x \rightarrow$ 距離(m)
 $y \rightarrow$ 明るさ(lux)

(i) $y = a + bx$ (ii) $y = a + \frac{b}{x}$ (iii) $y = a + bx + cx^2$

$a = 7879.484398$ $a = -2406.40809$ $a = 13973.15223$
 $b = -2568.897112$ $b = 7825.723098$ $b = -9482.379673$
 $r = -0.762799026$ $r = 0.9804788065$ $c = 1592.019498$

・実験から (i), (ii), (iii) のような結果が得られた。
 (i) から、 $b < 0$ の右下開きのグラフのことがわかる。また、(ii) でも $x > 0$ の右下開きのグラフのことが考えられる。
 相関係数 r の値から (ii) の r の絶対値が 1 に近いことから、(i) の直線的な右下開きのグラフより、(ii) の曲線的な右下開きのグラフの関係があると考えられる。ここでいうと、反比例の関係が最も近いといえる。

図4 学生 YT の回答

2.1.2. 学生 YY の回答

学生 YY は、6 種類の計算タイプにおいて回帰計算をおこなっていた。初めは「 $y=a+bx$ 」と「 $y=a + \frac{b}{x}$ 」の 2 種類の計算タイプにおいて回帰計算をおこない、「『 $y=a + \frac{b}{x}$ 』の式において、相関係数 r が 1 に近い距離と明るさの間には相関があり、反比例に近い関係がある」と記述している。その後、前述した計算タイプとは異なる 4 種類の計算タイプにおいて回帰計算をおこない、「最も相関係数 r が 1 に近い $y=a \cdot x^b$ の式の関係がある」と記述している (図 5)。学生 YY は、6 種類の回帰計算結果をもとに、相関係数の値の絶対値が最も 1 に近くなる「 $y=a \cdot x^b$ 」の式の関係が成り立つと結論づけている。

$$y = a + bx$$

$$a = 12421.44803$$

$$b = -47.84024782$$

$$r = -0.982827503$$

$$y = a + \frac{b}{x}$$

$$a = -2768.44441$$

$$b = 802890.9876$$

$$r = 0.9844230639$$

統計計算モード → 式を代入 → 数値をいれる → 回帰計算一覧
 $y = a + \frac{b}{x}$ xに距離 yに明るさ

$y = a + \frac{b}{x}$ の式において、相関係数 r が 1 に近いため、距離と明るさの間には相関があり、反比例に近い関係があると考えられる。

他にも、

$y = a + b \cdot \ln(x)$	$r = -0.944093322$
$y = a \cdot e^{(bx)}$	$r = -0.98657263$
$y = a \cdot b^x$	$r = -0.98657263$
$y = a \cdot x^b$	$r = -0.998333061$

つまり最も相関係数 r が 1 に近い $y = a \cdot x^b$ の式の関係があると考えられる。

図5 学生 YY の回答

2.1.3. 学生 IH の回答

学生 IH は、2 回の実験で得られた 2 種類のデータをもとに、関数関係を探している。2 種類の計算タイプ「 $y = a + bx$ 」「 $y = a \cdot x^b$ 」の回帰計算結果をワークシートに記述し、相関係数 r の値の絶対値がより 1 に近い「 $y = a \cdot x^b$ 」の関係が成り立つとした。「 $y = a + bx$ 」については「このとき、 $y = a + bx$ においては距離、明るさは常に 0 以上であるので、 x が一定以上大きくなったときに y が負の数になることは考えなくてよい」と記述している。次に、計算タイプ「 $y = a + bx$ 」の回帰計算結果から得られる相関係数 r の値がより 1 に近いデータの方が適しているとした。このことについて、「曲線を構成する点に乱れが少ない方が、直線として近似したときにも乱れが少ないと考えられる」と記述している（図 6）。以上より、

$y=4923.54x^{-2.00269}$ という関係が成り立つと結論づけている。

<p>12/7 統計計算 $y = a + bx$</p> <p>$a = 7849.593595$ $b = -2570.777724$ $r = -0.762844921$</p> <p>〇 " $y = a \cdot x^b$</p> <p>$a = 4733.11739$ $b = -1.791942255$ $r = -0.999691292$</p>	<p>13/7 統計計算 $y = a + bx$</p> <p>$a = 19591.89261$ $b = -12158.42637$ $r = -0.923461013$</p> <p>〇 " $y = a \cdot x^b$</p> <p>$a = 4923.54$ $b = -2.00269$ $r = -0.9987$</p>
<p>画面の中央で明るさを測いた ← → 光源の延長線上で明るさを測いた。</p>	
<p>$y = a \cdot x^b$ に着目すると、両方のデータの相関が高いため、曲線であると考え。... ①</p> <p>また、$y = a + bx$ に着目すると、13/7 のデータの相関が高いことが分かる。</p> <p>ここで、ある曲線に対する直線の相関について考えると、距離を大きくすると明るさが下がることは自明であるので、相関は -1 に近づくはずだと考えられる。</p> <p>よって、12/7 のデータの方が正しいと考え。... ②</p> <p>したがって、①、②より、$y = 4923.54 \cdot x^{-2.00269}$ と考える。</p> <p style="margin-top: 10px;"> } 曲線を構成する点に乱れが少ない方が、 直線として近似したときにも乱れが少ないと考えられる。 </p> <p style="margin-top: 10px;">つまり、<u>距離が 2 倍になると明るさが 1/4 倍になる。</u></p> <p style="margin-top: 10px;"> (このとき、$y = a + bx$ においては、距離、明るさは常に 0 以上である。) </p> <p style="margin-top: 10px;"> (x が一定以上大きくなるときに y が負の数になることは考えなくてよい。) </p>	

図 6 学生 IH の回答

2.2. 茨城県内国立大学理学系学部学生を対象としたワークショップ

学生 IK は、成り立つ関数関係について二つの根拠を示していた。一つは、学生 YY と同様に、相関係数 r の値の絶対値がより 1 に近いことを根拠に、「 $y = a \cdot x^b$ 」の関係が成り立つとした。もう一つは、投写距離 x の値から新たな値 $\frac{1}{x^2}$ を計算し、計算タイプ「 $y = a + bx$ 」において x を $\frac{1}{x^2}$ とし、 y を投写画面の明るさとして回帰計算をおこなうことで、「 y と $\frac{1}{x^2}$ の間とは直線関係がみられる」としていた (図 7)。つまり、 y は $\frac{1}{x^2}$ に比例するため、 y は x の 2 乗に反比例すると結論づけていた。さらに、「 $y = a + bx$ 」の a について、「この a はキヨリ x を限りなく大きくしたときの lx の値なので、外光の明るさを指している？」と記述している。

A 1.57707732 y ~ a x^b モデル
 検討考慮中?
 a = 16476233.77
 b = -1.832946324
 (r = -0.999112582)

B 1.57707732 y ~ a + b(1/x²) モデル
 a = 517.5568157
 b = 30436651.29
 r = 0.9991164785

200.12
 400 x 2 (200) の x と y の関係
 1/x² の値を求め、
 それを y と比較して
 関係を確認する?

y と 1/x² の関係は 直線関係がみられる。

図7 学生 IK の回答

3. 今回のワークショップを通して

今回は、茨城県内国立大学理系学部学生、および埼玉県内国立大学教員養成系学部学生を対象としたワークショップをおこなった。本稿では、ワークシートをもとに、学生らが、関数電卓を用いて、測定距離と投写画面の明るさの間に成り立つ関数関係をどのように探究したかについて確認した。その結果、いずれの学生も「統計計算」モードによる回帰計算結果を使用していた。その際、学生によって使用する計算タイプが異なること、相関係数 r の値を根拠とした回答が確認された。今後は回帰計算結果から得られる相関係数 r の値をもとにした根拠に着目し、継続してワークショップを実施する。